ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2022-2023 — **Stage « filé »**

Classe de troisième — **Fiche numéro 2**

Parution lundi 6 février — **Retour attendu le jeudi 9 mars**

Exercice 1 – Multiples et diviseurs

Soit a et b deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 9. Dire que $\overline{ab}$ est l'écriture décimale de l'entier, c'est dire que $N = 10a + b$.
On convient que cette écriture a deux chiffres si $a \neq 0$.
Définition : on dit qu'un entier a est multiple d'un entier b s'il existe un entier k tel que $a = kb$.
Définition : on dit qu'un entier naturel est un nombre premier lorsqu'il admet exactement deux diviseurs positifs, 1 et lui-même.
Propriété : tout entier naturel s'écrit de manière unique à l'ordre près comme produit de nombres premiers.

1. Démontrer que si d et u sont respectivement le chiffre des dizaines et celui des unités d'un nombre entier naturel N alors ce nombre N est divisible par 4 si et seulement si $2d + u$ est un multiple de 4
2. Déterminer les entiers naturels n tels que $n + 11$ soit un multiple de $n - 1$.
(On pourra remarquer que $n + 11 = n - 1 + 12$)
3. **a.** Décomposer le nombre 385 en produit de nombres premiers et déterminer le nombre de ses diviseurs (en comptant 1 et lui-même).
b. Déterminer le plus petit entier naturel ayant le même nombre de diviseurs que 385.

Exercice 2 – Fractions irréductibles

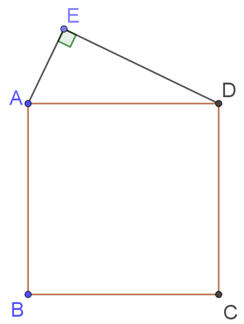
Définition : soit a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$. On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible lorsque a et b n'ont pas d'autre diviseur commun que 1.

Soit a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 tels que $ab = 196$. Déterminer les entiers naturels p et q tels que la fraction $\frac{p}{q}$ soit irréductible et ait pour carré la fraction $\frac{a}{b}$.

Exercice 3 – Calcul littéral

Propriété : pour tous nombres a, b et c, $a(b + c) = ab + ac$.
Cette propriété est à la base de tous les développements dans le calcul littéral, notamment pour démontrer que pour tous nombres a et b, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
Dans un problème concret faisant intervenir une ou plusieurs variables, il ne faut pas oublier de préciser dès le départ les contraintes concernant ces variables, par exemple une distance doit être positive.

1. **a.** Démontrer que pour tous nombres a et x, $(x + a)^2 - (x - a)^2 = 4ax$.
b. En déduire, sans utiliser une calculatrice et en expliquant le calcul, la valeur de $1\,111\,112^2 - 1\,111\,108^2$.
2. On considère un carré ABCD et un triangle AED rectangle en E, extérieur au carré comme sur la figure ci-contre.
On suppose que $\mathrm{AE} = n$ et $\mathrm{ED} = n + 4$, où n est un entier naturel non nul.
a. Exprimer l'aire du carré ABCD en fonction de n.
b. Si on augmente les distances AE et ED de 1, exprimer en fonction de n l'augmentation $A(n)$ de l'aire du carré ABCD.
c. Existe-t-il une valeur de n pour laquelle $A(n)$ est égale à 8 ?
d. Existe-t-il une valeur de n pour laquelle $A(n)$ est égale à 18 ?



Exercice 4 – Approximation de $\sqrt{2}$

Dans les calculs avec des fractions, on s'appuie sur les propriétés suivantes :

Pour tout nombre a et tous nombres non nuls b, c, d :

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}, \qquad \frac{ca}{cb}=\frac{a}{b}, \qquad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}.$$

Définition : soit a et x deux nombres. Le nombre a est une valeur approchée du nombre x à 0,0001 près lorsque

$$0 \leq x-a \leq 0{,}0001 \text{ ou } 0 \leq a-x \leq 0{,}0001$$

Soit a, b et c les nombres définis par $a=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$, $b=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ et $c=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$.

1. Ecrire les nombres a, b et c comme quotients de deux entiers.
2. Quel est le résultat affiché par la calculatrice pour les nombres $a-\sqrt{2}, b-\sqrt{2}$ et $c-\sqrt{2}$?
3. Proposer un nombre rationnel d (quotient de deux entiers) construit sur le modèle des nombres a, b et c et qui est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 0,0001 près.

Exercice 5 – Triangle rectangle et cercle

Pour déterminer la nature d'un triangle ou d'un quadrilatère, on fait appel aux caractérisations d'un triangle particulier (isocèle, équilatéral, isocèle) ou d'un quadrilatère particulier (parallélogramme, rectangle, losange, carré) en étant le plus précis possible.

1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre I. On considère deux points A et B diamétralement opposés sur ce cercle et un point C, distinct de A et B, sur le cercle $\mathcal{C}$.
   a. Soit D le point diamétralement opposé à C sur $\mathcal{C}$. Déterminer la nature du quadrilatère ADBC.
   b. En déduire la nature du triangle ABC.
2. Réciproquement, soit ABC un triangle rectangle en C et soit D le symétrique de C par rapport au milieu I de [AB].
   a. Déterminer la nature du quadrilatère ADBC.
   b. En déduire que le segment [AB] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.
3. Énoncer les théorèmes démontrés à l'issue des questions 1 et 2.

Exercice 6 – Calculs d'aires

Sur la figure ci-contre :

- le quadrilatère ABCD est un carré ;
- le quadrilatère HDJK est un rectangle ;
- le triangle EAD est rectangle en A ;
- le segment [HG] est le diamètre d'un demi-cercle passant par le point A et de centre E ;
- les points G et J sont les extrémités d'un quart de cercle de centre D.

On pose $\mathrm{ED}=x$ et $\mathrm{EA}=y$.

1. Exprimer l'aire du carré ABCD en fonction de x et y.
2. Exprimer l'aire du rectangle HDJK en fonction de x et y.
3. Que peut-on dire de ces deux aires ?