

## CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2003

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

*Le problème comporte deux questions préliminaires dont les résultats sont utiles tout au long du problème, et cinq parties ; les quatre premières sont très largement indépendantes les unes des autres. Il n'est donc pas obligatoire de traiter systématiquement les questions dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement la question traitée en respectant l'indexation du texte.*

*De même, pour poursuivre, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*

Le problème étudie des configurations du plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On pourra aussi se placer dans le plan complexe associé,  $i$  étant l'affixe du point de coordonnées  $(0, 1)$ .

On appelle **triangle** tout ensemble de **trois points non alignés** du plan.

### Questions préliminaires

1. Soit  $ABC$  un triangle et  $M$  un point quelconque du plan. Montrer que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

En déduire que les trois hauteurs du triangle  $ABC$  sont concourantes en un point  $H$  appelé **orthocentre** de ce triangle.

2. Soit  $ABC$  un triangle,  $\Omega$  le centre de son cercle circonscrit et  $H$  le point tel que  $\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$ . Démontrer que  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

Étant donnée une partie  $X$  du plan, supposée non incluse dans une droite, on note  $\mathcal{H}(X)$  l'ensemble des orthocentres des triangles dont les sommets appartiennent à  $X$ .

On dira qu'une partie  $X$  du plan est **orthocentrique** si elle n'est pas incluse dans une droite et si  $\mathcal{H}(X)$  est inclus dans  $X$ , c'est-à-dire si tout orthocentre d'un triangle de points de  $X$  appartient à  $X$ .

### Première partie

- Déterminer les parties orthocentriques à 3 éléments.
- Déterminer les parties orthocentriques à 4 éléments.
- Soit  $X$  un ensemble de quatre points d'un cercle et  $Y = \mathcal{H}(X)$ .
  - Montrer que  $Y$  se déduit de  $X$  par une transformation simple.
  - Déterminer  $\mathcal{H}(Y)$ .
- Soit  $\Gamma$  un cercle de rayon strictement positif ; déterminer  $\mathcal{H}(\Gamma)$ .
  - Soit  $D$  un disque de rayon strictement positif ; déterminer  $\mathcal{H}(D)$ .

### Deuxième partie

Dans cette partie,  $R$  est un nombre réel strictement positif,  $n$  est un entier au moins égal à 2 et  $X$  est l'ensemble des  $2n$  sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

On considère l'ensemble  $\mathcal{T}$  des triangles dont les sommets appartiennent à  $X$ . On choisit au hasard, avec équiprobabilité, un élément de  $\mathcal{T}$ .

- Quelle est la probabilité de choisir un triangle rectangle ?
- Quelle est la probabilité de choisir un triangle dont les trois angles sont aigus ?
- On note  $L$  la variable aléatoire qui à tout élément de  $\mathcal{T}$  associe le carré de la distance de  $O$  à son orthocentre. Déterminer, en fonction de  $n$  et  $R$ , l'espérance de la variable aléatoire  $L$ .

### Troisième partie

- Soit  $a, b, c$  trois réels tels que  $a(b - c) \neq 0$  et  $A, B, C$  les points de coordonnées respectives  $(0, a), (b, 0), (c, 0)$ . Calculer les coordonnées de l'orthocentre  $D$  du triangle  $ABC$ .
- Soit  $X$  la partie obtenue en prenant la réunion d'une droite  $\Delta$  et d'un point  $M$  n'appartenant pas à  $\Delta$ . Déterminer  $\mathcal{H}(X)$ . Montrer que  $\mathcal{H}(X) \cup X$  est une partie orthocentrique.
- Soit  $X$  une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes  $(O, \vec{u})$  et  $(O, \vec{v})$  et contenant au moins trois points de  $(O, \vec{u})$  distincts de  $O$ .
  - Montrer que  $X$  contient au moins trois points de  $(O, \vec{u})$  d'abscisses non nulles et de même signe.
  - Montrer que  $X$  contient au moins trois points de  $(O, \vec{u})$  d'abscisses strictement positives.
- Déterminer les parties orthocentriques finies, contenant au plus cinq points et incluses dans la réunion des axes  $(O, \vec{u})$  et  $(O, \vec{v})$ .

b) Soit  $X$  une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes  $(O, \vec{u})$  et  $(O, \vec{v})$  et contenant au moins six points. Montrer qu'il existe deux suites  $(x_n)$  et  $(x'_n)$  de réels non nuls telles que, pour tout entier  $n$ , les points de coordonnées  $(x_n, 0)$  et  $(x'_n, 0)$  appartiennent à  $X$ , et telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0.$$

Une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes  $(O, \vec{u})$  et  $(O, \vec{v})$  et contenant au moins six points peut-elle être finie ?

### Quatrième partie

*L'objectif de cette partie est la construction de parties orthocentriques remarquables.*

1. Soit  $k$  un réel non nul et soit  $Y$  l'hyperbole d'équation  $xy = k$ .

a) Soit  $A, B, C, D$  quatre points distincts de  $Y$ , d'abscisses respectives  $a, b, c, d$ . Montrer que  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont orthogonaux si et seulement si  $abcd = -k^2$ .

b) Soit  $A, B, C$  trois points distincts de  $Y$ , d'abscisses respectives  $a, b, c$ . Déterminer l'orthocentre de  $ABC$ .

c) Montrer que  $Y$  est orthocentrique.

*Dans toute la suite de la quatrième partie, on considère un entier relatif non nul  $q$  et on note  $X$  l'ensemble d'équation  $x^2 + qxy - y^2 = 1$ .*

2. a) Montrer que l'équation  $t^2 - qt - 1$  possède deux racines réelles distinctes. Montrer que ces racines sont irrationnelles.

*Dans toute la suite de la quatrième partie, on note  $r$  et  $r'$  ces deux racines et  $s$  la similitude définie par la représentation complexe  $z \mapsto (1 - ri)z$ .*

b) Montrer que  $s(X)$  est une hyperbole, d'équation  $xy = k$ , où  $k$  est un réel à déterminer. En déduire que  $X$  est un ensemble orthocentrique.

3. Soit  $G$  l'ensemble des points de  $X$  à coordonnées entières et  $\Gamma$  l'ensemble des abscisses des éléments de  $s(G)$ .

a) Vérifier que  $\Gamma$  est l'ensemble des nombres réels de la forme  $x + ry$ , où  $x$  et  $y$  sont deux entiers tels que  $(x + ry)(x + r'y) = 1$ .

b) Montrer que  $-1 \in \Gamma$  ; montrer que  $r^2 \in \Gamma$ .

c) Montrer que le produit de deux éléments de  $\Gamma$  est élément de  $\Gamma$  et que l'inverse d'un élément de  $\Gamma$  est élément de  $\Gamma$ . Montrer que  $\Gamma$  possède une infinité d'éléments.

4. Déduire de ce qui précède que l'ensemble  $G$  des points à coordonnées entières de  $X$  est une partie orthocentrique infinie.

### Cinquième partie

On note  $Y_1$  l'hyperbole d'équation  $xy = 1$  et  $Y_0$  l'ensemble d'équation  $xy = 0$ , c'est-à-dire la réunion des axes  $(O, \vec{u})$  et  $(O, \vec{v})$ .

On admet le résultat suivant :

« Étant donnés quatre points  $A, B, C$  et  $D$  du plan, il existe une similitude  $s$  telle que  $s(A), s(B), s(C)$  et  $s(D)$  appartiennent tous à  $Y_1$  ou bien appartiennent tous à  $Y_0$  ».

Soit  $A_0, B_0, C_0$  et  $D_0$  quatre points, trois à trois non alignés, et soit  $X_0 = \{A_0, B_0, C_0, D_0\}$ .

On définit par récurrence  $X_{n+1} = \mathcal{H}(X_n)$  pour tout entier naturel  $n$ . On suppose qu'il existe un entier  $n$  strictement positif tel que  $X_n = X_0$  et on note  $m$  le plus petit entier ayant cette propriété.

1. Montrer que  $m = 1$  ou  $m = 2$ .

2. Déterminer les ensembles  $X_0$  tels que  $m = 1$ , puis ceux tels que  $m = 2$ .

\* \* \*  
\*

## Corrigé

### Questions préliminaires

1. On développe :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{AB} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC})}_{\vec{0}}} = 0 \end{aligned}$$

Remarquons d'abord que comme l'on envisage seulement des triangles non aplatis, les hauteurs sont deux à deux concourantes. De l'égalité précédente, on déduit que si  $H$  est l'intersection de deux des hauteurs du triangle, deux des produits scalaires de la somme précédente sont nuls ; le troisième est donc nul aussi et le point  $H$  est situé sur la troisième hauteur du triangle. Conclusion : les trois hauteurs sont concourantes en  $H$ .

2.  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\Omega H} - \overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$ , donc

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}) \cdot (\overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega B}) = \Omega C^2 - \Omega B^2 = 0.$$

( $AH$ ) est donc la hauteur issue de  $A$  et, de même, ( $BH$ ) est la hauteur issue de  $B$  et ( $CH$ ) la hauteur issue de  $C$ , donc  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

On peut, à la suite de cette démonstration, faire deux remarques :

- indépendamment de la question 1., cette question 2. démontre l'existence de l'orthocentre d'un triangle ;
- par unicité, la relation  $\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$  caractérise l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$ .

### Première Partie

1. **Parties orthocentriques à trois éléments** : les trois points forment un triangle dont l'orthocentre doit être l'un des sommets ; c'est donc un triangle rectangle et l'orthocentre est le sommet de l'angle droit.

2. **Parties orthocentriques à quatre éléments** : soit  $\{A, B, C, D\}$  une partie orthocentrique à quatre éléments. Par définition, ces quatre points ne sont pas alignés.

- Si trois des quatre points forment un triangle  $ABC$  non rectangle, le quatrième point est nécessairement l'orthocentre  $D$  de ce triangle. Dans ce cas, tous les triplets inclus dans  $\{A, B, C, D\}$  forment un triangle non rectangle et  $A$  est l'orthocentre du triangle  $BCD$ ,  $B$  est l'orthocentre du triangle  $ACD$  et  $C$  est l'orthocentre du triangle  $ABD$ .

- Sinon, trois éléments quelconques pris parmi les quatre forment un triangle rectangle ou sont alignés et il y a au plus un sous-ensemble de trois points alignés.

- Premier cas : tous les triplets inclus dans  $\{A, B, C, D\}$  sont formés de points non alignés. Dans ce cas  $ABD$ ,  $ACD$  et  $BCD$  sont des triangles rectangles. Il ne peut y avoir deux angles droits ayant le même sommet (sinon trois des points seraient alignés). Il y a donc un angle droit en chacun des quatre points qui forment donc un rectangle.

- Second cas : trois des points sont alignés, par exemple  $B, C, D$ . Les triangles  $ABC$ ,  $ABD$  et  $ACD$  sont rectangles. Il y a au plus un angle droit de sommet  $A$  (puisque  $B, C$  et  $D$  sont distincts) et au plus un point parmi  $B, C$  ou  $D$  qui est sommet d'un angle droit. Comme il y a trois angles droits, l'un est en  $A$  et les deux autres ont pour sommet le même point pris parmi  $B, C$  ou  $D$ , par exemple  $D$ . Dans ce cas, c'est le triangle  $ABC$  qui est rectangle en  $A$  et  $D$  est le pied de la hauteur issué de  $A$ .

En résumé, les réciproques étant immédiates, les parties orthocentriques à quatre éléments sont :

- l'ensemble formé des sommets d'un triangle non rectangle et de son orthocentre ;
- l'ensemble des quatre sommets d'un rectangle ;
- l'ensemble formé des sommets d'un triangle rectangle et du pied de la hauteur relative à l'hypoténuse.

3. a) Si  $X = \{A, B, C, D\}$  est inclus dans le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ , on pose  $\vec{V} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} + \overrightarrow{\Omega D}$  et on désigne par  $H_A, H_B, H_C$  et  $H_D$  les orthocentres respectifs des triangles  $BCD, CDA, DAB$  et  $ABC$ , donnés par les égalités :

$$\overrightarrow{\Omega H_A} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} + \overrightarrow{\Omega D}, \quad \overrightarrow{\Omega H_B} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega C} + \overrightarrow{\Omega D}, \quad \overrightarrow{\Omega H_C} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega D}, \quad \overrightarrow{\Omega H_D} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}.$$

On peut donc écrire :  $\overrightarrow{\Omega H_A} = \vec{V} - \overrightarrow{\Omega A}$ ,  $\overrightarrow{\Omega H_B} = \vec{V} - \overrightarrow{\Omega B}$ ,  $\overrightarrow{\Omega H_C} = \vec{V} - \overrightarrow{\Omega C}$  et  $\overrightarrow{\Omega H_D} = \vec{V} - \overrightarrow{\Omega D}$ , d'où, en posant  $\overrightarrow{\Omega I} = \frac{1}{2}\vec{V}$ ,  $\overrightarrow{IH_A} = -\overrightarrow{IA}$ ,  $\overrightarrow{IH_B} = -\overrightarrow{IB}$ ,  $\overrightarrow{IH_C} = -\overrightarrow{IC}$ ,  $\overrightarrow{IH_D} = -\overrightarrow{ID}$  ce qui montre que  $H_A, H_B, H_C$  et  $H_D$  se déduisent respectivement de  $A, B, C$  et  $D$  par une symétrie de centre  $I$  et  $Y = \mathcal{H}(X)$  **se déduit de  $X$  dans cette symétrie.**

b) Les points  $H_A, H_B, H_C$  et  $H_D$  composant  $Y$  sont situés sur le cercle de centre  $\Omega'$  et de rayon  $R$  (avec  $\overrightarrow{I\Omega'} = -\overrightarrow{I\Omega}$ ).  $\mathcal{H}(Y)$  est donc le symétrique de  $Y$  par rapport à  $I'$  où

$$\overrightarrow{\Omega' I'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\Omega' H_A} + \overrightarrow{\Omega' H_B} + \overrightarrow{\Omega' H_C} + \overrightarrow{\Omega' H_D}) = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} + \overrightarrow{\Omega D}) = -\overrightarrow{\Omega I} = \overrightarrow{\Omega' I}$$

donc  $I' = I$  et

$$\boxed{\mathcal{H}(Y) = X}$$

4. a) Si  $\Gamma$  est le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$ , pour tous points distincts  $A, B$  et  $C$  de  $\Gamma$ , l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$  vérifie  $\|\overrightarrow{\Omega H}\| < \|\overrightarrow{\Omega A}\| + \|\overrightarrow{\Omega B}\| + \|\overrightarrow{\Omega C}\| = 3R$  (l'inégalité est stricte puisque les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés). Montrons réciproquement que tout point du disque ouvert de centre  $\Omega$  et de rayon  $3R$  est l'orthocentre d'un triangle inscrit dans le cercle  $\Gamma$ . Soit  $H$  tel que  $\|\overrightarrow{\Omega H}\| < 3R$ .

• Si  $H = \Omega$ , on prend pour  $ABC$  un triangle équilatéral inscrit dans le cercle  $\Gamma$  et  $H$  est le centre, donc l'orthocentre de  $ABC$ .

• Si  $H \neq \Omega$ , prenons un repère orthonormé  $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{\Omega H}}{\|\overrightarrow{\Omega H}\|}$  de sorte que  $\overrightarrow{\Omega H} = h\vec{i}$  (avec  $h > 0$ ). Choisissons pour  $A$  le point défini par  $\overrightarrow{\Omega A} = R\vec{i}$  puis prenons  $K$  tel que  $\overrightarrow{\Omega K} = \overrightarrow{\Omega H} - \overrightarrow{\Omega A} = (h - R)\vec{i}$ . La médiatrice de  $[OK]$  est à une distance  $\frac{|h - R|}{2} < R$  de  $\Omega$  donc coupe le cercle  $\Gamma$  en deux points  $B$  et  $C$ . D'après la construction du parallélogramme,  $\overrightarrow{\Omega K} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$  donc  $\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$  et  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

$\mathcal{H}(\Gamma)$  est donc **le disque ouvert de centre  $\Omega$  et de rayon  $3R$ .**

b) Le texte ne précise pas, à dessein, si le disque est ouvert ou fermé, car le résultat est le même dans les deux cas :  $\mathcal{H}(D)$  est le plan tout entier. Montrons qu'en fait si  $\Gamma$  est un cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R > 0$  et si  $X = \Gamma \cup \{\Omega\}$ , alors  $\mathcal{H}(X)$  est le plan tout entier. Soit en effet une demi-droite  $[\Omega x)$  d'origine  $\Omega$ ,  $\theta \in ]0, \pi/2[$ ,  $B$  le point du cercle  $\Gamma$  tel que  $(\Omega x, \overrightarrow{\Omega B}) = \theta [2\pi]$  et  $C$  le symétrique de  $B$  par rapport à la droite  $\Omega x$ .

L'orthocentre du triangle  $\Omega BC$  est le point  $H$  de la droite  $(\Omega x)$  situé sur la perpendiculaire menée de  $B$  à  $(\Omega C)$ . Un calcul élémentaire montre qu'il a pour abscisse  $h(\theta) = \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$ . Lorsque  $\theta$  croît de  $\pi/2$  à  $3\pi/4$ ,  $h(\theta)$  décroît de  $+\infty$  à 0 donc prend, par continuité, toute valeur réelle positive, et  $H$  décrit la demi-droite  $[\Omega x)$ . L'ensemble des orthocentres des triangles de type  $\Omega BC$  où  $B$  et  $C$  sont sur le cercle  $\Gamma$  est donc l'ensemble des points des demi-droites d'origine  $\Omega$ , c'est-à-dire **le plan tout entier.**

## Deuxième Partie

1. Le nombre des triangles dont les sommets appartiennent à  $X$  est  $\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = \frac{n(2n-1)(2n-2)}{3}$ . Un de ces triangles est rectangle si, et seulement si, deux de ces sommets sont diamétralement opposés. Pour avoir un triangle rectangle, il faut donc choisir une paire de deux points diamétralement opposés (il y en a  $n$ ) puis un troisième sommet parmi les  $2n - 2$  points restants. Il y a donc  $n(2n - 2)$  triangles rectangles dont les sommets sont dans  $X$  et la probabilité qu'un triangle pris au hasard dans  $\mathcal{T}$  soit rectangle est donc

$$n(2n - 2) \times \frac{3}{n(2n - 1)(2n - 2)} = \boxed{\frac{3}{2n - 1}}$$

2. Il est plus facile de dénombrer d'abord les triangles ayant un angle obtus. Un tel triangle peut être noté sans ambiguïté  $ABC$ , avec  $A, B$  et  $C$  dans le sens trigonométrique et l'angle obtus en  $B$ . Si  $A'$  est le point opposé par le sommet à  $A$ , le triangle  $ABC$  est obtus en  $B$  si, et seulement si,  $C$  est entre  $A$  et  $A'$  et  $B$  entre  $A$  et  $C$ . Pour le choix de  $A$ , il y a  $2n$  possibilité. Ce choix étant fait, on peut numéroter les sommets  $M_1, M_2, \dots, M_{2n}$  du

polygone dans le sens trigonométrique en prenant  $M_1 = A$ . Alors  $C$  peut être en  $M_j$ , avec  $3 \leq j \leq n$  et  $B$  en  $M_k$  avec  $2 \leq k \leq j - 1$ . Le nombre de paires  $\{B, C\}$  vérifiant les conditions précédentes est

$$\sum_{j=3}^n (j-2) = 1 + 2 + \dots + n - 2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

et le nombre de triangles obtusangles est  $n(n-1)(n-2)$ . Le nombre de triangles acutangles dont les sommets appartiennent à  $X$  est donc :

$$\frac{n(2n-1)(2n-2)}{3} - n(2n-2) - n(n-1)(n-2) = \frac{n(n-1)}{3}(4n-2-6-3n+6) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

et la probabilité de choisir un triangle acutangle est :

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times \frac{3}{n(2n-1)(2n-2)} = \boxed{\frac{n-2}{2(2n-1)}}$$

**3.** En situation d'équiprobabilité, on est amené à calculer d'abord la somme  $S$  des  $OH^2$  étendue aux orthocentres  $H$  des  $N$  triangles  $M_1M_2M_3$  de  $\mathcal{T}$ . Or :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH}^2 &= \overrightarrow{OM_1}^2 + \overrightarrow{OM_2}^2 + \overrightarrow{OM_3}^2 + 2\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} + 2\overrightarrow{OM_2} \cdot \overrightarrow{OM_3} + 2\overrightarrow{OM_3} \cdot \overrightarrow{OM_1} \\ &= 3R^2 + 2\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} + 2\overrightarrow{OM_2} \cdot \overrightarrow{OM_3} + 2\overrightarrow{OM_3} \cdot \overrightarrow{OM_1} \end{aligned}$$

Finalement,  $S = 3NR^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} \mu(i, j) \overrightarrow{OM_i} \cdot \overrightarrow{OM_j}$ , où  $\mu(i, j)$  désigne le nombre de triangles de  $\mathcal{T}$  ayant parmi leurs sommets  $M_i$  et  $M_j$ . Pour le troisième sommet, il reste  $2n-2$  choix possibles donc  $\mu(i, j) = 2n-2$ . On a donc  $E(L) = \frac{S}{N} = 3R^2 + \frac{2(2n-2)}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} \overrightarrow{OM_i} \cdot \overrightarrow{OM_j}$ . Mais

$$0 = \left( \sum_{i=1}^{2n} \overrightarrow{OM_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{2n} \overrightarrow{OM_i}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} \overrightarrow{OM_i} \cdot \overrightarrow{OM_j} = 2nR^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} \overrightarrow{OM_i} \cdot \overrightarrow{OM_j},$$

donc  $2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} \overrightarrow{OM_i} \cdot \overrightarrow{OM_j} = -2nR^2$  et

$$E(L) = 3R^2 + (2n-2) \times \frac{3}{n(2n-1)(2n-2)} (-2nR^2) = 3R^2 \left( 1 - \frac{2}{2n-1} \right) = \boxed{\frac{3(2n-3)}{2n-1} R^2}$$

### Troisième partie

**1.** La hauteur issue de  $C$  a pour équation  $b(x-c) - ay = 0$  et l'orthocentre  $D$ , à l'intersection de cette droite et de l'axe  $(0, \vec{v})$ , a pour coordonnées  $x=0$  et

$$\boxed{y = -\frac{bc}{a}}$$

**2.** Les orthocentres des triangles  $MBC$  où  $B$  et  $C$  sont deux points distincts de  $\Delta$  sont sur la hauteur issue de  $M$  qui est la perpendiculaire  $D$  menée de  $M$  à  $\Delta$ . Sans diminuer la généralité, on peut prendre comme droite  $\Delta$  la droite  $(0, \vec{u})$  et comme droite  $D$  la droite  $(0, \vec{v})$ . Si  $M$  a pour ordonnée  $a$  l'ensemble des ordonnées des orthocentres des triangles  $MBC$  est l'ensemble des nombres réels s'écrivant  $-\frac{bc}{a}$  où  $b$  et  $c$  prennent toutes les valeurs réelles distinctes : c'est donc l'ensemble des nombres réels et  $\mathcal{H}(X) = D$ . Il est alors immédiat que  $\mathcal{H}(X) \cup X = \Delta \cup D$  est orthocentrique puisque  $\mathcal{H}(\Delta \cup D) = \Delta \cup D$ .

**3. a)** Supposons qu'il y a sur  $(O, \vec{u})$  deux points  $B_1$  et  $B_2$  d'abscisses  $b_1 > 0$  et  $b_2 > 0$  et un point  $C$  d'abscisse  $c < 0$ . Comme  $X$ , orthocentrique, n'est pas inclus dans une droite, il y a un point  $A_1$  sur  $(O, \vec{v})$  d'ordonnée non nulle  $a_1$ . Le point  $A_2$ , orthocentre du triangle  $A_1B_1B_2$  est aussi sur  $(O, \vec{v})$  et a une ordonnée non nulle  $a_2 = -\frac{b_1b_2}{a_1}$  du signe contraire de celui de  $a_1$ . Notons d'ailleurs que  $A_1$  est l'orthocentre du triangle  $A_2B_1B_2$ . Supposons, pour fixer les idées, que  $a_1 > 0$  et  $a_2 < 0$ . L'un des deux triangles  $A_1CB_1$  ou  $A_1CB_2$  est non rectangle en  $A_1$  donc

a son orthocentre  $A_3$  sur  $(O, \vec{v})$  avec une ordonnée  $a_3 > 0$ . Supposons que  $A_1CB_1$  est non rectangle et a pour orthocentre  $A_3$ , donc  $a_3 = -\frac{cb_1}{a_1}$ , avec  $a_1^2 \neq -cb_1$ . L'un des deux triangles  $B_1A_2A_3$  ou  $B_2A_2A_3$  est non rectangle au point  $B_i$ . Son orthocentre  $B_3$  est sur  $(O, \vec{u})$  avec une abscisse  $b_3 > 0$ .

- si  $B_3$  est l'orthocentre de  $B_1A_2A_3$ ,  $b_3 = -\frac{1}{b_1} \times \frac{-cb_1}{a_1} \times \frac{-b_1b_2}{a_1} = -\frac{cb_1b_2}{a_1^2} \neq b_2$  puisque  $a_1^2 \neq -cb_1$ .
- si  $B_3$  est l'orthocentre de  $B_2A_2A_3$ ,  $b_3 = -\frac{1}{b_2} \times \frac{-cb_1}{a_1} \times \frac{-b_1b_2}{a_1} = -\frac{cb_1^2}{a_1^2} \neq b_1$  puisque  $a_1^2 \neq -cb_1$ .

**3. b)** Montrons symétriquement que, dans le cas étudié au **3. a)**, il y a trois points de  $X$  sur  $(O, \vec{u})$  d'abscisse strictement négative. D'après le travail fait au **3. a)**, il suffit de montrer qu'il y en a deux : ce sont  $C$  et l'orthocentre de celui des deux triangles  $CA_1A_2$  et  $CA_2A_3$  qui est non rectangle en  $C$ .

**4. a)** Parties à trois points :  $\{O, A, B\}$ , avec  $A$  sur  $(O, \vec{u})$  distinct de  $O$  et  $B$  sur  $(O, \vec{v})$  distinct de  $O$ .

Parties à quatre points : deux points  $A$  et  $C$  sur  $(O, \vec{u})$  et deux points  $B$  et  $D$  sur  $(O, \vec{v})$  avec trois configurations possibles :

- 1 Aucun des points n'est en  $O$  et  $C$  est l'orthocentre de  $ABD$ .
- 2  $C$  est en  $O$  et le triangle  $ABD$  est rectangle en  $A$ .
- 3  $ABCD$  est un carré (rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires).

Parties à cinq points : on a vu que s'il y avait dans une partie orthocentrique  $X$  incluse dans la réunion des axes, trois points, sur l'un des axes, distincts de  $O$  il y avait en fait au moins sept points dans  $X$ . Si une telle partie  $X$  a exactement 5 points, l'un est donc  $O$ , qui est lui-même l'orthocentre de tous les triangles dont il est l'un des sommets et d'aucun autre (puisque pour les autres triangles, il est sur l'un des côtés sans être un sommet). Les parties orthocentriques à 5 éléments sont donc les parties  $\{O, A, B, C, D\}$ , où  $\{A, B, C, D\}$  est une partie orthocentrique à 4 éléments du type 1 ou 3.

**4. b)** Si  $X$  a au moins six points il en a au moins trois sur l'un des deux axes en dehors de  $O$  donc, d'après la question **3.** au moins trois sur  $(O, \vec{u})$  d'abscisse strictement positive, soit  $B(b, 0)$ ,  $C(0, c)$  et  $M_0(0, x)$  avec  $0 < b < c$ . Il y a aussi un point  $A(0, a)$  de  $X$  sur  $(O, \vec{v})$  d'ordonnée  $a > 0$ .

On définit successivement dans  $X$ ,  $A_1(0, a_1)$  orthocentre de  $ACM_0$ , puis  $M_1(x_1, 0)$  orthocentre de  $AA_1B$ . On a  $a_1 = -\frac{cx_0}{a}$  et  $x_1 = \frac{c}{b}x$ .

Si on suppose définis dans  $X$ , pour  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $A_k(0, a_k)$  comme orthocentre de  $ACM_{k-1}$  et  $M_k(x_k, 0)$  comme orthocentre de  $AA_kB$  avec  $x_k = \left(\frac{c}{b}\right)^k x_0$ , on peut définir dans  $X$ ,  $A_n(0, a_n)$  comme orthocentre de  $ACM_{n-1}$  puis  $M_n(x_n, 0)$  comme orthocentre de  $AA_nB$ , avec  $a_n = -\frac{c}{a} \times \left(\frac{c}{b}\right)^{n-1} x_0$ , puis  $x_n = \left(\frac{c}{b}\right)^n x_0$ . Comme  $c > b$ , la suite  $(x_n)$  tend bien vers  $+\infty$ .

Si on considère un point  $A'$  sur  $(O, \vec{v})$  d'ordonnée strictement négative  $a'$  et si on désigne par  $M'_n(x'_n, 0)$  l'orthocentre de  $AA'M_n$ , on a, en posant  $\alpha = -aa' > 0$ ,  $x'_n = \frac{\alpha}{x_n} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

#### Quatrième partie

**1. a)**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (b-a)(d-c) + \left(\frac{k}{b} - \frac{k}{a}\right)\left(\frac{k}{d} - \frac{k}{c}\right) = (b-a)(d-c) \times \frac{abcd + k^2}{abcd}$ , d'où le résultat.

b) Il existe un unique point de  $Y$  d'abscisse  $d = \frac{-k^2}{abc}$ , le point  $D$  d'ordonnée  $-\frac{abc}{k}$ . D'après a),  $(DC)$  est perpendiculaire à  $(AB)$ ; symétriquement,  $(DB)$  est perpendiculaire à  $(CA)$  et  $(DA)$  est perpendiculaire à  $(BC)$  donc  $D$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

c) D'après b), l'orthocentre d'un triangle dont les sommets sont dans  $Y$  est dans  $Y$  donc  $Y$  est orthocentrique.

**2. a)** Le discriminant  $\Delta = q^2 + 4$  est strictement positif et l'équation a deux racines distinctes. Si le rationnel  $\frac{a}{b}$ , où  $a$  et  $b$  sont des entiers non nuls premiers entre eux, est racine de l'équation,  $a^2 - qab - b^2 = 0$ , donc  $b$  divise  $a$  et  $a$  divise  $b$  soit, en fin de compte,  $\frac{a}{b} = \pm 1$  donc  $qa = 0$ , ce qui est contradictoire puisque  $q \neq 0$ .

On peut prendre, mais cela n'a pas d'importance  $r = \frac{q + \sqrt{q^2 + 4}}{2}$  et  $r' = \frac{q - \sqrt{q^2 + 4}}{2}$ .

b) Si  $s : x + iy \mapsto x' + iy'$ , on a  $x' + iy' = (1 - ri)(x + iy)$ , donc  $x' = x + ry$  et  $y' = -rx + y$ . On a alors :

$$\begin{aligned} x'y' &= (x + ry)(-rx + y) = r(y^2 - x^2) + (1 - r^2)xy \\ &= r(y^2 - x^2) - qrx y \quad \text{puisque } r^2 - qr - 1 = 0 \\ &= r(y^2 - x^2 - qxy + 1) - r \end{aligned}$$

de sorte que  $x^2 + qxy - y^2 = 1 \iff x'y' = -r$  et  $s(X) = Y$ , avec  $k = -r$ .

La similitude conserve l'orthogonalité donc les orthocentres des triangles et  $X$  image par la similitude  $s^{-1}$  de l'ensemble orthocentrique  $Y$  est donc orthocentrique.

**3. a)** Cela résulte de l'expression de  $x'$  donnée au **2. b)** et de l'égalité  $(x + ry)(x + r'y) = x^2 + (r + r')xy + rr'y^2 = x^2 + qxy - y^2$ , conséquence de  $r + r' = q$  et  $rr' = -1$ .

b)  $-1$  correspond à  $(x, y) = (-1, 0)$  qui vérifie les deux expressions et  $r^2$  à  $(x, y) = (1, q)$  qui vérifie aussi les deux expressions puisque  $1 + qr = r^2$  et  $(1 + qr)(1 + qr') = 1 + q(r + r') + q^2rr' = 1 + q^2 - q^2 = 1$ .

c)  $(x_1 + ry_1)(x_2 + ry_2) = x_1x_2 + r(x_1y_2 + x_2y_1) + r^2y_1y_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + r(x_1y_2 + x_2y_1 + qy_1y_2) = X + rY$  avec  $X$  et  $Y$  entiers. De plus  $(X + rY)(X + r'Y) = (x_1 + ry_1)(x_2 + ry_2)(x_1 + r'y_1)(x_2 + r'y_2) = 1$ .

De même,  $\frac{1}{x + ry} = \frac{x + r'y}{(x + ry)(x + r'y)} = \frac{x + y - ry}{x^2 + qxy - y^2} = x + y - ry$

et  $(x + y - ry)(x + y - r'y) = \frac{1}{(x + ry)(x + r'y)} = 1$ .

$\Gamma$  est stable par produit et contient  $r^2$ , donc contient tous les  $r^{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $q \in \mathbb{Z}$  et  $q \neq 0$ ,  $|q| \geq 1$  et  $r = \frac{q + \sqrt{q^2 + 4}}{2} \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$  : la suite des  $r^{2n}$  est infinie, donc aussi  $\Gamma$ .

**4.** L'ensemble  $G$  est infini, puisque  $\Gamma$  l'est. Si  $A_1 = (x_1, y_1)$ ,  $A_2 = (x_2, y_2)$  et  $A_3 = (x_3, y_3)$  sont trois points de  $X$ ,  $s(A_1)$ ,  $s(A_2)$  et  $s(A_3)$  sont trois points de l'hyperbole  $Y$  d'équation  $xy = -r$ , d'abscisses respectives  $x_1 + ry_1$ ,  $x_2 + ry_2$  et  $x_3 + ry_3$  appartenant à  $\Gamma$ . D'après la question **1. b)** l'orthocentre  $K$  du triangle  $s(A)s(B)s(C)$  est le point de  $Y$  d'abscisse  $x = \frac{-r^2}{(x_1 + ry_1)(x_2 + ry_2)(x_3 + ry_3)}$ .

D'après la question **3. c)**, comme  $-1$ ,  $r^2$ ,  $x_1 + ry_1$ ,  $x_2 + ry_2$  et  $x_3 + ry_3$  appartiennent à  $\Gamma$ ,  $x$  appartient à  $\Gamma$ . L'orthocentre du triangle  $A_1A_2A_3$  est le point  $H$  de  $X$  tel que  $s(H) = K$  (par conservation de l'orthogonalité par similitude). Comme l'abscisse de  $s(H)$  est dans  $\Gamma$ ,  $H$  est dans  $G$ .

Conclusion :  $G$  est un ensemble orthocentrique infini.

### Cinquième partie

Après similitude, on se ramène à deux cas :

cas 1 :  $\{A_0, B_0, C_0, D_0\} \in Y_1$

cas 2 :  $\{A_0, B_0, C_0, D_0\} \in Y_0$

#### cas 1

**1.** Soit  $a_0, b_0, c_0, d_0$  les abscisses respectives de  $A_0, B_0, C_0, D_0$ , qui définissent quatre triangles  $B_0C_0D_0$  d'orthocentre  $A_1$ ,  $A_0C_0D_0$  d'orthocentre  $B_1$ ,  $A_0B_0D_0$  d'orthocentre  $C_1$  et  $A_0B_0C_0$  d'orthocentre  $D_1$ . On note  $a_1, b_1, c_1, d_1$  les abscisses respectives de  $A_1, B_1, C_1, D_1$ .

On définit ensuite de la même manière  $A_n, B_n, C_n, D_n$  (d'abscisses  $a_n, b_n, c_n, d_n$ ) orthocentres respectifs des quatre triangles dont les sommets sont dans  $X_{n-1}$ . On a  $a_1 = -\frac{1}{b_0c_0d_0}, \dots$  et de même  $a_n = -\frac{1}{b_{n-1}c_{n-1}d_{n-1}}, \dots$

Si on pose  $p_n = a_nb_nc_nd_n$  avec, pour simplifier  $p = p_0$ , on obtient :  $a_1 = -\frac{a_0}{p}$ ,  $b_1 = -\frac{b_0}{p}$ ,  $c_1 = -\frac{c_0}{p}$ ,  $d_1 = -\frac{d_0}{p}$

et, plus généralement :  $a_n = -\frac{a_{n-1}}{p_{n-1}}$ ,  $b_n = -\frac{b_{n-1}}{p_{n-1}}$ ,  $c_n = -\frac{c_{n-1}}{p_{n-1}}$ ,  $d_n = -\frac{d_{n-1}}{p_{n-1}}$ .

On a donc  $p_1 = p^{-3}$  et, plus généralement,  $p_n = p^{(-3)^n}$ . S'il y a périodicité, il existe  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$  minimum tel que  $p_m = p$ , la période potentielle étant  $m$ . Les seuls cas possibles sont  $p = 1$  et  $p = -1$ .

• Si  $p = -1$ , on a  $(a_1, b_1, c_1, d_1) = (a_0, b_0, c_0, d_0)$  et la suite  $(X_n)$  est périodique de période  $m = 1$ . Dans ce cas,  $\{A_0, B_0, C_0, D_0\}$  est orthocentrique.

• Si  $p = 1$ , on a  $(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_0, b_0, c_0, d_0)$  et la suite  $(X_n)$  est périodique de période  $m = 2$ . Montrons que  $A_0, B_0, C_0$  et  $D_0$  sont cocycliques (on se trouve alors dans la situation étudiée au **3.** de la première partie).



On remarque d'abord que  $\{A_1, B_1, C_1, D_1\}$  sont les symétriques respectifs de  $\{A_0, B_0, C_0, D_0\}$  par rapport à  $O$ . Si on considère le centre  $\Omega$  du cercle circonscrit au triangle  $A_0B_0C_0$ , comme son orthocentre est  $D_1$ , on a  $\overrightarrow{A_0\Omega} + \overrightarrow{B_0\Omega} + \overrightarrow{C_0\Omega} = \overrightarrow{D_1\Omega} = \overrightarrow{O\Omega} - \overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{OD_0} = 2\overrightarrow{O\Omega} - \overrightarrow{D_0\Omega}$ , d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{A_0\Omega} + \overrightarrow{B_0\Omega} + \overrightarrow{C_0\Omega} + \overrightarrow{D_0\Omega} = 2\overrightarrow{O\Omega}}$$

De la symétrie de cette expression, on déduit que  $\overrightarrow{B_0\Omega} + \overrightarrow{C_0\Omega} + \overrightarrow{D_0\Omega} = \overrightarrow{A_1\Omega}$  donc, puisque  $A_1$  est l'orthocentre du triangle  $B_0C_0D_0$  que  $\Omega$  en est le centre du cercle circonscrit. Les quatre points sont donc cocycliques ; la réciproque a été faite au I.3.b).

Note : Pour un triangle donné  $ABC$ , d'orthocentre  $H$ , il y a un unique point  $\Omega$  tel que  $\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{B\Omega} + \overrightarrow{C\Omega} = \overrightarrow{H\Omega}$  : c'est le barycentre des points pondérés  $(A, 1)$ ,  $(B, 1)$ ,  $(C, 1)$ ,  $(H, -1)$  et c'est donc d'après la seconde question préliminaire le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

## cas 2

Si trois des points appartiennent à l'un des axes,  $X_1$  aurait au plus trois éléments donc  $X_2$  au plus un et il ne pourrait y avoir périodicité. C'est donc que deux des points sont sur  $(O, \vec{u})$  et deux sur  $(O, \vec{v})$ , aucun des points n'étant en  $O$ . On part donc de  $A_0(a_0, 0)$ ,  $B_0(b_0, 0)$ ,  $C_0(0, c_0)$  et  $D_0(0, d_0)$ , avec  $a_0b_0c_0d_0 \neq 0$ . On a alors  $A_1(a_1, 0)$ ,  $B_1(b_1, 0)$ ,  $C_1(0, c_1)$  et  $D_1(0, d_1)$ , avec

$$a_1 = -\frac{c_0d_0}{b_0}, \quad b_1 = -\frac{c_0d_0}{a_0}, \quad c_1 = -\frac{a_0b_0}{d_0}, \quad d_1 = -\frac{a_0b_0}{c_0},$$

et, plus généralement,  $A_n(a_n, 0)$ ,  $B_n(b_n, 0)$ ,  $C_n(0, c_n)$  et  $D_n(0, d_n)$ , avec

$$a_n = -\frac{c_{n-1}d_{n-1}}{b_{n-1}}, \quad b_n = -\frac{c_{n-1}d_{n-1}}{a_{n-1}}, \quad c_n = -\frac{a_{n-1}b_{n-1}}{d_{n-1}}, \quad d_n = -\frac{a_{n-1}b_{n-1}}{c_{n-1}}.$$

On a donc  $\frac{a_1b_1}{c_1d_1} = \left(\frac{a_0b_0}{c_0d_0}\right)^{-3} \dots, \frac{a_nb_n}{c_nd_n} = \left(\frac{a_{n-1}b_{n-1}}{c_{n-1}d_{n-1}}\right)^{-3}$ , soit  $\frac{a_nb_n}{c_nd_n} = p^{(-3)^n}$ , où  $p = \frac{a_0b_0}{c_0d_0}$ .

S'il y a périodicité, il existe  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$  minimum tel que  $p^{(-3)^m} = p$ , la période potentielle étant  $m$ . Les seuls cas possibles sont  $p = 1$  et  $p = -1$ .

- Si  $p = -1$ , on a  $(a_1, b_1, c_1, d_1) = (a_0, b_0, c_0, d_0)$  et la suite  $(X_n)$  est périodique de période  $m = 1$ . Dans ce cas,  $\{A_0, B_0, C_0, D_0\}$  est orthocentrique, ce qui correspond au cas où l'un des points est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres.

- Si  $p = 1$ , on a  $(a_1, b_1, c_1, d_1) = (-a_0, -b_0, -c_0, -d_0)$  puis  $(a_2, b_2, c_2, d_2) = (-a_1, -b_1, -c_1, -d_1) = (a_0, b_0, c_0, d_0)$  et la suite  $(X_n)$  est périodique de période  $m = 2$ . Le raisonnement fait dans le cas 1 pour  $m = 2$  s'applique intégralement.

En résumé, en reprenant avant l'application de la similitude, la suite  $(X_n)$  est périodique dans les deux cas suivants :

1. l'ensemble  $X_0$  est orthocentrique, la suite  $(X_n)$  est constante et la période est 1 ;
2. les points  $A_0, B_0, C_0$  et  $D_0$  sont cocycliques et la suite  $(X_n)$  a pour période 2.