Niveau : 3e

Thème : Fonctions affines

Cette fiche n'a pas vocation à être un cours clé en main. Elle est un support à la réflexion pédagogique et didactique.

***Questions à se poser avant** de construire sa séquence (constituée éventuellement de plusieurs séances) sur le thème :*

- *Quels énoncés mathématiques (définitions, propriétés, théorèmes) à faire écrire par les élèves ?*
- *Quelle(s) démonstration(s) à construire avec les élèves ?*
- *Quels prérequis nécessaires y compris pour faciliter l'accès des élèves aux démonstrations ?*

CONTEXTE

Programme officiel : https://euler.ac-versailles.fr/rubrique43.html

Attendus de fin de troisième :
https://cache.media.education.gouv.fr/file/20/34/1/ensel283_annexe18_1120341.pdf

Prérequis

Au travers de questions flash, on fait un état des lieux et on réactive les savoirs et savoir-faire des élèves sur :

- la notion de fonction, d'image, d'antécédent, de représentation graphique ;
- la proportionnalité de deux grandeurs et la reconnaissance graphique d'une situation de proportionnalité (points alignés sur une droite passant par l'origine).

Activité rapide : questions flash

Question 1 :

f une fonction telle que $f(3) = 12$
12 est ……………de 3 par f
3 est ………………de 12 par f

Question 2 :

Le périmètre d'un carré est-il proportionnel à la longueur du côté du carré ?
L'aire d'un carré est-elle proportionnelle à la longueur du côté du carré ?

Question 3 :

Les tableaux ci-dessous sont-ils des tableaux de proportionnalité ? Si oui, préciser le coefficient de proportionnalité.

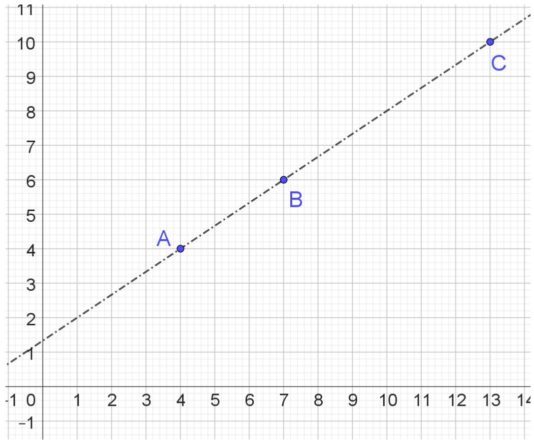
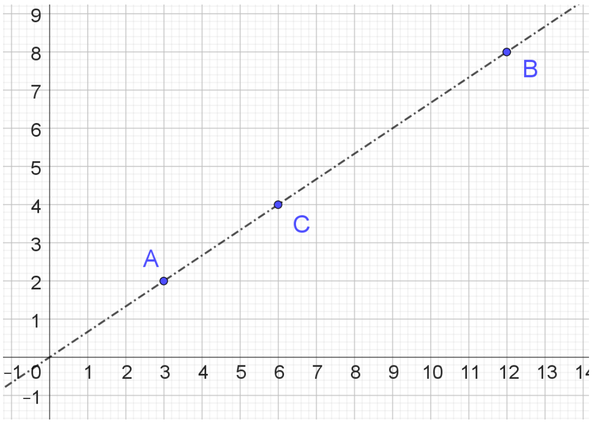
x	6	10
y	9	15

x	6	10	9
y	10	16	15

Cette question permet :

- *pour le premier tableau, d'exploiter la propriété sur l'égalité de deux fractions ;*
- *pour le deuxième tableau, de travailler sur la négation d'une phrase et le contre-exemple (puisque* $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9}$ *mais* $\frac{10}{6} \neq \frac{16}{10}$ *car* $10 \times 10 \neq 6 \times 16$*).*

Question 4 :
Pour chaque graphique, préciser s'il représente une situation de proportionnalité.

Cette question permet d'initier le cas particulier de fonction linéaire (droite passant par l'origine pour une fonction linéaire).

Trace dans le cahier de cours

Définition :
Une fonction f est appelée **fonction linéaire** lorsqu'il existe un nombre a tel que, pour tout nombre x, $f(x) = ax$.
Le nombre a est appelé coefficient de la fonction f.

L'énoncé donné aux élèves doit être quantifié (il existe … pour tout…) pour être correct.

Propriété (admise) :
Dans le plan muni d'un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

Définition :
Une fonction f est appelée **fonction affine** lorsqu'il existe deux nombres a et b tels que, pour tout nombre x, $f(x) = ax + b$.

Exemples : proposer des expressions algébriques de fonctions affines en faisant préciser les coefficients a et b dans chaque cas ou en faisant calculer image ou antécédent.

On fait remarquer aux élèves qu'une fonction linéaire est un cas particulier de fonction affine, le cas particulier où $b = 0$.

Propriété :
Soit a et b deux nombres réels et soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
Les accroissements de $f(x)$ sont proportionnels aux accroissements de x et le coefficient de proportionnalité est a.
Plus précisément, pour tous nombres distincts x_1 et x_2, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = a$.

Démonstration
Soit a et b deux nombres réels et soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
Alors pour tous nombres x_1 et x_2, distincts (donc $x_2 - x_1 \neq 0$),
$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(a\,x_2+b)-(a\,x_1+b)}{x_2-x_1} = \frac{a(\,x_2-x_1)}{x_2-x_1} = a.$

Cette démonstration permet de revoir un peu de calcul littéral. On sera attentif à expliquer la notation indicée (à ne pas confondre avec le carré, par exemple).

Cette propriété, faisant appel à la notion de proportionnalité permet d'expliquer comment on peut démontrer la propriété qui suit.
On l'illustre aussitôt avec quelques exemples de fonctions affines où les élèves doivent calculer le coefficient a.

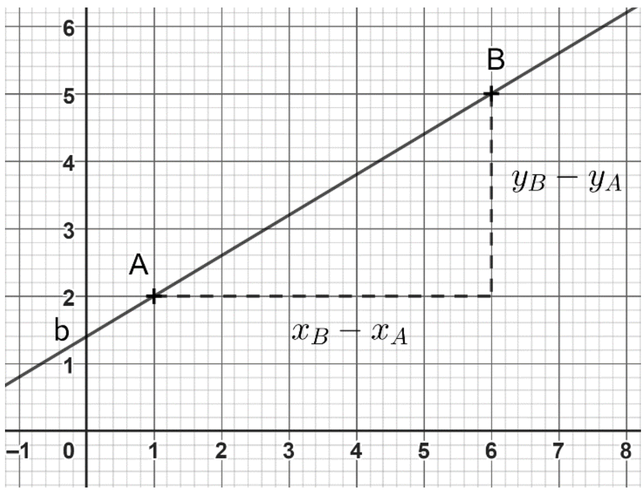
<u>Propriété (admise) :</u>
Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative d'une fonction affine est une droite.

<u>Définitions :</u>

- Le nombre a est appelé **coefficient** de la fonction f mais aussi **coefficient directeur** de la droite représentant f
- Le nombre b est appelé **ordonnée à l'origine** de la droite représentant f.

Remarque :

- La propriété de la page précédente permet d'écrire que si A et B sont deux points de la droite représentant f,
  on a $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A} = a.$
- Le nombre $b = f(0)$ est l'ordonnée du point d'intersection de la droite représentant f avec l'axe des ordonnées.



Remarque : il suffit de deux points pour tracer la courbe représentative d'une fonction affine.

On a alors tous les éléments pour traiter des exercices d'application directe sur les représentations graphiques de fonctions affines :

- *construction de droites représentant des fonctions affines ;*
- *lecture graphique de b et de a ;*
- *association de courbes et d'expressions algébriques de fonctions affines ;*
- *détermination graphique d'expressions algébriques de fonctions affines.*

Pour aller plus loin

Tableur et proportionnalité des accroissements (IREM Aix-Marseille) :
https://www.irem.univ-mrs.fr/Fonction-lineaire-et-affine.html