Olympiades nationales 2020
Zone Asie-Pacifique
Éléments de solution

Exercice 1
Addition du cancre, suites de Farey et cercles de Ford

Partie A : l'addition du cancre *(il arrive dans la suite qu'on s'autorise des chaînes d'égalités, incorrectes mathématiquement parlant mais économes quant à la place occupée)*

1. $\frac{2}{3} \oplus \frac{4}{5} = \frac{2+4}{3+5} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\frac{4}{6} \oplus \frac{4}{5} = \frac{4+4}{6+5} = \frac{8}{11}$

Cet exemple prouve que deux écritures différentes du même rationnel peuvent conduire à des résultats différents.

2. $(1 \oplus 1) \oplus 2 = \left(\frac{1}{1} \oplus \frac{1}{1}\right) \oplus \frac{2}{1} = \frac{1}{1} \oplus \frac{2}{1} = \frac{3}{2}$ (la simplification de $\frac{2}{2}$ est obligatoire avant d'appliquer la définition)

$1 \oplus (1 \oplus 2) = 1 \oplus \left(\frac{1}{1} \oplus \frac{2}{1}\right) = 1 \oplus \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{1} \oplus \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$.

Les parenthèses sont nécessaires chaque fois qu'on a défini une opération binaire et qu'on veut faire entrer le résultat dans un calcul ultérieur. Ce n'est qu'**après** avoir prouvé ce qui s'appelle *associativité* qu'on peut à bon escient se dispenser des parenthèses…

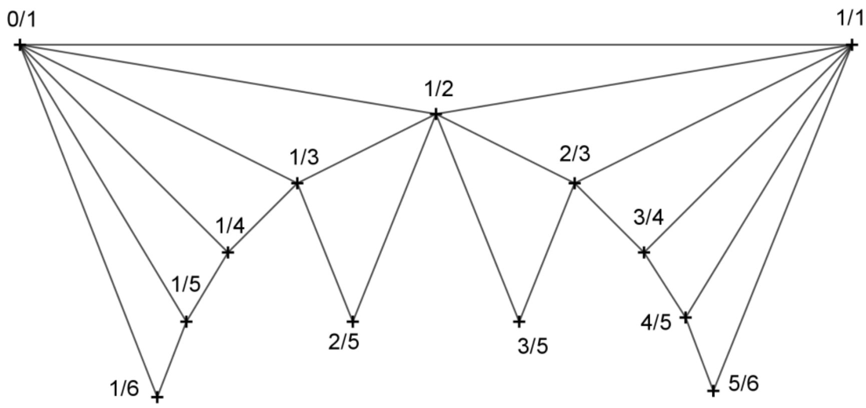
3. $2 \times \left(\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3}\right) = 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

Si la multiplication était distributive par rapport à l'addition du cancre, on aurait $2 \times \left(\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{2} \oplus \frac{2}{3} = \frac{1}{1} \oplus \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$

Ici encore, c'est la nécessité d'utiliser l'écriture irréductible de chaque rationnel en jeu qui crée la différence.
La multiplication n'est pas distributive par rapport à l'addition du cancre.

4. On suppose que $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ sont des écritures irréductibles de deux rationnels. On a, sans contradiction avec la définition de l'addition du cancre, $\frac{1}{x} = \frac{b}{a}$ et $\frac{1}{y} = \frac{d}{c}$. Ces écritures sont – évidemment – elles aussi irréductibles. Il vient : $\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{b}{a} \oplus \frac{d}{c} = \frac{b+d}{a+c} = \frac{1}{x \oplus y}$

Partie B : suites de Farey



1. Pour « lire » la suite de Farey d'ordre n, on commence par 0/1, puis $1/n$ et on progresse de la gauche vers la droite. En négligeant les dénominateurs supérieurs à n.
On a ainsi :

$$F_4 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}$$
$$F_5 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right\}$$
$$F_6 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right\}$$

2. Par définition, les éléments de l'ensemble F_n sont des éléments de F_{n+1}, puisque leur dénominateur ne dépasse pas n, donc ne dépasse pas $n+1$.

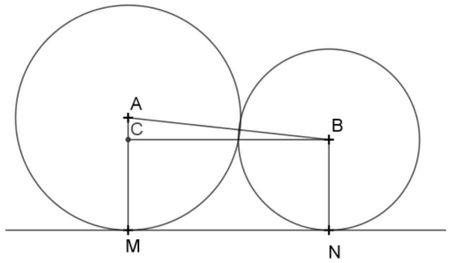
3. On suppose que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ et que ces deux rationnels sont des éléments consécutifs de F_{n+1}. Si les deux dénominateurs sont égaux à $n+1$, alors les deux nombres considérés sont $\frac{a}{n+1}$ et $\frac{a+1}{n+1}$. Dans ce cas, on a $\frac{a}{n+1} < \frac{a}{n} < \frac{a+1}{n+1}$, car $n < n+1$ pour la première inégalité, car $a < n$ pour la seconde. Mais alors $\frac{a}{n}$ est aussi un élément de la suite F_{n+1} compris entre des deux, contradiction. Dons les nombres de départ n'ont pas le même dénominateur, l'un de ces dénominateurs est inférieur à $n+1$ et ce nombre est dans F_n.

4. On suppose que $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont consécutives dans une certaine suite de Farey. Calculons :

$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ab+bc-ab-ad}{c(b+d)} = \frac{1}{c(b+d)}$. On trouve par un calcul analogue $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{-1}{d(b+d)}$. L'encadrement proposé est donc vrai.

5. Le programme proposé applique le résultat *non démontré* précédent, savoir que pour trouver les éléments à ajouter à une suite de Farey pour obtenir la suite d'ordre supérieur, on intercale $\frac{a+c}{b+d}$ entre $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{d}$. Ici on se limite à la suite d'ordre et on trouve les deux éléments de la suite qui encadrent le nombre donne x.

Partie C : cercles de Ford



1. Le cercle de Ford associé au rationnel $\frac{a}{b}$ a, par définition, pour centre le point A dont le couple de coordonnées est $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right)$ et pour rayon $\frac{1}{2b^2}$. Le couple de coordonnées de B est $\left(\frac{c}{d}, \frac{1}{2d^2}\right)$. Ces cercles sont tangents à l'axe des abscisses respectivement en M et N.

2. Soit C le projeté orthogonal de B sur (AM). Le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC rectangle en C donne :

$$\mathrm{AB}^2 = \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2}\right)^2$$

En utilisant le résultat *non démontré* $ad - bc = 1$, on obtient $\mathrm{AB}^2 = \frac{1}{b^2d^2} + \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4d^2} - \frac{1}{2b^2d^2} = \left(\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2}\right)^2$, c'est le résultat demandé, qui prouve…

3. … que ces deux cercles sont tangents (la distance des centres est égale à la somme des rayons).