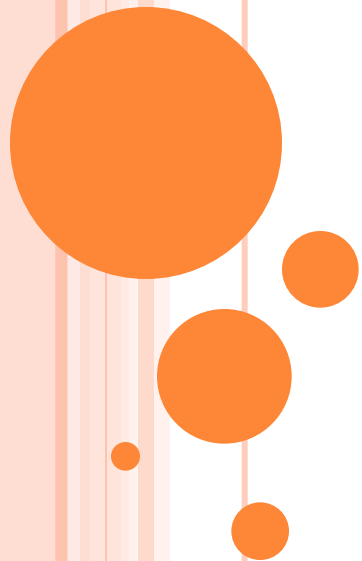




LES NOUVEAUX PROGRAMMES DE MATHÉMATIQUES EN STS : DES RESSOURCES

*Animation académique – Lycée G. Monge
Savigny sur Orge – vendredi 28 mars 2014*

Ressource n°1
entrée en résonance
et
équations
différentielles



Équations différentielles

On s'attache à relier les exemples étudiés avec les enseignements scientifiques et technologiques, en montrant l'importance de l'étude de phénomènes continus définis par une loi d'évolution et une condition initiale.

L'utilisation des outils logiciels est sollicitée ; elle a pour finalités :

- de mettre en évidence, expérimentalement, la signification ou l'importance de certains paramètres ou phénomènes ;
- de dépasser la seule détermination des solutions d'une équation différentielle en donnant la possibilité de visualiser des familles de courbes représentatives de ces solutions ;
- de permettre, avec l'aide du calcul formel, de donner une expression des solutions dans certains cas complexes.

Équations linéaires du second ordre à coefficients réels constants

Équation différentielle $ay''+by'+cy = d(t)$ où a , b et c sont des constantes réelles et d une fonction continue à valeurs réelles.

- Représenter à l'aide d'un logiciel la famille des courbes représentatives des solutions d'une équation différentielle.

- Résoudre une équation différentielle du second ordre :
 - à la main dans les cas simples ;
 - à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas.

- Déterminer la solution vérifiant des conditions initiales données :
 - à la main dans les cas simples ;
 - à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas.

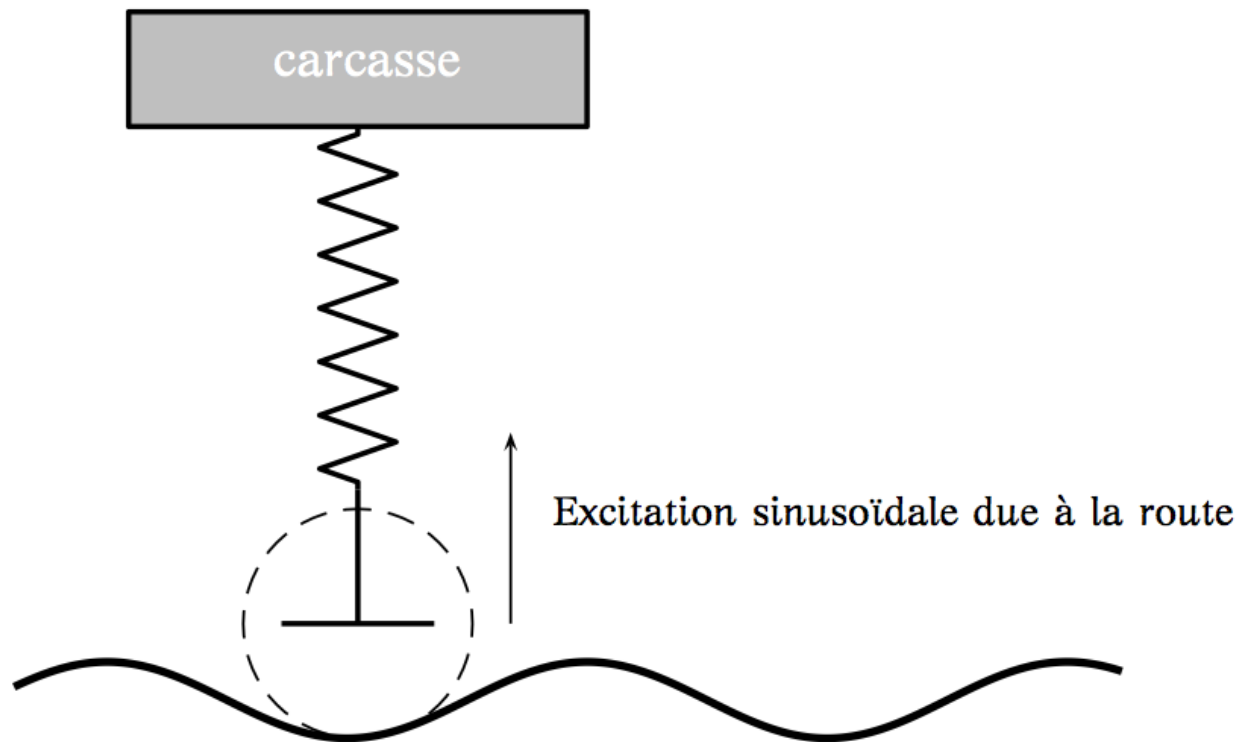
La fonction d est une fonction polynôme ou du type :

$$t \mapsto e^{\alpha t} ;$$
$$t \mapsto \cos(\omega t + \varphi) ;$$
$$t \mapsto \sin(\omega t + \varphi) .$$

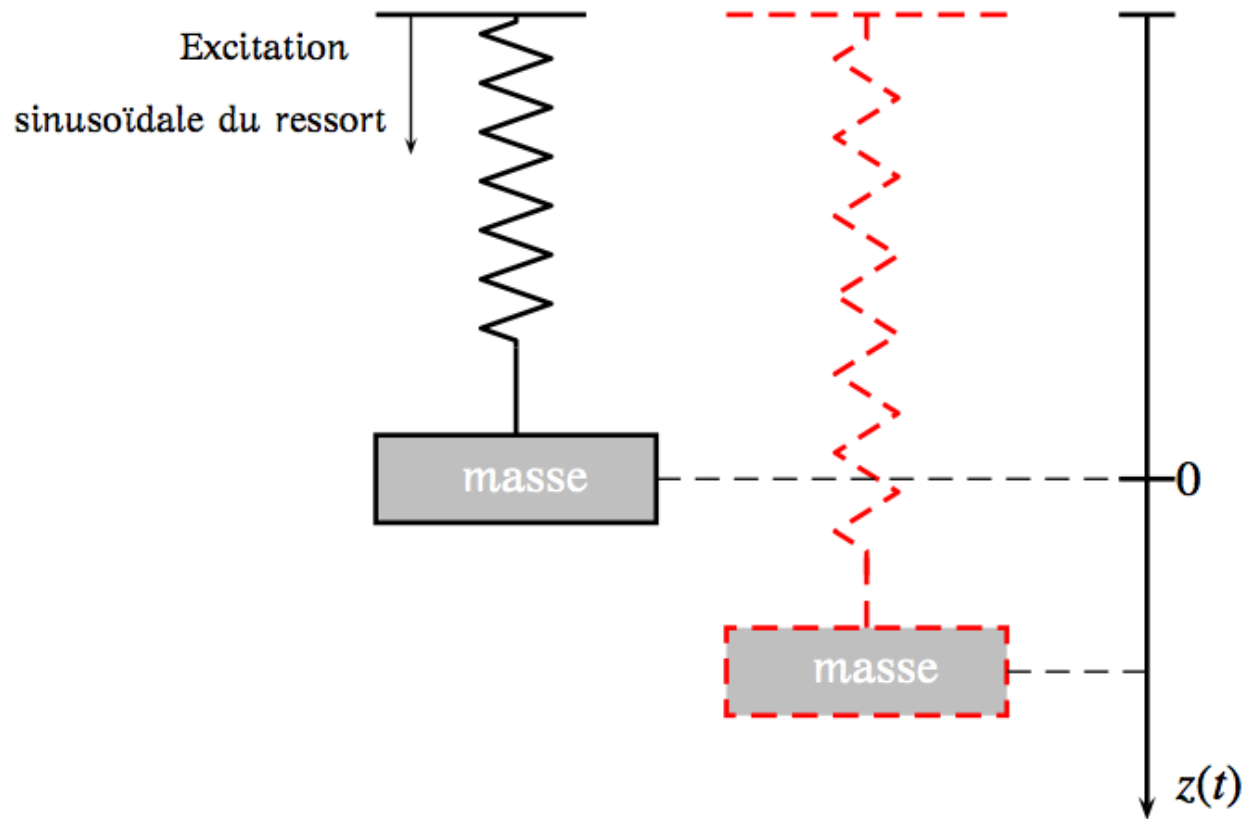
Les indications permettant d'obtenir une solution particulière sont données.

⇔ Résistance des matériaux, circuit électronique.

Comportement d'une voiture sur une route <<sinusoïdale >>



Analogie avec le ressort





Équation différentielle

$$z''(t) + \frac{k}{m}z(t) = \frac{k}{m}A \cos(\omega t)$$



Équation différentielle

$$z''(t) + \frac{k}{m}z(t) = \frac{k}{m}A \cos(\omega t)$$

m la masse de la voiture



Équation différentielle

$$z''(t) + \frac{k}{m}z(t) = \frac{k}{m}A \cos(\omega t)$$

m la masse de la voiture

k la constante de raideur du ressort



Équation différentielle

$$z''(t) + \frac{k}{m}z(t) = \frac{k}{m}A \cos(\omega t)$$

m la masse de la voiture

k la constante de raideur du ressort

ω la pulsation de la stimulation



Équation différentielle

$$z''(t) + \frac{k}{m}z(t) = \frac{k}{m}A \cos(\omega t)$$

m la masse de la voiture

k la constante de raideur du ressort

ω la pulsation de la stimulation

A l'amplitude



Équation différentielle

$$z''(t) + \frac{k}{m} z(t) = \frac{k}{m} A \cos(\omega t)$$

400 kg quart de voiture

k la constante de raideur du ressort

ω la pulsation de la stimulation

A l'amplitude



Équation différentielle

$$z''(t) + \frac{k}{m} z(t) = \frac{k}{m} A \cos(\omega t)$$

400 kg quart de voiture

10^4 N/m la constante de raideur

ω la pulsation de la stimulation

A l'amplitude



Équation différentielle

$$z''(t) + \frac{k}{m} z(t) = \frac{k}{m} A \cos(\omega t)$$

400 kg quart de voiture

10^4 N/m la constante de raideur

ω la pulsation de la stimulation

0.03 mètre l'amplitude



Équation différentielle

$$z''(t) + 25z(t) = \frac{3}{4} \cos(\omega t)$$

400 kg quart de voiture

10^4 N/m la constante de raideur

ω la pulsation de la stimulation

0.03 mètre l'amplitude



Équation différentielle

$$z''(t) + 25z(t) = \frac{3}{4} \cos(\omega t)$$



Équation différentielle

$$z''(t) + 25z(t) = \frac{3}{4} \cos(\omega t)$$

Utilisation éventuelle de
logiciel de calcul formel



Solution avec conditions initiales

Si $\omega \neq 5$

$$Z : t \mapsto \frac{3}{4} \times \frac{1}{25 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos 5t)$$

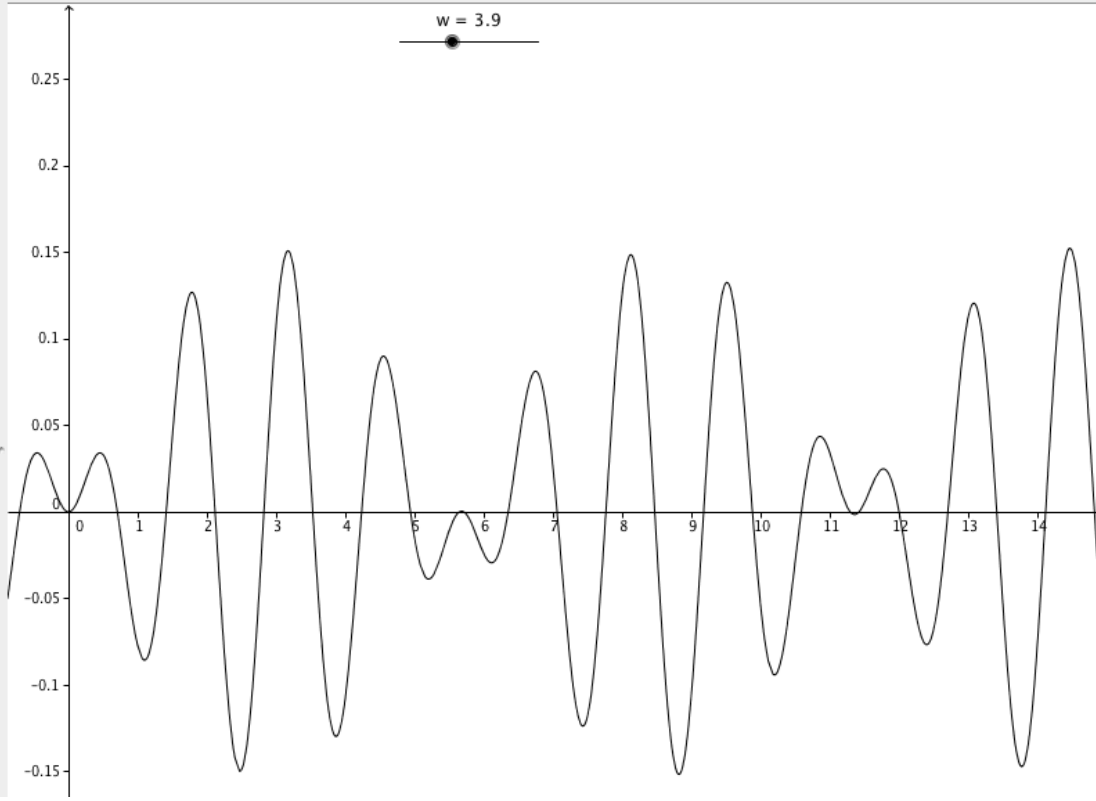




Algèbre

- Fonction
 - $Z(t) = \frac{3}{4(25 - 3.9^2)} (\cos(3.9t) - \cos(5t))$
 - $Z_{t\text{ilde}}(t) = 100t \sin(5t)$
- Nombre
 - $w = 3.9$

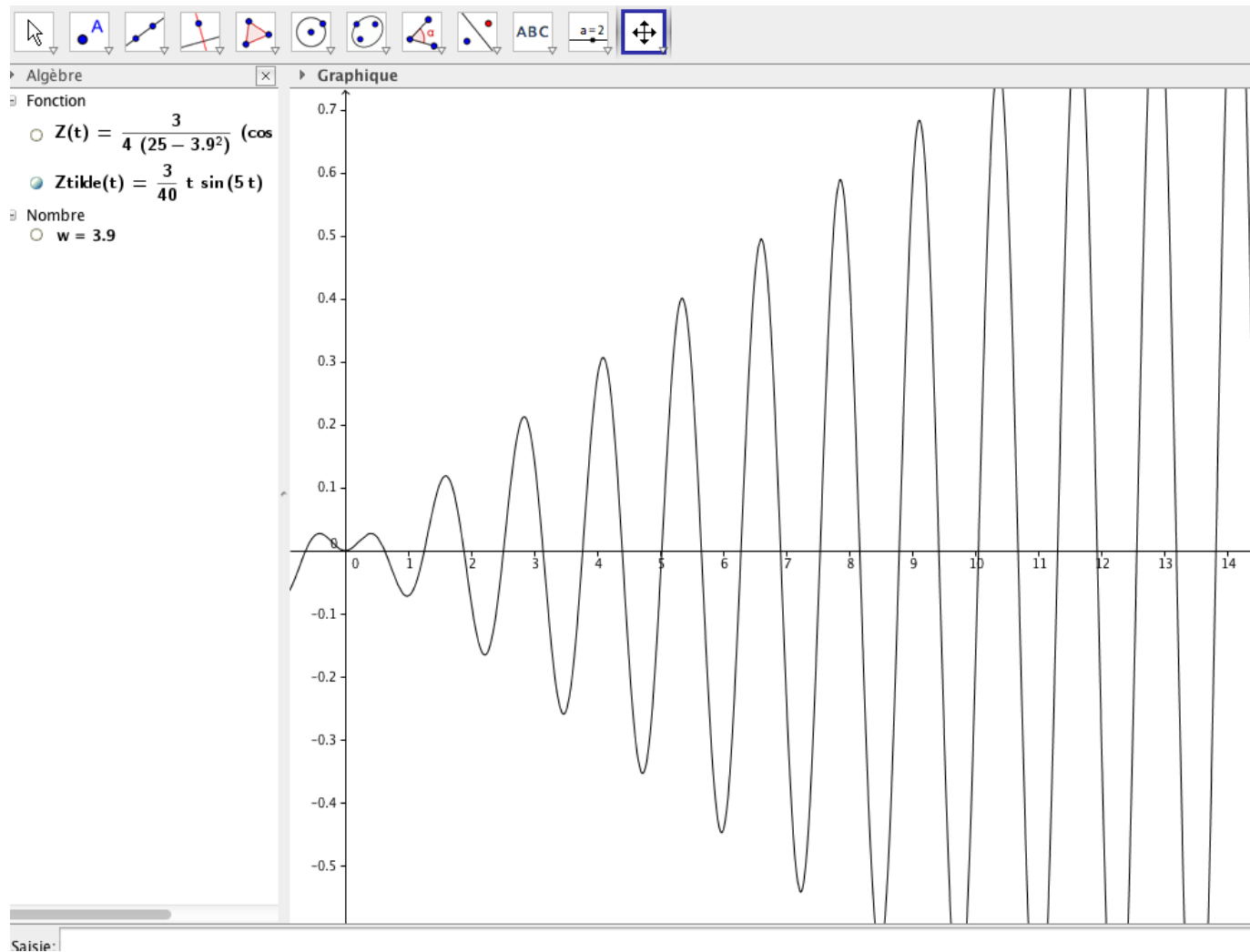
Graphique



Si $\omega = 5$ Solution : $t \longmapsto \frac{3}{40} t \sin 5t$



Si $\omega = 5$ Solution : $t \longmapsto \frac{3}{40} t \sin 5t$



Phénomène de résonance pour $\omega = 5$



SITUATION CONCRÈTE

Bandes rugueuses (3cm de hauteur)
sur l'autoroute avant un péage

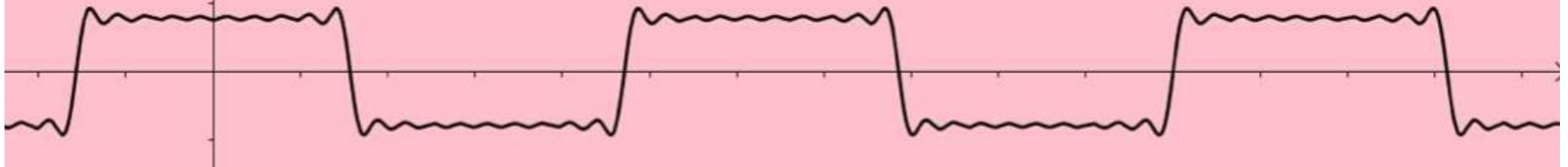


SITUATION CONCRÈTE

Bandes rugueuses (3cm de hauteur)
sur l'autoroute avant un péage

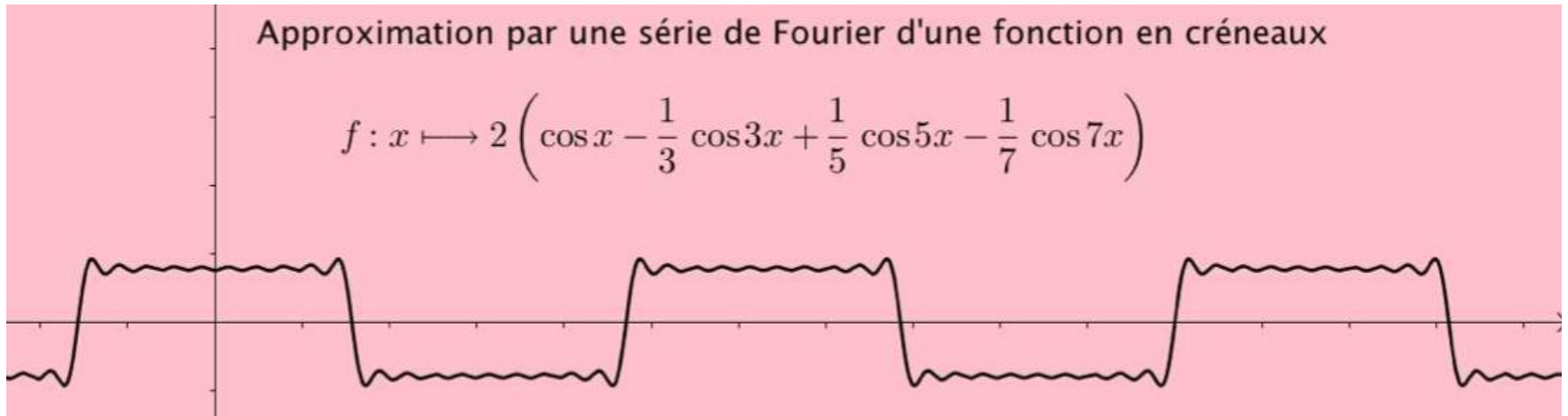
Approximation par une série de Fourier d'une fonction en créneaux

$$f : x \mapsto 2 \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{7} \cos 7x \right)$$



SITUATION CONCRÈTE

Bandes rugueuses (3cm de hauteur)
sur l'autoroute avant un péage

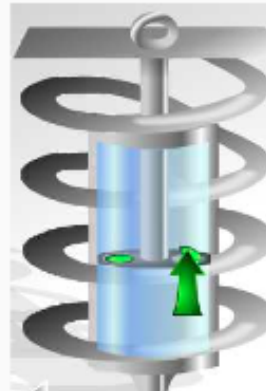


L'équation différentielle devient :

$$z''(t) + 25z(t) = 50 \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{7} \cos 7x \right)$$



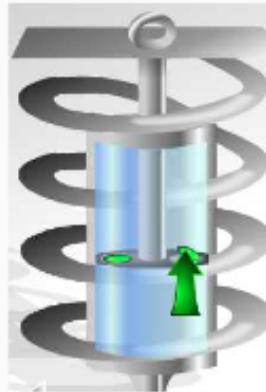
Afin d'éviter l'entrée en résonance du système un amortisseur de voiture est muni d'un système d'augmentation des frottements comme celui représenté ci-dessous (piston dans un fluide visqueux)



Source : <http://www.lyc-vangogh-ermont.ac-versailles.fr/spip.php?article22>



Afin d'éviter l'entrée en résonance du système un amortisseur de voiture est muni d'un système d'augmentation des frottements comme celui représenté ci-dessous (piston dans un fluide visqueux)



Source : <http://www.lyc-vangogh-ermont.ac-versailles.fr/spip.php?article22>

L'équation différentielle devient :
$$z'' + \gamma z' + \frac{k}{m} z = \frac{k}{m} A \cos(\omega t)$$

avec γ une constante dépendant du fluide.





RESSOURCE N°2 :
SOMMES PARTIELLES D'UNE
SÉRIE DE FOURIER

LES INTENTIONS

○ BO – Page 11

Les outils logiciels fournissent un ensemble de ressources particulièrement utiles pour l'enseignant des mathématiques en BTS [...] :

- En fournissant *rapidement* des résultats dans le domaine du calcul, des représentations graphiques [...]
- En contribuant par leur intervention au développement de la formation scientifique, à différents moments de la *démarche mathématique*, lors de la résolution de certains problèmes [...]

Le travail effectué doit permettre de centrer l'activité mathématique sur l'essentiel



DANS LE CADRE DU MODULE SÉRIE DE FOURIER

- Représentation d'une fonction T -périodique continue par morceaux.
- Exploiter une représentation graphique.
- Calculer des coefficients de Fourier à l'aide d'un logiciel.
- Représenter à l'aide d'un logiciel les sommes partielles d'une série de Fourier.
- Calculer et comparer la valeur exacte efficace d'une fonction et une valeur approchée donnée par la formule de Parseval.



LE DOCUMENT (1/4)

- Définition des paramètres

$$S_N(f)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(\omega n x) + b_n \sin(\omega n x)]$$



LE DOCUMENT (2/4)

- Construction d'une fonction T-périodique

$$h(x) = \text{Si}[x < \pi, 1, 0]$$

$$f(x) = h(x - \text{floor}(x/(2*\pi))*2*\pi)$$



LE DOCUMENT (3/4)

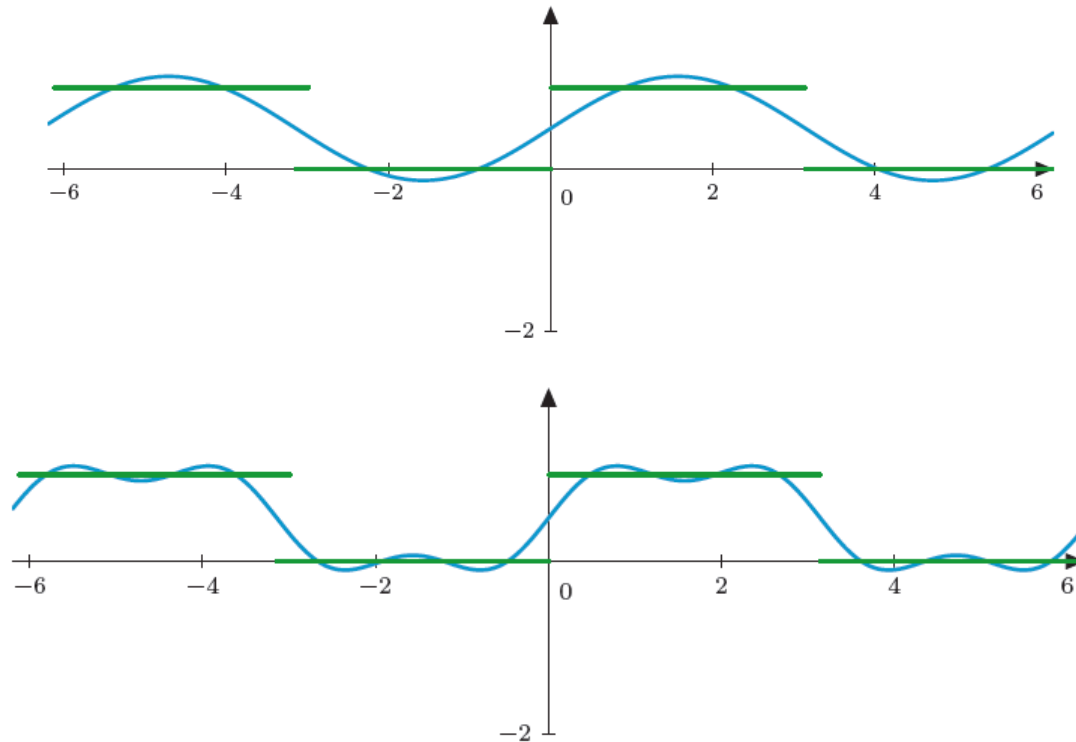
- Calculer les coefficients de Fourier, illustration :

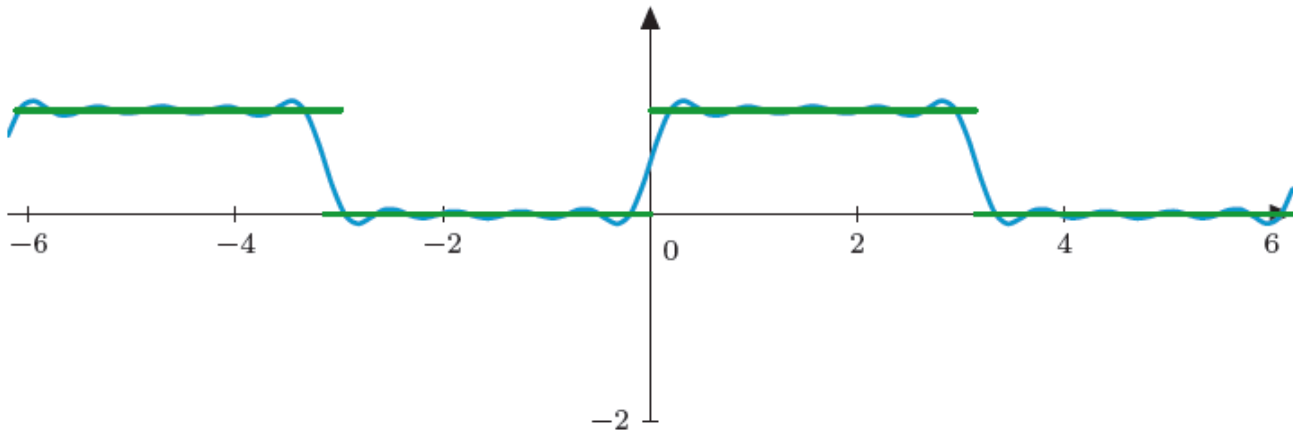
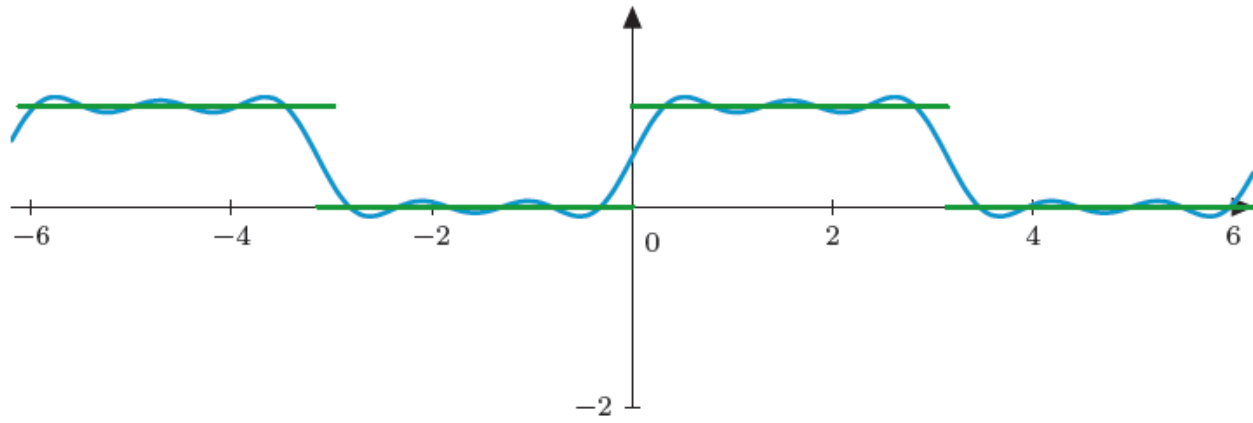
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega n t) dt$$



LE DOCUMENT (4/4)

- Construction et « variations » des sommes partielles en fonction du curseur N :





UTILISATION D'UN LOGICIEL DE CALCUL FORMEL POUR CALCULER LES COEFFICIENTS DE FOURIER

$\text{fourier_an}(f(x), x, 2 * \pi, n)$

$\text{fourier_bn}(f(x), x, 2 * \pi, n)$

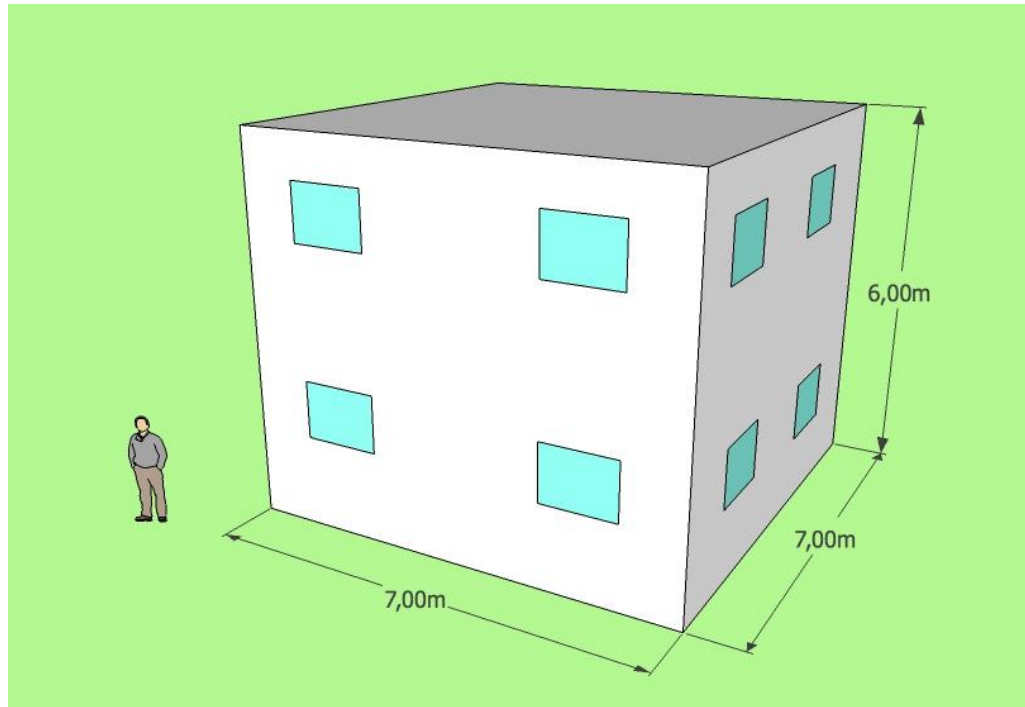
$$\frac{-2 \times \cos(n \times \pi) + \cos(2 \times n \times \pi) + n \times \pi \times \sin(2 \times n \times \pi) + 1}{\pi \times n^2}$$





RESSOURCE N°3 :
INERTIE THERMIQUE D'UN
BÂTIMENT

INERTIE THERMIQUE D'UN BÂTIMENT



Le problème :

* un bâtiment modélisé par un pavé, 20° C à l'intérieur et 4° C à l'extérieur. On coupe le chauffage.

* De combien de temps dispose-t-on avant de passer sous les 10° C ?



FICHE SYNTHÉTIQUE DE L'ACTIVITÉ (1/2)

- **Modules concernés**

- Configurations géométriques
- Fonctions d'une variable réelle

- **Équations différentielles**

- **Thème**

- Modéliser le refroidissement d'un bâtiment dans le temps en fonction de sa structure.

- **Objectifs**

- Résoudre une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.
- Calculer des surfaces et des volumes.

- **Approfondissements**

- Modifier le volume du bâtiment et évaluer son impact sur la réponse au problème.
- Modéliser une ventilation intérieur ↔ extérieur (interdisciplinarité).

FICHE SYNTHÉTIQUE DE L'ACTIVITÉ (2/2)

○ Scénario

○ Cette activité peut être mise en œuvre en tant qu'application concrète du cours, en travaux dirigés, en devoir à la maison, ou en contrôle en cours de formation.

Scénario	Partie A (simple et calculatoire)	Partie B	Partie C
TD	À faire à la maison, en préparation du TD.	En classe, environ 1 h	
DM	À faire en classe, en préparation du devoir.	À la maison	
CCF	À faire, à réduire ou à supprimer.	En autonomie, supprimant questions 1 et 2.	en les Choisir un ou plusieurs cas parmi les quatre.



DESCRIPTION DE LA RESSOURCE (1/4)

- Partie A : Calcul de grandeurs nécessaires à la résolution du problème

1. D'après le schéma ci-dessus, quelle est le volume d'air contenu dans le bâtiment ? Nous l'appellerons V_{air} .
2. Sachant que la masse volumique de l'air, notée ρ_{air} , est de $1,2 \text{ kg/m}^3$, calculer la masse de l'air contenu dans le bâtiment.

Partie B : Mise en équation du problème, résolution de l'équation différentielle

1. Montrer que l'équation ci-dessus est équivalente à l'équation (E) :

$$\theta'(t) + k\theta(t) = 4k$$

→ On obtient une solution particulière, avec un paramètre k :

$$\theta_h(t) = 16e^{-3600kt} + 4$$



DESCRIPTION DE LA RESSOURCE (2/4)

$$\theta_h(t) = 16e^{-3600kt} + 4 \quad \text{et} \quad k = \frac{\lambda}{m_{\text{béton}} c_{\text{béton}} \times \alpha + m_{\text{air}} \cdot c_{\text{air}}}$$

- Partie C : Solution en fonction de la structure du bâtiment.

1. Cas du bâtiment non isolé

- a) On a $\lambda = 1013 \text{ J/K}$ et $\alpha = 0,27$. Calculer le coefficient k .
- b) Tracer la courbe représentative de la température intérieure (en ° C) en fonction du temps (en heure) en utilisant un logiciel de géométrie dynamique, ou la calculatrice.
- c) À l'aide du graphique, répondre au problème initial.

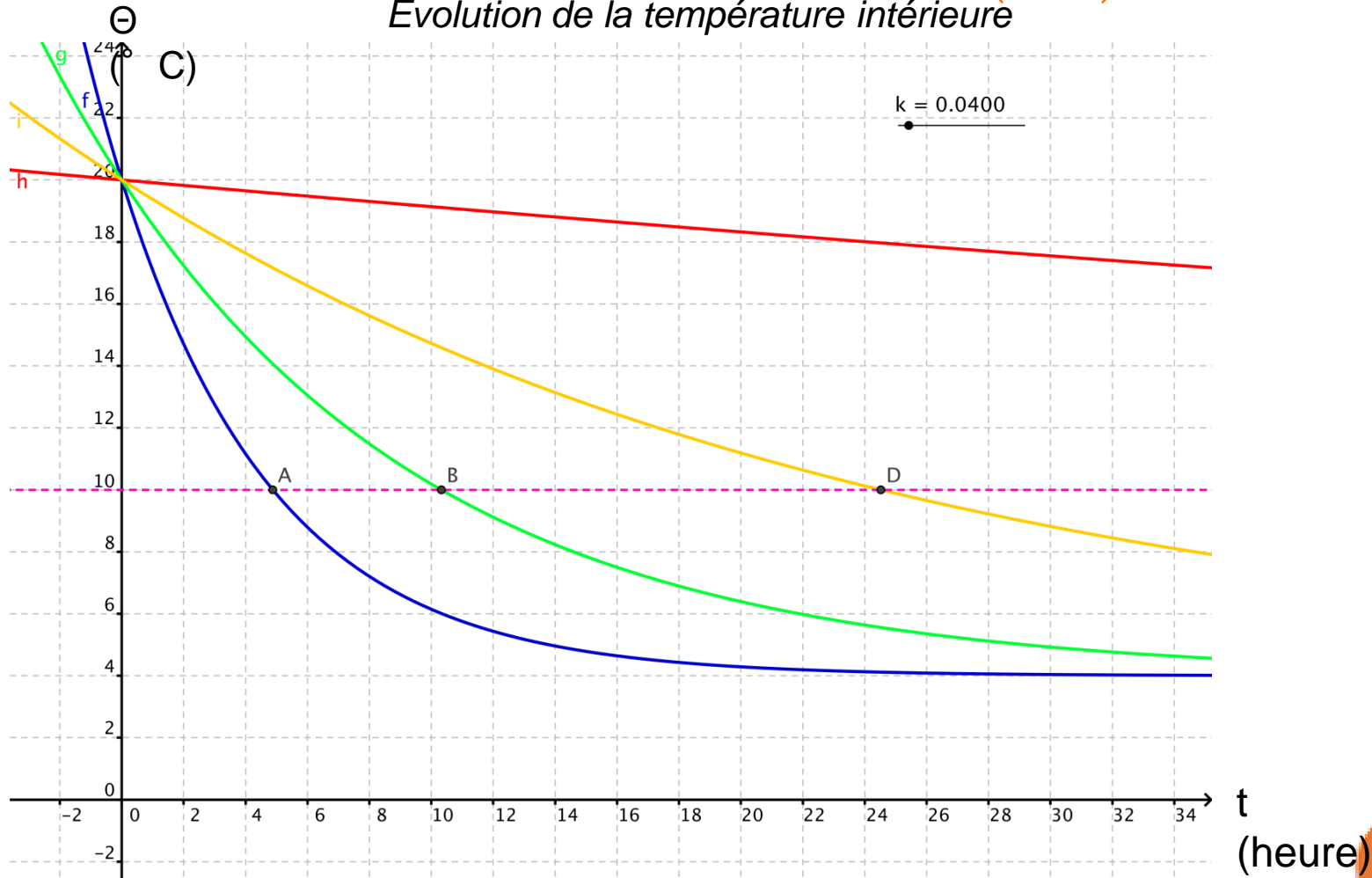
→ Étude de plusieurs cas, de façon numérique et **graphique** :

1. Bâtiment non isolé
2. Bâtiment isolé par l'extérieur
3. Bâtiment isolé par l'intérieur
4. Bâtiment à construire



DESCRIPTION DE LA RESSOURCE (3/4)

Évolution de la température intérieure



DESCRIPTION DE LA RESSOURCE (4/4)

- Conformément au nouveau programme, le sujet s'articule autour des axes suivants :
- Mathématisation d'un problème (modélisation) ;
- Mise en œuvre d'outils théoriques pour résoudre ce problème ;
- Valorisation des aspects numériques et graphiques ;
- Analyse de la pertinence des résultats au regard du problème posé.

Interdisciplinarité

- Ce sujet fait appel à des notions de thermodynamique (loi de refroidissement) et s'inscrit dans une thématique de développement durable.
- Idéal pour un BTS Domotique ou FEE (Fluides Énergies Environnement).