Concours général de mathématiques 2018 - Correction

François-Xavier DUTHOIT

Table des matières

Problème I - Approximations de courbes

Partie A - Les polynômes de Bernstein

Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel i compris entre 0 et n, on note $B_{n,i}(p)$ le polynôme pour p variant dans l'intervalle $[0;1]$ par

$$B_{n,i}(p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

avec $\binom{n}{i}$ le coefficient binomial, i parmi n. Ainsi, on a $B_{0,0}(p) = 1$, $B_{1,0}(p) = 1-p$, $B_{0,1}(p) = p$.

1. (a) Donner l'expression de $B_{2,0}(p), B_{2,1}(p), B_{2,2}(p)$.
   Correction : on utilise la valeur des coefficients binomiaux d'ordre 2 pour obtenir les polynômes voulus :

$$\binom{2}{0} = 1, \quad \binom{2}{1} = 2, \quad \binom{2}{2} = 1.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} B_{2,0}(p) &= (1-p)^2 = p^2 - 2p + 1, \\ B_{2,1}(p) &= 2p(1-p) = -2p^2 + 2p, \\ B_{2,2}(p) &= p^2. \end{aligned}$$

   (b) Déterminer l'expression des polynômes de Bernstein pour $n = 3$, à savoir $B_{3,0}(p), B_{3,1}(p), B_{3,2}(p), B_{0,3}(p)$.
   Correction : on procède de la même manière pour $n = 3$:

$$\binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = 3, \quad \binom{3}{3} = 1.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} B_{3,0}(p) &= (1-p)^3 = -p^3 + 3p^2 - 3p + 1, \\ B_{3,1}(p) &= 3p(1-p)^2 = 3p^3 - 6p^2 + 3p, \\ B_{3,2}(p) &= 3p^2(1-p) = -3p^3 + 3p^2, \\ B_{0,3}(p) &= p^3. \end{aligned}$$

2. (a) Quelle est l'expresssion de $B_{n,0}(p)$ et $B_{n,n}(p)$?

   Correction : Comme $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$, on en déduit directement :

$$B_{n,0}(p) = (1-p)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^k p^k,$$
$$B_{n,n}(p) = p^n.$$

   (b) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout i compris entre 1 et $n-1$,

$$B_{n,i}(p) = (1-p) B_{n-1,i}(p) + p B_{n-1,i-1}(p).$$

   Correction : cela se prouve avec la relation dite du triangle de Pascal. Pour tout $n \geq 1$ et i compris entre 1 et $n-1$,

$$\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ i-1 \end{pmatrix}.$$

   On en déduit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i (1-p)^{n-i} &= \begin{pmatrix} n-1 \\ i \end{pmatrix} p^i (1-p)^{n-i} + \begin{pmatrix} n-1 \\ i-1 \end{pmatrix} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= (1-p) \begin{pmatrix} n-1 \\ i \end{pmatrix} p^i (1-p)^{n-1-i} + p \begin{pmatrix} n-1 \\ i-1 \end{pmatrix} p^{i-1} (1-p)^{n-1-(i-1)}, \end{aligned}$$

   ce qui nous donne bien la relation

$$B_{n,i}(p) = (1-p) B_{n-1,i}(p) + p B_{n-1,i-1}(p).$$

3. (a) En quelles valeurs s'annulent les polynômes de Bernstein ?

   Correction :

   — On constate d'abord que $B_{0,0}(p) = 1$ est constant et non nul, donc ne s'annule jamais.

   — D'autre part, quel que soit $n \geq 1$, $B_{n,0}(p) = (1-p)^n$ s'annule en 1 et $B_{n,n}(p) = p^n$ s'annule en 0.

   — Enfin, quel que soit $n \geq 2$ et pour i compris entre 1 et $n-1$, $B_{n,i}(p) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i (1-p)^{n-i}$ s'annule en 0 et en 1.

   (b) Qu'en est-il de son signe sur $[0;1]$?

   Correction : les coefficients binomiaux sont évidemment positifs. D'autre part, p et $1-p$ sont tous les deux positifs pour $p \in [0,1]$, on en déduit qu'il en est de même pour les polynômes de Bernstein.

4. Démontrer que les polynômes de Bernstein d'un même degré forment une partition de l'unité : c'est-à-dire, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = 1.$$

   Correction : on reconnaît la formule du binôme. En effet,

$$\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i (1-p)^{n-i} = (p+1-p)^n = 1^n = 1.$$

5. Déterminer la valeur des sommes $\sum_{i=0}^{n} i B_{n,i}(p)$ et $\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p)$. Que représentent ces sommes probabilistes ?

   Correction : tout d'abord, remarquons que comme le terme pour $i = 0$ est nul pour les deux sommes, on a les égalités : $\sum_{i=0}^{n} i B_{n,i}(p) = \sum_{i=1}^{n} i B_{n,i}(p)$ et $\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = \sum_{i=1}^{n} i^2 B_{n,i}(p)$.

   — Regardons les résultats pour $n = 1, 2, 3$ de la première somme :

$$\sum_{i=0}^{1} i B_{1,i}(p) = B_{1,1}(p) = p,$$

$$\sum_{i=0}^{2} iB_{2,i}(p) = B_{2,1}(p) + 2B_{2,2}(p)$$
$$= 2p(1-p) + 2p^2$$
$$= 2p,$$

$$\sum_{i=0}^{3} iB_{2,i}(p) = B_{2,1}(p) + 2B_{3,2}(p) + 3B_{3,3}(p)$$
$$= 3p(1-p)^2 + 6p^2(1-p) + 3p^3$$
$$= 3p.$$

On se doute donc que la formule à démontrer est :

$$\mathcal{P}(n): \quad \sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) = np.$$

Démontrons cela par récurrence. L'initialisation est déjà faite. Supposons maintenant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} iB_{n+1,i}(p) &= (n+1)B_{n+1,n+1}(p) + \sum_{i=0}^{n} iB_{n+1,i}(p) \\
&= (n+1)B_{n+1,n+1}(p) + (1-p)\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) + p\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i-1}(p) \\
&= (n+1)B_{n+1,n+1}(p) + (1-p)\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) + p\sum_{i=1}^{n} iB_{n,i-1}(p) \\
&= (n+1)B_{n+1,n+1}(p) + (1-p)\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) + p\sum_{i=0}^{n-1} (i+1)B_{n,i}(p) \\
&= (n+1)B_{n+1,n+1}(p) + (1-p)\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) + p\sum_{i=0}^{n} (i+1)B_{n,i}(p) - p(n+1)B_{n,n}(p) \\
&= (n+1)\left(B_{n+1,n+1}(p) - pB_{n,n}(p)\right) + \sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) + p\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) \\
&= (n+1)\left(p^{n+1} - p^{n+1}\right) + np + p \\
&= (n+1)p
\end{aligned}$$

Remarques sur le calcul : dans la deuxième ligne, on utilise $\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) = \sum_{i=1}^{n} iB_{n,i}(p)$. L'hypothèse de récurrence est utilisée dans l'avant-dernière ligne, ainsi que le résultat de la question 4.

Conclusion : la formule est vraie pour tout n entier naturel non nul.

— Regardons les résultats pour $n = 1, 2, 3$ de la deuxième somme :

$$\sum_{i=0}^{1} i^2 B_{1,i}(p) = B_{1,1}(p) = p,$$

$$\sum_{i=0}^{2} i^2 B_{2,i}(p) = B_{2,1}(p) + 4B_{2,2}(p)$$
$$= 2p(1-p) + 4p^2$$
$$= 2p(1-p+2p)$$
$$= 2p(1+p),$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{3} i^2 B_{2,i}(p) &= B_{2,1}(p) + 4B_{3,2}(p) + 9B_{3,3}(p) \\ &= 3p(1-p)^2 + 12p^2(1-p) + 9p^3 \\ &= 3p\left(1 - 2p + p^2 + 4p - 4p^2 + 3p^2\right) \\ &= 3p(1+2p).\end{aligned}$$

On se doute donc que la formule à démontrer est :

$$\mathcal{P}'(n) : \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = np(1 + (n-1)p).$$

Démontrons cela par récurrence. L'initialisation est déjà faite. Supposons maintenant que $\mathcal{P}'(n)$ est vraie et démontrons que $\mathcal{P}'(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i^2 B_{n+1,i}(p) &= (n+1)^2 B_{n+1,n+1}(p) + \sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n+1,i}(p) \\ &= (n+1)^2 B_{n+1,n+1}(p) + (1-p)\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) + p\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i-1}(p) \\ &= (n+1) B_{n+1,n+1}(p) + (1-p)\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) + p\sum_{i=1}^{n} i^2 B_{n,i-1}(p) \\ &= (n+1) B_{n+1,n+1}(p) + (1-p)\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) + p\sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 B_{n,i}(p) \\ &= (n+1) B_{n+1,n+1}(p) + (1-p)\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) + p\sum_{i=0}^{n} (i+1)^2 B_{n,i}(p) - p(n+1)^2 B_{n,n}(p) \\ &= (n+1)^2 \left(B_{n+1,n+1}(p) - pB_{n,n}(p)\right) + \sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) + 2p\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) + p\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) \\ &= (n+1)^2\left(p^{n+1} - p^{n+1}\right) + np(1+(n-1)p) + 2np^2 + p \\ &= p(n + n(n-1)p + 2np + 1) \\ &= (n+1)p(1+np)\end{aligned}$$

Remarques sur le calcul : dans la deuxième ligne, on utilise $\sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = \sum_{i=1}^{n} i^2 B_{n,i}(p)$. L'hypothèse de récurrence est utilisée dans l'anté-pénultième ligne, ainsi que le résultat de la question 4 et la formule démontrée ci-dessus pour $\sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p)$.

Conclusion : la formule est vraie pour tout n entier naturel non nul.

Ces sommes probabilistes correspondent à l'espérance d'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres (n,p) et l'espérance du carré de cette variable aléatoire, respectivement. En effet, pour une variable aléatoire X de loi binomiale de paramètres (n,p), on a pour tout entier naturel i compris entre 0 et n :

$$P(X=i) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i (1-p)^{n-i} = B_{n,i}(p).$$

On en déduit donc

$$\sum_{i=0}^{n} P(X=i) = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = 1,$$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} iP(X=i) = \sum_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p) = np,$$

et

$$E\left(X^2\right) = \sum_{i=0}^{n} i^2 P(X=i) = \sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p) = np(1+(n-1)p).$$

Notons qu'on a donc aussi l'expression de la variance de X :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = np(1+(n-1)p) - n^2p^2 = np(1-p).$$

Partie B - Des courbes de Bézier

On munit le plan d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit n un entier naturel. On se donne $n+1$ points non alignés du plan $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n$.

On appelle *courbe de Bézier* de degré n et de points de contrôle $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n$ l'ensemble des points $M(p)$ du plan avec p variant dans l'intervalle $[0; 1]$ tels que

$$\overrightarrow{OM(p)} = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) \overrightarrow{OP_i}.$$

Dans la suite, on va s'intéresser à des courbes de Bézier de degré 0, 1 ou 2.

On se fixe donc A, B, C trois points du plan non alignés.

1. Reconnaître la nature géométrique
   (a) de la courbe de Bézier de degré 0 et de point de contrôle A.
   Correction : soit $p \in [0; 1]$. Le point $M(p)$ vérifie la relation

   $$\overrightarrow{OM(p)} = B_{0,0}(p) \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}.$$

   On en déduit pour tout $p \in [0; 1]$, $M(p) = A$. La courbe est donc réduite au seul point de contrôle A.

   (b) de la courbe de Bézier de degré 1 et de point de contrôle B et C.
   Correction : soit $p \in [0; 1]$. Le point $M(p)$ vérifie la relation

   $$\overrightarrow{OM(p)} = B_{1,0}(p) \overrightarrow{OB} + B_{1,1}(p) \overrightarrow{OC} = (1-p) \overrightarrow{OB} + p\overrightarrow{OC}.$$

   On en déduit :

   $$\overrightarrow{OM(p)} - \overrightarrow{OB} = p\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right)$$
   $$\overrightarrow{BM(p)} = p\overrightarrow{BC}$$

   Les vecteurs $\overrightarrow{BM(p)}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires et $M(p) \in [BC]$ car $p \in [0; 1]$. On en déduit que $M(p)$ décrit le segment $[BC]$ lorsque p varie de 0 à 1.

2. On s'intéresse à la courbe de Bézier de degré 2 et de points de contrôle A, B et C.
   (a) Justifier que les points A et C appartiennent à la courbe. Le point B y appartient-il ?
   Correction : soit $p \in [0; 1]$. Le point $M(p)$ vérifie la relation

   $$\overrightarrow{OM(p)} = B_{2,0}(p) \overrightarrow{OA} + B_{2,1}(p) \overrightarrow{OB} + B_{2,2}(p) \overrightarrow{OC} = (1-p)^2 \overrightarrow{OA} + 2p(1-p) \overrightarrow{OB} + p^2\overrightarrow{OC}.$$

   On remarque que lorsque $p = 0$, on a $\overrightarrow{OM(0)} = \overrightarrow{OA}$ et lorsque $p = 1$, $\overrightarrow{OM(1)} = \overrightarrow{OC}$. On en déduit que $M(0) = A$ et $M(1) = C$, donc A et C sont bien sur la courbe.
   En revanche, si B est sur la courbe, il existe une valeur de $p \in [0; 1]$ telle que

   $$\overrightarrow{OB} = (1-p)^2 \overrightarrow{OA} + 2p(1-p) \overrightarrow{OB} + p^2\overrightarrow{OC}$$
   $$\overrightarrow{0} = (1-p)^2 \overrightarrow{OA} + \left(-2p^2 + 2p - 1\right) \overrightarrow{OB} + p^2\overrightarrow{OC}$$
   $$\overrightarrow{0} = (1-p)^2 \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) + p^2\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right)$$
   $$\overrightarrow{0} = (1-p)^2 \overrightarrow{BA} + p^2\overrightarrow{BC}.$$

   D'après cette relation, comme $(1-p)^2$ et p^2 ne sont pas simultanément nuls, $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Or, A, B et C ne sont pas alignés, donc il y a une contradiction. On en déduit qu'une telle valeur de p n'existe pas et que B n'est pas sur la courbe de Bézier.

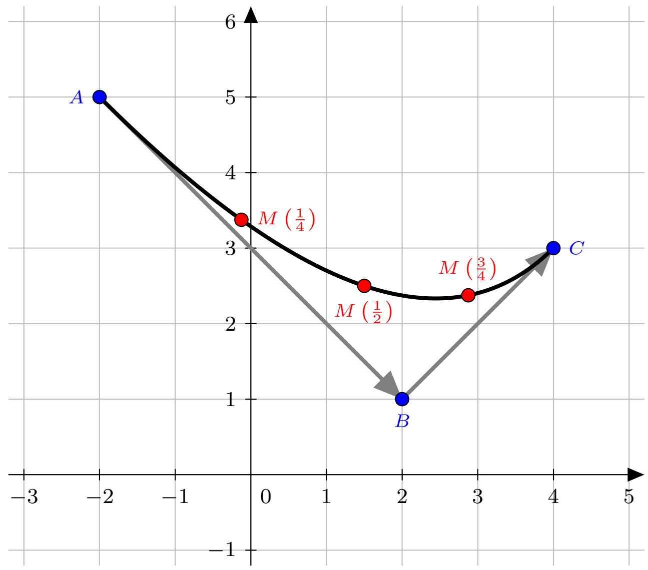
   (b) Dans cette question, on prend les points de coordonnées $A(-2, 5)$, $B(2; 1)$ et $C(4; 3)$. Proposer une construction des points de cette courbe pour $p = \dfrac{1}{4}$, $p = \dfrac{1}{2}$ et $p = \dfrac{3}{4}$. Tracer la courbe à main levée.
   Correction : pour tout $p \in [0; 1]$, soient $(x_M(p); y_M(p))$ les coordonnées du point $M(p)$. On calcule les coordonnées des points $M\left(\frac{1}{4}\right)$, $M\left(\frac{1}{2}\right)$ et $M\left(\frac{3}{4}\right)$:

   $$\begin{cases} x_M\left(\frac{1}{4}\right) & = \frac{9}{16} \times (-2) + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{16} \times 4 = -\frac{1}{8} \\ y_M\left(\frac{1}{4}\right) & = \frac{9}{16} \times 5 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{1}{16} \times 3 = \frac{27}{8} \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_M\left(\frac{1}{2}\right) & = \frac{1}{4}\times(-2)+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{4}\times 4 = \frac{3}{2} \\ y_M\left(\frac{1}{2}\right) & = \frac{1}{4}\times 5+\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{4}\times 3 = \frac{5}{2} \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_M\left(\frac{3}{4}\right) & = \frac{1}{16}\times(-2)+\frac{3}{8}\times 2+\frac{9}{16}\times 4 = \frac{23}{8} \\ y_M\left(\frac{3}{4}\right) & = \frac{1}{16}\times 5+\frac{3}{8}\times 1+\frac{9}{16}\times 3 = \frac{19}{8} \end{cases}.$$

On en déduit les points $M\left(\frac{1}{4}\right)$ de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{8};\dfrac{27}{8}\right)$, $M\left(\frac{1}{2}\right)$ de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ et $M\left(\frac{3}{4}\right)$ de coordonnées $\left(\dfrac{23}{8};\dfrac{19}{8}\right)$. On peut noter que ces points ne sont pas équirépartis entre A et C.



La courbe de Bézier est tracée dans le graphe ci-dessus où ont été ajoutés les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3. Démontrer que cette courbe est nécessairement inscrite dans le triangle ABC.
Correction : pour tout $p \in [0;1]$, les points $M(p)$ obéissent à la relation :

$$\overrightarrow{OM(p)} = (1-p)^2\,\overrightarrow{OA} + 2p(1-p)\,\overrightarrow{OB} + p^2\overrightarrow{OC},$$

donc

$$\overrightarrow{BM(p)} = (1-p)^2\,\overrightarrow{BA} + p^2\overrightarrow{BC},$$

Chaque point $M(p)$ est donc à l'extrémité d'un parallélogramme inclus dans le parallélogramme de supports $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$, car si $p \in [0;1]$, alors $0 \leq p^2 \leq 1$ et $0 \leq (1-p)^2 \leq 1$. D'autre part, définissons un point $P(p)$ tel que

$$\overrightarrow{BP(p)} = (1-p)\,\overrightarrow{BA} + p\overrightarrow{BC}.$$

Alors $P(p)$ décrit une courbe de Bézier de degré 1, de points de contrôle A et C et donc $P(p)$ décrit $[AC]$. On en déduit que le segment $[AC]$ constitue la frontière limite que les points $M(p)$ peuvent atteindre, car si $p \in [0;1]$, alors $p^2 \leq p \leq 1$ et $(1-p)^2 \leq (1-p) \leq 1$. Conclusion : les points $M(p)$ sont tous situés dans le triangle ABC.

4. Quelle pourrait être la nature géométrique de cette courbe de Bézier de degré 2 ? Justifier votre réponse.
Correction : c'est un arc de parabole. En effet, pour tout $p \in [0;1]$, $M(p)$ vérifie la relation :

$$\overrightarrow{OM(p)} = (1-p)^2\,\overrightarrow{OA} + 2p(1-p)\,\overrightarrow{OB} + p^2\overrightarrow{OC},$$

soit

$$\overrightarrow{BM(p)} = (1-p)^2\,\overrightarrow{BA} + p^2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + 2p\overrightarrow{AB} + p^2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right).$$

Notons aussi le vecteur tangent au point $M(p)$, qui est la dérivée par rapport à p du vecteur précédent :

$$\left(\overrightarrow{BM(p)}\right)' = 2\overrightarrow{AB} + 2p\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right).$$

La courbe paramétrée par p est une parabole passant par A (et C), d'axe de symétrie parallèle à $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ et de vecteur $\overrightarrow{AB}$ tangent en A (et de vecteur $\overrightarrow{BC}$ tangent en C). Comme $p \in [0;1]$, l'arc décrit est celui situé entre les points A et C.

Problème II - Un si discret M. Dirichlet

Soit $\mathscr{S}$ un ensemble fini non vide de points du plan.Certaines paires de points de $\mathscr{S}$ sont reliées par des traits, de sorte qu'en suivant ces traits, éventuellement en plusieurs étapes, il est toujours possible depasser d'un point de $\mathscr{S}$ à n'importe quel autre (les intersection éventuelles entre les traits ne sont pas considérées et un point n'est jamais relié à lui-même).

Deux points de $\mathscr{S}$ qui sont reliés sont dits *voisins*.

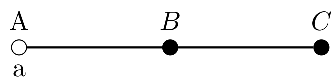
Si M est un point de $\mathscr{S}$, on note $V(M)$ l'ensemble des voisins de M, et on note $d(M)$ le nombre de voisins de M, appelé le *degré* de M.

Chaque point de $\mathscr{S}$ a été colorisé soit en bleu, soit en jaune, et il y a au moins un point jaune dans l'ensemble $\mathscr{S}$. À chaque point jaune, Gustav a attribué un nombre réel de son choix. La mathématicienne Maryam voudrait alors attribuer un nombre réel à chaque point bleu (pas forcément le même nombre d'un point bleu à l'autre) de façon à satisfaire à la propriété $(\mathscr{P})$ suivante :

$(\mathscr{P})$: *Le nombre attribué à tout point bleu est la moyenne des nombres attribués à ses voisins.*

Partie A - Quelques exemples pour commencer

1. Dans cette question uniquement, on suppose que $\mathscr{S} = \{A, B, C\}$ avec A voisin de B, lui-même voisin de C comme dans le dessin ci-dessous :



De plus, A est le seul point jaune et Gustav lui a attribué le réel a.

Quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à B et à C afin de satisfaire la propriété $(\mathscr{P})$?

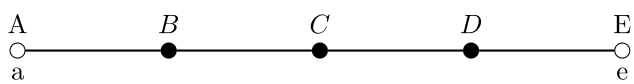
Correction : notons b le nombre attribué à B et c le nombre attribué à c. La propriété $(\mathscr{P})$ nous impose les 2 relations suivantes :

$$\begin{cases} 2b &= a + c \\ c &= b \end{cases}.$$

On en déduit que $2b = a + c = a + b$ et donc $b = c = a$.

2. Pour les trois questions suivantes, on suppose que $\mathscr{S} = \{A, B, C, D, E\}$. Les points A et E sont les seuls points jaunes, et Gustav leur a attribué respectivement les réels a et e.

(a) Les liaisons étant indiquées selon le schéma suivant, quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à chacun des points B, C et D afin de satisfaire la propriété $(\mathscr{P})$?



Correction : notons b, c, d les nombres attribués respectivement à B, C, D. La propriété $(\mathscr{P})$ nous impose les 3 relations suivantes :

$$\begin{cases} 2b &= a + c \\ 2c &= b + d \\ 2d &= c + e \end{cases},$$

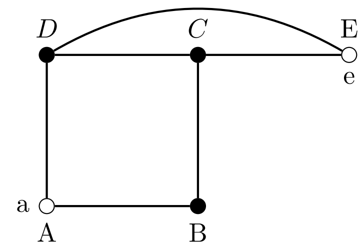
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b &= 2a + 2c \\ 4c &= 2b + 2d = a + 2c + e \\ 4d &= 2c + 2e \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b &= 3a + e \\ 2c &= a + e \\ 4d &= a + 3e \end{cases},$$

On en déduit :

$$\begin{cases} b &= \frac{3a+e}{4} \\ c &= \frac{a+e}{2} \\ d &= \frac{a+3e}{4} \end{cases}.$$

(b) Même question pour le schéma suivant :



Correction : notons b, c, d les nombres attribués respectivement à B, C, D. La propriété ($\mathscr{P}$) nous impose les 3 relations suivantes :

$$\begin{cases} 2b &= a+c \\ 3c &= b+d+e \\ 3d &= a+c+e \end{cases},$$

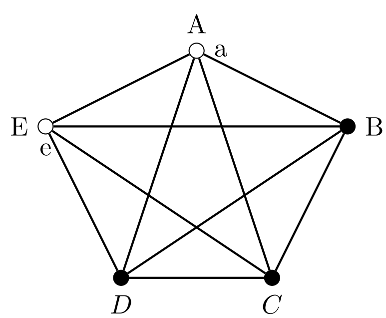
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b &= a+c \\ 18c &= 6b+6d+6e = 5a+5c+8e \\ 3d &= a+c+e \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 26b &= 18a+8e \\ 13c &= 5a+8e \\ 39d &= 18a+21e \end{cases}.$$

On en déduit :

$$\begin{cases} b &= \frac{9a+4e}{13} \\ c &= \frac{5a+8e}{13} \\ d &= \frac{6a+7e}{13} \end{cases}.$$

(c) Même question pour le schéma suivant :



Correction : notons b, c, d les nombres attribués respectivement à B, C, D. La propriété ($\mathscr{P}$) nous impose les 3 relations suivantes :

$$\begin{cases} 4b &= a+c+d+e \\ 4c &= a+b+d+e \\ 4d &= a+b+c+e \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5b &= a+b+c+d+e \\ 5c &= a+b+c+d+e \\ 5d &= a+b+c+d+e \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5b &= a+b+c+d+e \\ 5b &= 5c \\ 5c &= 5d \end{cases}.$$

On en déduit $b=c=d$ et la première équation nous donne alors $2b=a+e$. Finalement,

$$\begin{cases} b &= \frac{a+e}{2} \\ c &= \frac{a+e}{2} \\ d &= \frac{a+e}{2} \end{cases}.$$

3. Dans cette question uniquement, on généralise le schéma de la question 2-(c) avec un nombre quelconque de points. On suppose que $n \geq 1$ est un entier, que $\mathscr{S} = \{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}\}$ et que tout point de $\mathscr{S}$ est voisin de chaque point de $\mathscr{S}$. De plus, P_0 et P_{n+1} sont les seuls points jaunes, et Gustav leur a attribué respectivement les réels a et b. Quels nombres Maryam doit-elle alors attribuer à chacun des points P_i pour $i=1,\ldots,n$ afin de satisfaire la propriété $(\mathscr{P})$?
Correction : notons $x_1,\ldots,x_n$ les nombres attribués respectivement aux points $P_1,\ldots,P_n$. La propriété $(\mathscr{P})$ nous impose les n relations suivantes :

$$\begin{cases} (n+1)\,x_1 &= a+b+\sum_{i=1}^n x_i - x_1 \\ (n+1)\,x_2 &= a+b+\sum_{i=1}^n x_i - x_2 \\ & \vdots \\ (n+1)\,x_n &= a+b+\sum_{i=1}^n x_i - x_n \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (n+2)\,x_1 &= a+b+\sum_{i=1}^n x_i \\ (n+2)\,x_2 &= a+b+\sum_{i=1}^n x_i \\ & \vdots \\ (n+2)\,x_n &= a+b+\sum_{i=1}^n x_i \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (n+2)\,x_1 &= a+b+\sum_{i=1}^n x_i \\ (n+2)\,x_1 &= (n+2)\,x_2 \\ & \vdots \\ (n+2)\,x_{n-1} &= (n+2)\,x_n \end{cases}.$$

On en déduit que les x_i sont tous égaux pour $i=1,\ldots,n$ et la première équation nous donne alors $2x_1=a+b$. Dans le cas où tous les points sont voisins l'un de l'autre, tous les points bleus ont donc le même nombre attribué qui est la moyenne de a et b.

Partie B - Étude du cas général

On note respectivement $\mathscr{J}$ l'ensemble des points jaunes, et $\mathscr{B}$ l'ensemble des points bleus. Ainsi,

$$\mathscr{S} = \mathscr{J} \cup \mathscr{B}.$$

Quand Gustav attribue un nombre réelà chaque point jaune, cela consiste à définir une fonction k de $\mathscr{J}$ dans $\mathbb{R}$.

L'objectif de Maryam est donc de construire une fonction $f : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f(M) = k(M) \quad \text{si } M \text{ est jaune (1)} \\ f(M) = \dfrac{f(P_1)+\cdots+f(P_d)}{d} \quad \text{si } M \text{ est bleu (2)} \\ \text{où } d = d(M) \text{ est le degré de } M \text{ (qui dépend de } M\text{) et } P_1,\ldots,P_d \text{ les voisins de } M. \end{cases}$$

On dira alors que f est une solution *pour l'attribution* k.

Dans cette partie, on suppose donc donnée une telle attribution k.

On note K le plus grand $k(M)$ lorsque k décrit l'ensemble $\mathscr{J}$.

Existence d'une solution

1. On suppose dans cette partie que $k(M) \geq 0$ pour tout point $M \in \mathscr{J}$. On construit alors, par récurrence, la suite de fonctions (f_n) suivante :
On pose $f_0(M) = k(M)$ si M est jaune, $f_0(M) = 0$ si M est bleu.
Puis, pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$\begin{cases} f_{n+1}(M) = k(M) \quad \text{si } M \text{ est jaune,} \\ f_{n+1}(M) = \dfrac{f_n(P_1)+\cdots+f_n(P_d)}{d} \quad \text{si } M \text{ est bleu,} \\ \text{où } d = d(M) \text{ est le degré de } M \text{ (qui dépend de } M\text{) et } P_1,\ldots,P_d \text{ les voisins de } M. \end{cases}$$

(a) Prouver que pour tout $n \geq 0$ et pour tout point $M \in \mathscr{S}$, on a $0 \leq f_n(M) \leq f_{n+1}(M) \leq K$.
Correction : c'est vrai pour $M \in \mathscr{J}$, car $k(M) = f_n(M) = f_{n+1}(M)$ et $0 \leq k(M) \leq K$.
Pour $M \in \mathscr{B}$, prouvons par récurrence l'assertion $\mathscr{A}(n)$: « pour tout $M \in \mathscr{B}$, $0 \leq f_n(M) \leq f_{n+1}(M) \leq K$ ».
C'est vrai pour $n = 0$ car f_0 est nulle sur $\mathscr{B}$ et $f_1(M) \leq K$ car pour tout $M \in \mathscr{S}$, $0 \leq f_0(M) \leq K$. On a donc bien pour tout $M \in \mathscr{B}$, $0 \leq f_0(M) \leq f_1(M) \leq K$.
Supposons vraie au rang n l'assetion $\mathscr{A}(n)$. Alors

$$f_{n+2}(M) = \frac{f_{n+1}(P_1) + \cdots + f_{n+1}(P_d)}{d} \geq \frac{f_n(P_1) + \cdots + f_n(P_d)}{d} = f_{n+1}(M),$$

car pour tout $M \in \mathscr{B}$, $f_n(M) \leq f_{n+1}(M)$ par hypothèse de récurrence. D'autre part,

$$f_{n+2}(M) = \frac{f_{n+1}(P_1) + \cdots + f_{n+1}(P_d)}{d} \leq K,$$

car pour tout $M \in \mathscr{B}$, $f_{n+1}(M) \leq K$ par hypothèse de récurrence. Enfin, comme $f_{n+1}(M) \geq 0$, on a bien $0 \leq f_{n+1}(M) \leq f_{n+2}(M) \leq K$ et par récurrence, l'assertion $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

(b) En déduire l'existence d'une solution pour l'attribution K.
Correction : pour tout point $M \in \mathscr{S}$, la suite $(f_n(M))$ est croissante et majorée, donc elle converge. Soit f la fonction qui à chaque point $M \in \mathscr{S}$ associe la limite de la suite $(f_n(M))$. Alors, f sera une solution pour l'attribution k. En effet,

$$\begin{cases} f(M) = k(M) \quad \text{si } M \text{ est jaune, car la suite } (f_n(M)) \text{ est constante sur } \mathscr{J}, \\ f(M) = \dfrac{f(P_1) + \cdots + f(P_d)}{d} \quad \text{si } M \text{ est bleu, par linéarité de la limite.} \end{cases}$$

2. Prouver que si f est une solution pour l'attribution k et si α est une constante, alors $f + \alpha$ est aussi une solution pour l'attribution $k + \alpha$.
Correction : c'est déjà vrai pour $M \in \mathscr{J}$ par définition. D'autre part, pour tout point $M \in \mathscr{B}$, par linéarité de la moyenne :
$$f(M) + \alpha = \frac{f(P_1) + \cdots + f(P_d)}{d} + \alpha = \frac{(f(P_1) + \alpha) + \cdots + (f(P_d) + \alpha)}{d}.$$
On en déduit que $f + \alpha$ est bien solution pour l'attribution $k + \alpha$.

3. En déduire qu'il existe une solution à notre problème en général, c'est-à-dire sans l'hypothèse de la question 1° : $k(M) \geq 0$ pour tout point $M \in \mathscr{J}$.
Correction : si la valeur minimale de k sur $\mathscr{J}$ (notons-la β) est négative, on peut ajouter la valeur absolue $|\beta|$ de la valeur minimale à l'attribution pour retrouver une attribution $k + |\beta|$ à valeurs positives. La solution f pour cette attribution existe, et il suffit de retrancher à nouveau cette valeur pour obtenir une solution $f - |\beta|$ pour l'attribution initiale k.

Unicité de la solution

On suppose dans cette sous-partie que l'on dispose d'une solution f pour cette attribution k.

4. Prouver que pour tout point $M \in \mathscr{S}$, on a $f(M) \leq K$.
Correction : c'est déjà vrai pour $M \in \mathscr{J}$ par définition. D'autre part, pour tout point $M \in \mathscr{B}$:

$$f(M) = \frac{f(P_1) + \cdots + f(P_d)}{d} \leq \max(f(P_0), \ldots, f(P_d)).$$

Supposons qu'il existe un point $M \in \mathscr{B}$ tel que $f(M) > K$. Alors selon l'inégalité précédente, si l'un des voisins de M a une attribution inférieure à K, il faut qu'au moins un de ses voisins soit aussi strictement supérieur à $f(M)$ (ce voisin existe car les points de $\mathscr{B}$ ne peuvent pas être isolés). Comme les points jaunes ont une valeur inférieure ou égale à K, on en déduit qu'il existe une chaîne de valeurs croissantes entre un point jaune (de valeur attribuée inférieure à K) et le point M. D'après ce qui précède, il existe un voisin de valeur strictement supérieure à $f(M)$. On peut ainsi parcourir une chaîne croissante de valeurs attribuées. Comme l'ensemble des points est fini, on ne peut pas parcourir indéfiniment de voisin en voisin de cette manière ; il y a donc contradiction. On en déduit que $f(M) \leq K$ pour tout $M \in \mathscr{B}$.

5. Supposons que g soit également une solution pour l'attribution k.
   (a) Justifier que la fonction $f-g$ vérifie la condition (2).
   Correction : cela découle de la linéarité de la moyenne. Pour tout point $M \in \mathscr{B}$:
   $$f(M)-g(M)=\frac{f(P_1)+\cdots+f(P_d)}{d}-\frac{g(P_1)+\cdots+g(P_d)}{d}=\frac{(f(P_1)-g(P_1))+\cdots+(f(P_d)-g(P_d))}{d}.$$
   (b) Que vaut $f-g$ sur $\mathscr{J}$?
   Correction : comme $f(M)=g(M)=k(M)$ sur $\mathscr{J}$, $f-g$ est la fonction nulle sur $\mathscr{J}$.
   (c) En déduire que $f=g$.
   Correction : on note que $f-g$ et $g-f$ vérifient la condition (2). Comme ces deux fonctions sont nulles sur $\mathscr{J}$, on en déduit que pour tout $M \in \mathscr{J}$, $k(M)=K=0$, c'est-à-dire qu'elles ont la même attribution nulle. Comme d'après la question 4, pour tout point $M \in \mathscr{S}$, on a $f(M)-g(M) \leq K$ et $g(M)-f(M) \leq K$, on en déduit que $f-g$ est nulle sur $\mathscr{S}$, c'est-à-dire que $f=g$.
6. Que peut-on dire de f s'il n'y a qu'un seul point jaune ?
   Correction : s'il n'y a qu'un seul point jaune d'attribution K, alors la fonction constante $f=K$ est une solution pour cette attribution. Par unicité, c'est la seule solution. On en déduit qu'il faut attribuer le nombre K à tous les points de $\mathscr{B}$.

Problème III - Les nombres en or

On note φ la plus grande racine réelle de l'équation $x^2 = x + 1$. Le nombre φ, connu depuis l'Antiquité, est appelé *nombre d'or*. Un réel x est dit un *nombre en or* s'il existe :

— Deux entiers naturels p et q

— des entiers $a_p, a_{p-1}, \ldots, a_0, \ldots, a_{-q}$ ne prenant que les valeurs 0 et 1 tels que

$$x = a_p\varphi^p + a_{p-1}\varphi^{p-1} + \cdots + a_1\varphi + a_0 + a_{-1}\varphi^{-1} + \cdots + a_{-q}\varphi^{-q}.$$

Dans ce cas, on notera $x \triangleright a_p a_{p-1} \ldots a_0, a_{-1} \ldots a_{-q}$.

Par exemple si $x = \varphi^3 + \varphi^2 + 1 + \dfrac{1}{\varphi} + \dfrac{1}{\varphi^4}$, on notera $x \triangleright 1101, 1001$. On dira que alors 1101,1001 est une *représentation en or* de x.

Il est clair que l'on peut rajouter, au début ou à la fin de la représentation, autant de 0 que l'on souhaite.

Une séquence de la représentation est une suite de 0 et de 1 qui apparaît dans la représentation. Dans l'exemple précédent, 10110 est une séquence de la représentation 1**101**,**10**01.

Partie A - Tous les entiers naturels sont en or

1. Montrer que, dans la représentation en or de x, on peut remplacer toute séquence 011 par 100 et réciproquement afin d'obtenir une autre représentation en or de x.

   Par exemple le réel dont la représentation en or est 1101,1001 admet également 1110,0001 et 1101,0111 comme représentation en or.

   On dira que les deux séquences 011 et 100 sont équivalentes.

   Correction : si 011 est une séquence dans la représentation de x, alors elle est de la forme $\varphi^k(\varphi + 1)$ pour un certain entier relatif k. Or, $\varphi^2 = \varphi + 1$, donc cette séquence peut aussi s'écrire $\varphi^k\varphi^2$, ce qui correspond bien à la séquence 100.

2. Plus généralement, donner une séquence dans laquelle il n'y a jamais deux 1 consécutifs et qui soit équivalente à $011\cdots1$ où il y a n occurences du chiffre 1.

   Correction : on applique l'équivalence 011$\leftrightarrow$100 plusieurs fois de suite, de gauche à droite. Par exemple pour la séquence 011111 :

   $$011111 \leftrightarrow 100111 \leftrightarrow 101001.$$

   On a donc la séquence $011\cdots1$ de taille $n+1$ équivalente à $1010\cdots100$ si n est pair et $1010\cdots1001$ si n est impair. Les premières chaînes de taille 3 à 7 et leurs chaînes équivalentes sont exposées ci-dessous :

   $$011 \leftrightarrow 100$$
   $$0111 \leftrightarrow 1001$$
   $$01111 \leftrightarrow 10100$$
   $$011111 \leftrightarrow 101001$$
   $$0111111 \leftrightarrow 1010100$$

3. Montrer que les entiers 2 et 3 sont des nombres en or et en donner une représentation en or.

   Correction : comme $\varphi^2 = \varphi + 1$, on a $\varphi^2 + \varphi + 1 = 2\varphi^2$. On en déduit

   $$2 = 1 + \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2},$$

   c'est-à-dire $2 \triangleright 1, 11$.

   D'après l'équivalence 0111$\leftrightarrow$1001, on a aussi $2 \triangleright 10, 01$. On en déduit :

   $$3 = 2 + 1 = \varphi + 1 + \frac{1}{\varphi^2},$$

   ou encore $3 \triangleright 11, 01$.

4. Montrer que tous les entiers naturels admettent une représentation en or.

   Correction : donnons une preuve constructive. Supposons qu'on veuille obtenir la décomposition de n. Appliquons la division euclidienne de n par 2 : $n = 2p + q$, avec p un entier naturel et $q \in \{0; 1\}$.

   — Ajouter p aux rangs 1 et -2.

   — Remplacer le chiffre au rang 0 par q.

   — Pour chaque chiffre c différent de 0 ou 1, de gauche à droite, notons k son rang.

     (a) Effectuer la division euclidienne de c par 2 : $c = 2p' + q'$ avec p' entier, $q' \in \{0; 1\}$.

     (b) Ajouter p' aux rangs $k + 1$ et $k - 2$. Remplacer c au rang k par q'.

     (c) Recommencer les deux étapes précédentes tant qu'il reste des chiffres dans la décomposition qui ne sont pas des 0 ou des 1.

   L'étape (b) correspond à la division euclidienne par 2, en utilisant l'équivalence 0200↔1001 (ne pas oublier d'ajouter les séquences trouvées entre elles si elles se recouvrent). Par exemple, avec $x = 9$:

$$
\begin{aligned}
9 &\rhd 41{,}04\\
9 &\rhd 201{,}4002\\
9 &\rhd 1004{,}003001\\
9 &\rhd 1020{,}031011\\
9 &\rhd 1100{,}211111\\
9 &\rhd 1101{,}012111\\
9 &\rhd 1101{,}020121\\
9 &\rhd 1101{,}1003011\\
9 &\rhd 1101{,}1011021\\
9 &\rhd 1101{,}10111011
\end{aligned}
$$

   On vérifie $\varphi^3 + \varphi^2 + 1 + \varphi^{-1} + \varphi^{-3} + \varphi^{-4} + \varphi^{-5} + \varphi^{-7} + \varphi^{-8} = 9$. Cette méthode se déroule en un nombre fini d'étapes par propriété de l'algorithme d'Euclide.

Partie B - Représentation en or pur

On dira qu'une représentation $x \rhd a_p a_{p-1} \dots a_0, a_{-1} \dots a_{-q}$ d'un nombre en or est *en or pur* si pour tout i,

$$a_i a_{i+1} = 0.$$

En d'autre termes, une représentation de x est en or pur si elle ne contient jamais deux 1 consécutifs.

Soit x un réel non nul, si $x \rhd a_p a_{p-1} \dots a_0, a_{-1} \dots a_{-q}$, on définit la *teneur en or* de la représentation comme étant égale à l'exposant de la plus grande puissance de φ dont le coefficient vaut 1, dans l'égalité $a_p\varphi^p + \dots + a_{-q}\varphi^{-q}$.

Par exemple la teneur de la représentation 1101,1001 est égale à 3 et celle de 0,0010 est égale à -3.

1. Donner une représentation en or pur des entiers 2,3,4 et 5.

   Correction : on a déjà vu $2 \rhd 10,01$. Comme $3 \rhd 11,01$, on a donc $3 \rhd 100,01$ en utilisant l'équivalence 011↔100. En écrivant $4 = 3 + 1$, on en déduit $4 \rhd 101,01$.

   Pour 5, on utilise la méthode de la question 4 de la partie A,

$$
\begin{aligned}
5 &\rhd 21,02\\
5 &\rhd 101,2001\\
5 &\rhd 102,0011\\
5 &\rhd 110,0111
\end{aligned}
$$

   donc $5 \rhd 110,0111$ et en utilisant les équivalences 011↔100 et 0111↔1001, $5 \rhd 1000,1001$. En résumé :

$$
\begin{aligned}
2 &\rhd 10,01\\
3 &\rhd 100,01\\
4 &\rhd 101,01\\
5 &\rhd 1000,1001
\end{aligned}
$$

2. Soit x un réel ayant une représentation en or pur de teneur en or égale à n.
   (a) Montrer que
$$\varphi^n \leq x < \varphi^{n+1}.$$
Correction : on note que x doit être strictement positif s'il possède une représentation en or, car alors il est somme de nombres positifs. D'abord, $x \geq \varphi^n$, car on sait que le coefficient devant φ^n est 1. Comme le reste de la représentation est positif ou nul (somme de puissances de φ avec des coefficients de 0 ou 1), on arrive au résultat. D'autre part, comme x admet une représentation en or pur de teneur n, il existe un entier m tel que
$$x \leq \sum_{k=0}^{m} \varphi^{n-2k},$$
car la représentation ne peut pas avoir deux 1 consécutifs. Or, en utilisant la formule pour une somme géométrique,
$$\sum_{k=0}^{m} \varphi^{n-2k} = \varphi^n \sum_{k=0}^{m} \left(\varphi^{-2}\right)^k = \varphi^n \frac{1-\left(\varphi^{-2}\right)^{m+1}}{1-\varphi^{-2}} = \varphi^n \varphi \left(1-\varphi^{-2m-2}\right) = \varphi^{n+1} - \varphi^{n-2m-1} < \varphi^{n+1}.$$
on en déduit que $x < \varphi^{n+1}$.
   (b) Montrer que la représentation en or pur d'un réel, si elle existe, est unique.
Correction : supposons qu'un réel x ait deux représentations en or pur. Les teneurs des deux représentations sont égales car sinon on ne peut pas avoir simultanément $\varphi^m \leq x < \varphi^{m+1}$ et $\varphi^n \leq x < \varphi^{n+1}$ pour $m \neq n$. Le premier coefficient non nul des deux représentations est donc au même rang.
Mais alors $x - \varphi^n$ admet aussi deux représentations en or pur de même teneur, par l'argument précédent. On en déduit que le second coefficient non nul des représentations est au même rang pour les deux représentations. En continuant l'opération selon une récurrence finie, on en déduit que tous les coefficients non nuls des deux représentations de x sont aux même rangs, donc qu'elles sont égales.
3. Soit x un réel non nul ayant une représentation en or pur.
   (a) Exprimer la teneur en or de la représentation en or pur de x à l'aide des fonctions logarithme népérien et partie entière.
Correction : comme $\varphi^n \leq x < \varphi^{n+1}$ et la fonction logarithme népérien est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit $n \ln\varphi \leq \ln x < (n+1)\ln\varphi$. Ainsi, en notant $\lfloor a \rfloor$ la partie entière d'un réel a :
$$n = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln\varphi} \right\rfloor.$$
(ou encore $n = \lfloor \log_\varphi x \rfloor$, si on note $\log_\varphi$ le logarithme de base φ)
   (b) Écrire un algorithme permettant de déterminer cette représentation.
Correction : comme la teneur en or de x est $n = \lfloor \ln x / \ln\varphi \rfloor$, on en déduit que la teneur en or de $x - \varphi^n$ est $n' = \lfloor \ln\left(x - \varphi^n\right) / \ln\varphi \rfloor$. On peut donc écrire l'algorithme suivant (ici en langage algobox) :

```
VARIABLES
  x EST˙DU˙TYPE NOMBRE
  n EST˙DU˙TYPE NOMBRE
  S EST˙DU˙TYPE NOMBRE
  phi EST˙DU˙TYPE NOMBRE
DEBUT˙ALGORITHME
  phi PREND˙LA˙VALEUR (1 + sqrt(5)) / 2
  LIRE x
  TANT˙QUE (x ¿ 0) FAIRE
    DEBUT˙TANT˙QUE
    n PREND˙LA˙VALEUR floor(log(x) / log(phi))
    x PREND˙LA˙VALEUR x - pow(phi,n)
    S PREND˙LA˙VALEUR S + pow(10,n)
    FIN˙TANT˙QUE
  AFFICHER S
FIN˙ALGORITHME
```

Le nombre en sortie S sera la décomposition en or pur de x. On note que cet algorithme peut très bien ne pas terminer si x n'admet pas de représentation en or pur !

4. Appliquer votre algorithme pour $x = 2018$.
Correction : en appliquant l'algorithme de la question précédente, on trouve les rangs successifs pour les coefficients non nuls de la représentation en or pur de 2018.

$$\left\lfloor \frac{\ln 2018}{\ln \varphi} \right\rfloor = 15,$$

$$\left\lfloor \frac{\ln \left(2018 - \varphi^{15}\right)}{\ln \varphi} \right\rfloor = 13,$$

$$\left\lfloor \frac{\ln \left(2018 - \varphi^{15} - \varphi^{13}\right)}{\ln \varphi} \right\rfloor = 10,$$

$$\left\lfloor \frac{\ln \left(2018 - \varphi^{15} - \varphi^{13} - \varphi^{10}\right)}{\ln \varphi} \right\rfloor = 4,$$

$$\left\lfloor \frac{\ln \left(2018 - \varphi^{15} - \varphi^{13} - \varphi^{10} - \varphi^{4}\right)}{\ln \varphi} \right\rfloor = 2,$$

$$\left\lfloor \frac{\ln \left(2018 - \varphi^{15} - \varphi^{13} - \varphi^{10} - \varphi^{4} - \varphi^{2}\right)}{\ln \varphi} \right\rfloor = -2,$$

$$\left\lfloor \frac{\ln \left(2018 - \varphi^{15} - \varphi^{13} - \varphi^{10} - \varphi^{4} - \varphi^{2} - \varphi^{-2}\right)}{\ln \varphi} \right\rfloor = -4,$$

$$\left\lfloor \frac{\ln \left(2018 - \varphi^{15} - \varphi^{13} - \varphi^{10} - \varphi^{4} - \varphi^{2} - \varphi^{-2} - \varphi^{-4}\right)}{\ln \varphi} \right\rfloor = -11,$$

$$\left\lfloor \frac{\ln \left(2018 - \varphi^{15} - \varphi^{13} - \varphi^{10} - \varphi^{4} - \varphi^{2} - \varphi^{-2} - \varphi^{-4} - \varphi^{-11}\right)}{\ln \varphi} \right\rfloor = -16,$$

et $\varphi^{15}+\varphi^{13}+\varphi^{10}+\varphi^{4}+\varphi^{2}+\varphi^{-2}+\varphi^{-4}+\varphi^{-11}+\varphi^{-16} = 2018$, ou encore $2018 \triangleright 1010010000010100,0101000000100001$.

5. Montrer qu'un réel en or possède forcément une représentation en or pur.
Correction : il suffit de remplacer, en commençant par la droite et de droite à gauche, les séquences $01\cdots1$ de 1 consécutifs par leur séquence équivalente $1010\cdots100$ ou $1010\cdots1001$. Ces séquences n'ayant pas de 1 consécutifs, on obtient donc une représentation en or pur.
Par exemple, en transformant les séquences encadrées par leurs séquences équivalentes en bleu :

$$\begin{aligned}
&0101110101111\boxed{011}\\
\leftrightarrow\,&01011101\boxed{011111}00,\\
\leftrightarrow\,&010111\boxed{011}0100100,\\
\leftrightarrow\,&01\boxed{01111}000100100,\\
\leftrightarrow\,&\boxed{011}0100000100100,\\
\leftrightarrow\,&1000100000100100.
\end{aligned}$$

6. Montrer qu'il existe des réels strictement positifs qui ne sont pas en or.
Correction : on peut montrer que tout nombre en or peut s'écrire :

$$a + b\sqrt{5},$$

où a et b sont des nombres rationnels. En effet, comme $\varphi^2 = \varphi + 1$, toute puissance (positive ou négative) de φ peut s'écrire de la forme $p\varphi + q$, où p et q sont des entiers relatifs, et on a $\varphi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$.
Comme les nombres transcendants (comme e et π) ne peuvent pas être écrits de cette manière, e et π sont des exemples de réels strictement positifs n'admettant pas de représentation en or. C'est aussi le cas de $\sqrt{p}$, où p est un nombre premier différent de 5.