Niveau : 6^{e}

Thème : Multiple, diviseur, division euclidienne

Cette fiche n'a pas vocation à être un cours clé en main. Elle est un support à la réflexion pédagogique et didactique.

***Questions à se poser avant** de construire sa séquence (constituée de plusieurs séances) sur le thème :*
- *Quelle introduction ? quel historique ? quelles activités ?*
- *Quels énoncés mathématiques (définitions, propriétés) à faire écrire par les élèves ?*
- *Quels prérequis nécessaires ?*
- *Quelles traces dans le cahier de cours ?*

CONTEXTE

Programme officiel : https://euler.ac-versailles.fr/rubrique7.html

Les élèves ont été amenés à l'école primaire à travailler le calcul sous différentes formes (calcul mental ou en ligne, calcul posé, calcul instrumenté).
On réactive ces apprentissages en distinguant bien le travail sur les entiers du travail sur les nombres décimaux ou sur les fractions. Il est donc important de ne pas traiter la division décimale dans le même chapitre que la division euclidienne.

La division euclidienne, comme d'autres opérations, est associée à un « algorithme ». Ce mot vient du mathématicien astronome du IX^{e} siècle Al-Khwarizmi qui a écrit « *Kirab al-jabr* », c'est-à-dire le « Livre de l'algèbre ».

Prérequis

Au travers de questions flash, on fait un état des lieux et on réactive les savoirs et savoir-faire des élèves sur :
- les multiples de 2, de 3, de 5, de 9, de 10 ;
- les tables de multiplication ;
- le calcul posé d'une division.

Activité rapide : questions flash

QF 1 :
Ecrire tous les multiples de 10 jusqu'à 100 en précisant par quoi il faut multiplier 10 pour les obtenir.
Cette question, sur des multiples simples à obtenir, a pour objectif, de faire ressortir l'écriture $10 \times k$ pour tous ces multiples.

QF 2 :
L'opération « à trou » $24 = 8 \times \ldots$ se complète en $24 = 8 \times 3$ et se traduit par « 24 est le produit de 8 par 3 »
Compléter de même les opérations à trou suivantes et les traduire par une phrase « … est le produit de … par … » :
$20 = 4 \times \ldots$ $\quad$ $18 = 3 \times \ldots$ $\quad$ $14 = 7 \times \ldots$
Cette question permet de travailler l'expression « produit de … par » pour introduire la définition de multiple.

QF 3 :
Donner une liste d'entiers et demander s'ils sont divisibles par 2, par 5, par 3, par 9.
Cette question permet de tester ce qui a été vu (retenu) des critères de divisibilité vus à l'école primaire.

Trace dans le cahier de cours

<u>Définition :</u>

On dit qu'un nombre entier a est un **multiple** d'un nombre entier b lorsque a est le produit de b par un entier.
Si b est différent de 0, on dit aussi que :

- b est un **diviseur** de a ;
- a est **divisible** par b.

<u>Exemples :</u> on reprend les exemples comme dans QF2 et on en donne d'autres en traduisant chaque produit par plusieurs phrases faisant intervenir multiple ou diviseur ou divisible, comme pour :
$15 = 3 \times 5$ qui permet de dire que 15 est multiple 3, 15 est multiple de 5 mais aussi 3 est diviseur de 15, 5 est diviseur de 15, 15 est divisible par 3, 15 est divisible par 5.
On peut demander aux élèves de choisir eux-mêmes des produits et de donner leur traduction pour faire utiliser le vocabulaire à bon escient.

Remarque : *0 est multiple de tout entier puisque le produit de 0 par un entier est nul. Cette remarque peut être précédée d'exemples.*

On revient ensuite sur QF3 avant de redonner les critères de divisibilité revus.

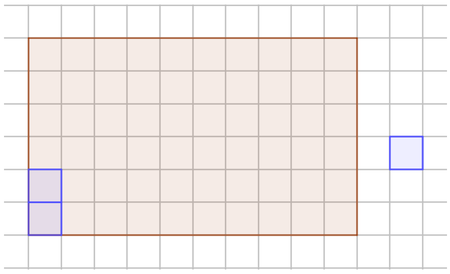
<u>Propriété : critères de divisibilité</u>

Soit a un nombre entier écrit dans le système décimal.
Si le chiffre des unités de a est 0, 2, 4, 6 ou 8 alors a est un multiple de 2. Sinon, a n'est pas un multiple de 2.
Si le chiffre des unités de a est 0 ou 5 alors a est un multiple de 5. Sinon, a n'est pas un multiple de 5.
Si le chiffre des unités de a est 0, alors a est un multiple de 10. Sinon, a n'est pas un multiple de 10.
Si la somme des chiffres de a est un multiple de 3, alors a est un multiple de 3. Sinon, a n'est pas un multiple de 3.
Si la somme des chiffres de a est un multiple de 9, alors a est un multiple de 9. Sinon, a n'est pas un multiple de 9.

Activités d'introduction de la division euclidienne

Activité 1

Maxime dispose d'une plaquette rectangulaire, de dimensions 6 et 10, divisée en carrés de côtés de longueur 1, et de 58 jetons carrés de côté de longueur 1.
Il place tous ses jetons les uns à côté des autres, sans laisser d'espace libre (comme commencé dans la figure ci-contre).
Pourra-t-il recouvrir toute la plaque avec ses 58 jetons ?
Combien de colonnes complètes pourra-t-il couvrir ?
Combien lui restera-t-il de jetons ?



Cette activité permet de faire manipuler les élèves sur les multiples de 6, en considérant les colonnes complètement remplies et d'encadrer 58 entre deux multiples consécutifs de 6.

Activité 2

1. Quelle est la liste des dix premiers multiples de 7 ?
2. On considère les nombres 17, 28, 40, 42 et 54.
   Préciser les multiples de 7.
   Encadrer les autres nombres par deux multiples *consécutifs* (mot à expliciter) de 7.

Cette activité permet de faire écrire des égalités $a = 7q + r$ où $r < 7$ et d'introduire le principe de la division euclidienne, de la mette en lien avec la division posée en posant les divisions de 17, 40 et 54 par 7 et en les réécrivant chacune $a = bq + r$ et *$r < b$.*

Trace dans le cahier de cours

Définition :

Soit a un nombre entier et b un nombre entier non nul.
On appelle **quotient** et **reste** de la division euclidienne de a par b les nombres entiers q et r tels que $a = bq + r$ et $r < b$.
Le nombre a est appelé dividende et le nombre b **diviseur** de la division euclidienne de a par b.

Remarque : q est le nombre de « paquets » contenant chacun b unités et r est le nombre d'unités qui restent, une fois le partage effectué.
On ne précise pas ici que $0 \leq r$ car, en sixième, les élèves ne connaissent que les nombres positifs.

Exemples : plusieurs divisions posées en faisant préciser à chaque fois le quotient et le reste et en faisant ressortir que l'algorithme de la division posée repose sur les multiples successifs de b et l'encadrement de a par deux multiples consécutifs de b, ce qui garantit la condition $r < b$.

Mise en garde : L'égalité seule $a = bq + r$ ne correspond à la division euclidienne de a par b que si on a bien $r < b$.
Exemple : l'égalité $37 = 8 \times 4 + 5$ correspond à la division euclidienne de 37 par 8 car $5 < 8$ mais elle ne correspond pas à la division euclidienne de 37 par 4 car $5 > 4$.

Petits problèmes d'application

1. Lucie dispose de 38 €. Elle veut aller au cinéma avec des amies en leur offrant leur place. Si les places sont à 7 €, combien de places peut-elle acheter ? Combien d'amies peut-elle inviter ?

2. Les six classes de sixième d'un collège effectuent une sortie en car. Cela correspond à 156 élèves et 13 adultes accompagnateurs.
   Un car peut transporter 57 passagers. On remplit totalement un car avant de commencer à en remplir un autre.

a) Combien de cars seront entièrement remplis ? Combien de cars sont nécessaires pour transporter tout le monde ?
b) Pour des raisons diverses, 5 élèves sont ajoutés à la sortie. Combien de cars le collège va-t-il réserver ?

(l'idée est, une fois calculé le nombre total (169) de personnes à transporter, de retravailler la division euclidienne $169 = 57 \times 2 + 55$ pour répondre aux différentes questions).

Pour faire travailler les élèves en autonomie sur ces notions

https://euler.ac-versailles.fr/rubrique7.html
en cliquant sur le lien « Programme augmenté cycle 3 », on pourra consulter les rubriques « Nombres et calculs » puis « Introduction » et les liens sur « les multiples », « les critères de divisibilité par 2, 3, 5 9 et 10 » ou « division euclidienne ».