MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Amériques-Antilles-Guyane

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La première partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Pas mal de têtes

Trois intrépides chevalières, Clara, Noémie et Violette, ont reçu la mission de débarrasser le pays d'un ignoble dragon possédant N têtes.

Elles attaquent le dragon en obéissant aux règles suivantes :

- Lors de chacune de ses attaques, Clara coupe la moitié des têtes encore en place, plus une ;

- Lors de chacune de ses attaques, Noémie coupe le tiers des têtes encore en place, plus deux ;

- Lors de chacune de ses attaques, Violette coupe le quart des têtes encore en place, plus trois.

Les attaques se déroulent dans l'ordre qu'elles souhaitent, une même chevalière pouvant attaquer plusieurs fois de suite ou s'abstenir. Le nombre de têtes encore en place après chaque attaque doit être un nombre entier. Si une chevalière est dans l'impossibilité de respecter le protocole fixé, elle cesse définitivement de combattre.

Étude préliminaire

1. On donne un nombre entier positif x.
   a. Si le dragon possède $2x$ têtes, combien lui en reste-t-il après un assaut de Clara ?
   b. Si le drageon possède $3x$ têtes, combien lui en reste-t-il après un assaut de Noémie ?
   c. Si le dragon possède $4x$ têtes, combien lui en reste-t-il après un assaut de Violette ?
   d. Si le dragon possède $4x$ têtes, combien lui en reste-t-il après un assaut de Violette suivi d'un assaut de Noémie ?
2. Montrer que si $N = 12$, les combattantes peuvent s'organiser et vaincre le dragon.
3. Montrer que si $N = 2\ 023$, le dragon survit.

Autres situations

1. Soit k un entier naturel.
   a. Dans cette question uniquement, on suppose que le dragon possède initialement $N = 8k$ têtes. Prouver que les quatre chevalières peuvent ramener cet effectif à $4(k-1)$.
   b. Dans cette question uniquement, on suppose que le dragon possède initialement $N = 4(4k+1)$ têtes. Prouver que les chevalières peuvent ramener cet effectif à $12k$.
   c. Dans cette question uniquement, on suppose que le dragon possède initialement $N = 4(4k+3)$ têtes. Prouver que les chevalières peuvent ramener cet effectif à $4k$.

Quelques conclusions

1. On rappelle que nombre initial de têtes du dragon est N.
   a. Montrer que si N est un multiple de 4, alors le dragon peut être vaincu.
   b. Montrer que si N est un nombre pair, alors le dragon peut être vaincu.
   c. Montrer que si N est un multiple de 3, alors le dragon peut être vaincu.

2. Montrer que si N n'est ni pair ni multiple de 3, alors le dragon survit.

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Le bal des tangentes

Soit a un réel non nul, b, c et d des réels. On considère la fonction f définie sur **R** par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ pour tour } x \text{ réel.}$$

On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse α est notée T_α.

1. Si x et y sont des réels, montrer que $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
2. On suppose qu'il existe deux réels distincts α et β tels que la droite T_α passe par le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse β. Prouver que dans ce cas :

$$a(2\alpha + \beta) + b = 0.$$

3. Montrer qu'il n'existe pas trois réels distincts α, β et γ tels que les trois conditions suivantes soient réalisées :

La droite T_α passe par le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse β,
La droite T_β passe par le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse γ,
La droite T_γ passe par le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse α.

4. Soit g la fonction définie sur **R** par :

$$g(x) = (x^2 - 1)^2.$$

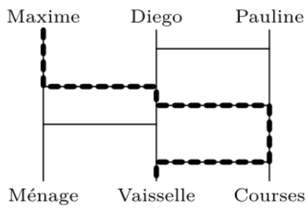
On appelle $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Déterminer des réels x_1, x_2, x_3, x_4 tels que les conditions suivantes soient réalisées :

La tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse x_1 passe par le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x_2,
La tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse x_2 passe par le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x_3,
La tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse x_3 passe par le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x_4,
La tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse x_4 passe par le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x_1.

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Amidakujis

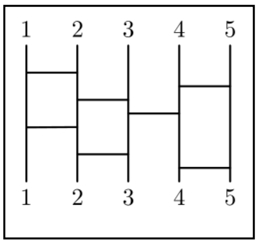
Au Japon, les amidakujis sont utilisés comme méthode graphique de répartition aléatoire des tâches.
Dans l'exemple ci-contre, Maxime, Diego et Pauline sont colocataires et vont réaliser un amidakuji leur permettant de se répartir les tâches. Pour cela, ils tracent trois barres verticales, avec les prénoms placés au-dessus de chaque barre. Ils placent aussi les trois tâches au hasard, une en dessous de chaque barre verticale. Des barres horizontales sont ensuite placées de façon aléatoire dans les intervalles entre les barres verticales, de manière à ce que deux barres horizontales dans des intervalles voisins ne soient pas à la même hauteur.



Pour déterminer l'attribution d'une tâche, on part d'un prénom en descendant avec la règle suivante : à chaque fois que l'on rencontre une barre horizontale à gauche ou à droite, on la suit jusqu'à la prochaine barre verticale. Arrivé sur cette barre verticale voisine, on reprend la descente. On continue ainsi jusqu'à aboutir à une tâche, qui sera celle attribuée à la personne choisie en haut du diagramme. Dans l'exemple ci-dessus, Maxime fera la vaisselle.

Pour simplifier l'étude d'un amidakuji, on utilise des nombres entiers à la fois pour les points de départ et d'arrivée. Si partant de 2, on arrive à 3, on dira que 3 est l'image de 2, et que 2 est un antécédent de 3.
Pour résumer la répartition, on adopte la notation suivante : sur une première ligne, on indique les entiers de départ dans l'ordre croissant, et sur une deuxième ligne, on note en dessous de chaque entier le nombre entier obtenu à l'arrivée. Par exemple, dans l'amidakuji de Diego, Pauline et Maxime, l'image de 1 est 2, l'image de 2 est 1 et l'image 3 est 3, donc on note $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Voici un autre exemple d'amidakuji avec 5 points.



a. Recopier la figure et indiquer en couleur un chemin permettant de trouver l'image de 3.
b. Déterminer un antécédent de 5 dans cet amidakuji. Tracer dans une autre couleur le chemin correspondant.
c. Déterminer la notation de cet amidakuji.

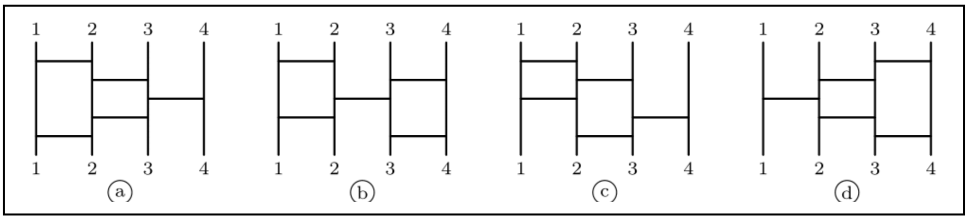
2. Construire un amidakuji correspondant à

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Est-il possible que dans un amidakuji, une tâche ne soit pas attribuée ? Si oui, donner un exemple. Sinon, donner une méthode pour retrouver la personne correspondante.

4. On considère dans cette question un amidakuji à 3 points.
a. De combien de façons différentes peut-on attribuer trois tâches distinctes à trois personnes distinctes ?
b. On dispose au choix 0, 1, 2 ou 3 barres horizontales. Combien d'amidakujis différents obtient-on au total ?

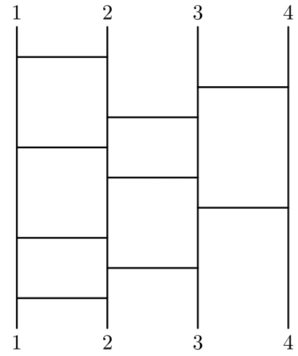
5. Déterminer l'amidakuji qui ne donne pas la même attribution que les autres parmi les suivants :



6. En construisant un amidakuji, le placement de certaines barres horizontales peut parfois s'avérer superflu.
a. Justifier que si deux barres horizontales dans le même intervalle ne sont pas séparées par une autre barre horizontale dans un intervalle voisin, elles peuvent être supprimées.

b. Justifier que lorsque la configuration  apparaît au sein d'un amidakuji, elle peut être remplacée par  sans modifier le reste de l'amidakuji.

c. À l'aide de ces techniques, recopier et simplifier l'amidakuji ci-contre de manière à n'utiliser que 3 barres horizontales. On donnera un schéma pour chaque étape intermédiaire, en entourant la partie modifiée.



7. Dessiner un amidakuji noté $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$ en utilisant 3 barres horizontales, puis un amidakuji noté $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\end{pmatrix}$ en utilisant 6 barres horizontales.