Concours général 07

Exercice 1

1) Il suffit de poser $\varphi(x)=\frac{x}{2}+\left|\frac{x}{2}\right|$, pour tout $x\in[-1;1]$.

2) Il s'agit d'écrire f, définie sur $[-1;0]$ par $t_1(x)$ puis sur $[0;1]$ par $t_2(x)$, avec $t_1(0)=t_2(0)$, au moyen d'une combinaison linéaire de fonctions trinômes et de composées de fonctions trinômes avec la valeur absolue.
La question 1) donne un premier exemple. D'autre part, la fonction ψ définie par
$\psi(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in[-1;0]\\ x^2 & \text{si } x\in[0;1]\end{cases}$ peut s'écrire $\psi(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\left(\left|x^2+x\right|-\left|x^2-x\right|\right)$, pour tout $x\in[-1;1]$.
On déduit de ce qui précède une écriture de φ définie par
$\varphi(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\in[-1;0]\\ 0 & \text{si } x\in[0;1]\end{cases}$, $\varphi(x)=\frac{x}{2}-\left|\frac{x}{2}\right|$, pour tout $x\in[-1;1]$,
puis une écriture de ψ définie par
$\psi(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\in[-1;0]\\ 0 & \text{si } x\in[0;1]\end{cases}$, $\psi(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\left(\left|x^2+x\right|-\left|x^2-x\right|\right)$, pour tout $x\in[-1;1]$.
En combinant ces différentes écritures, on obtient pour f définie par
$f(x)=\begin{cases}a_1x^2+b_1x+c & \text{si } x\in[-1;0]\\ a_2x^2+b_2x+c & \text{si } x\in[0;1]\end{cases}$,
$f(x)=\frac{1}{2}\left(t_1(x)+t_2(x)\right)+\frac{b_2-b_1}{2}|x|+\frac{a_2-a_1}{4}\left(\left|x^2+x\right|-\left|x^2-x\right|\right)$, pour tout $x\in[-1;1]$.

Exercice 2

1)
a) Si le produit des éléments de chaque ligne est inférieur ou égal à 71, en effectuant le produit des 9 éléments du tableau on obtient $9!\leqslant 71^3$, ce qui est faux. Donc il existe au moins une ligne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 72.

b) Un exemple : $\begin{pmatrix}1&8&9\\2&5&7\\3&4&6\end{pmatrix}$.

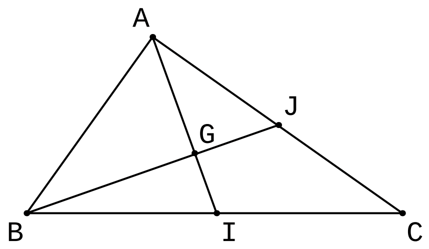
2) Supposons que le produit des éléments de chaque ligne et de chaque colonne soit inférieur ou égal à 89 et notons P le plus grand produit des éléments d'une ligne ou d'une colonne. On a $P\leqslant 89$ et, d'après 1) a), $P\geqslant 72$.
D'autre part, en multipliant trois entiers distincts compris entre 1 et 9 on ne peut obtenir que trois entiers compris entre 72 et 89 : 72, 80 et 84.
Si $P=72$, en supposant que P est le produit des éléments d'une ligne, à l'ordre près des lignes et à l'ordre près des éléments d'une ligne, il n'y a qu'un tableau possible : $\begin{pmatrix}1&8&9\\2&5&7\\3&4&6\end{pmatrix}$, déjà vu en 1) b).
On peut alors remarquer que, si, dans une colonne, 9 est associé à 2, dans une autre, 8 est associé à 5 ou 7. Dans tous les cas il existe une colonne dont le produit des éléments est supérieur à P. D'où une contradiction.
De même, Si $P=80$, il n'y a qu'un tableau possible : $\begin{pmatrix}2&5&8\\1&7&9\\3&4&6\end{pmatrix}$. Et il existe une colonne dont le produit des éléments est supérieur à P.

Dans le cas où $P = 84$, il y a trois tableaux possibles : $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Et, pour chacun d'eux, il existe une colonne dont le produit des éléments est supérieur à P.
On peut donc conclure que dans un tableau quelconque il existe au moins une ligne ou une colonne ont le produit des éléments est supérieur ou égal à 90.
A noter qu'il est possible que le produit des éléments de chaque ligne et de chaque colonne soit inférieur ou égal à 90 : $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 9 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3
Partie I - Géométrie

1) Si l'on choisit c, longueur du coté [AB], on obtient $b = c\sqrt{2}$, $a = c\sqrt{3}$ et on peut construire au compas un point C.
Par exemple,



On a alors $b^2 + c^2 = 3c^2 = a^2$, le triangle ABC est rectangle en A, et, en notant G le centre de gravité du triangle, $GA = \frac{2}{3}IA = \frac{2}{3}IB = \frac{c}{\sqrt{3}}$, $GA^2 = \frac{c^2}{3}$, $GB = \frac{2}{3}BJ$, $GB^2 = \frac{4}{9}BJ^2 = \frac{4}{9}\left(BA^2 + AJ^2\right) = \frac{2c^2}{3}$,
d'où $GA^2 + GB^2 = AB^2$, le triangle ABC est de type W.

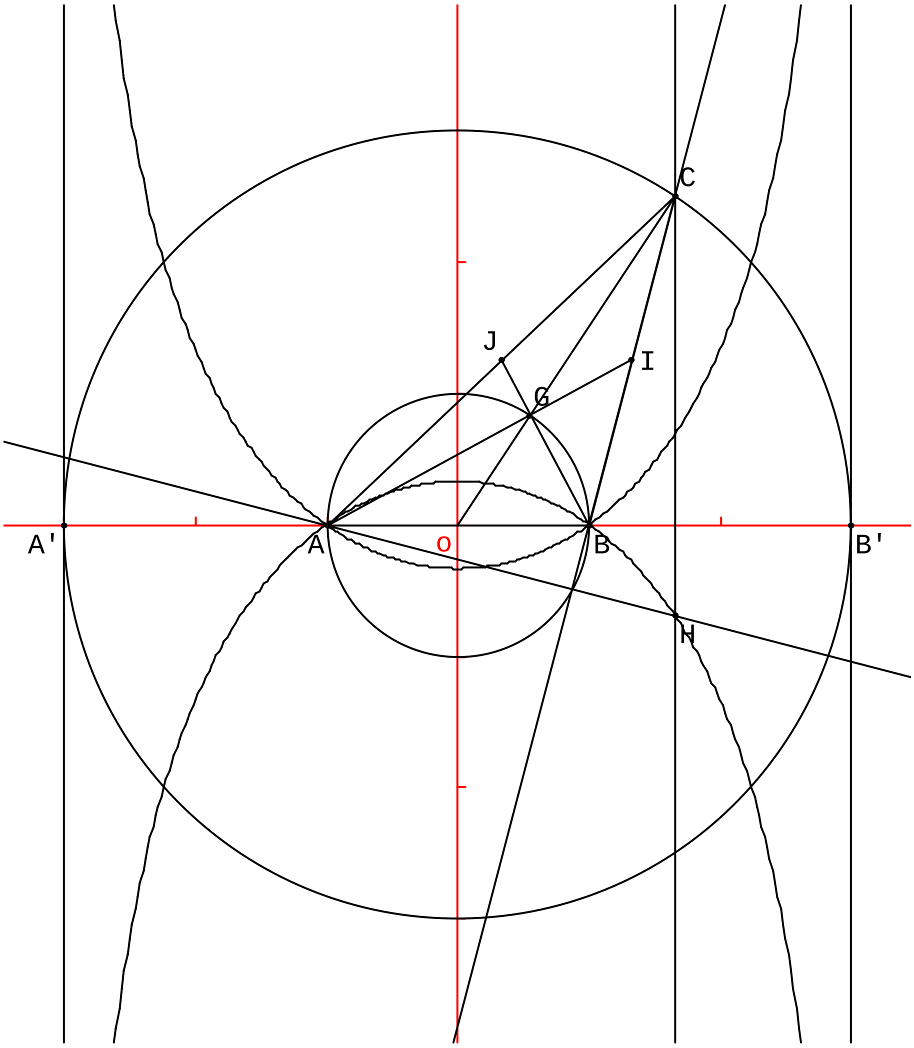
2)

a) Le triangle ABG étant rectangle en G, le point G appartient au cercle de diamètre [AB] privé des points A et B. Réciproquement, étant donné un point G de ce cercle, distinct de A et B, soit le point C image de G par l'homothétie de centre O, milieu de [AB], et de rapport 3, G est le centre de gravité du triangle ABC qui est de type W.

b) Soient A' et B' les images de A et B par l'homothétie de centre O et de rapport 3, l'ensemble Γ est le cercle de diamètre [A'B'] privé des points A' et B'.

c) Lorsque G décrit le cercle de diamètre [AB] privé de A et B, GA décrit l'intervalle $]0\,;c[$ et on peut exprimer $\frac{b}{c}$ en fonction de GA : dans le triangle AJG, $AJ^2 = GA^2 + GJ^2 = GA^2 + \frac{GB^2}{4}$ où $GB^2 = AB^2 - GA^2 = c^2 - GA^2$ d'où $\frac{b^2}{4} = \frac{c^2}{4} + \frac{3\,GA^2}{4}$ et $\frac{b^2}{c^2} = 1 + \frac{3\,GA^2}{c^2}$. On en déduit que $\frac{b}{c}$ décrit l'intervalle $]1\,;2[$.

d) Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, où $\vec{i} = \overrightarrow{OB}$, le point H, orthocentre d'un triangle ABC, est le point d'intersection des hauteurs issues de A et de C. En notant (x, y) les coordonnées de H, on obtient : $yy_C = (1 - x_C)(1 + x)$ et $x = x_C$. D'autre part, d'après 2) b), $x_C^2 + y_C^2 = 9$. D'où, en posant $f(x) = \frac{1 - x^2}{\sqrt{9 - x^2}}$, où $x \in]-3\,;3[$, $y = f(x)$ ou $y = -f(x)$. La fonction f est paire, dérivable sur $]-3\,;3[$ et $f'(x) = \frac{x(x^2 - 17)}{(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2}}$. f est donc décroissante sur $]-3\,;0]$, croissante sur $[0\,;+3[$ et l'on a les courbes suivantes :



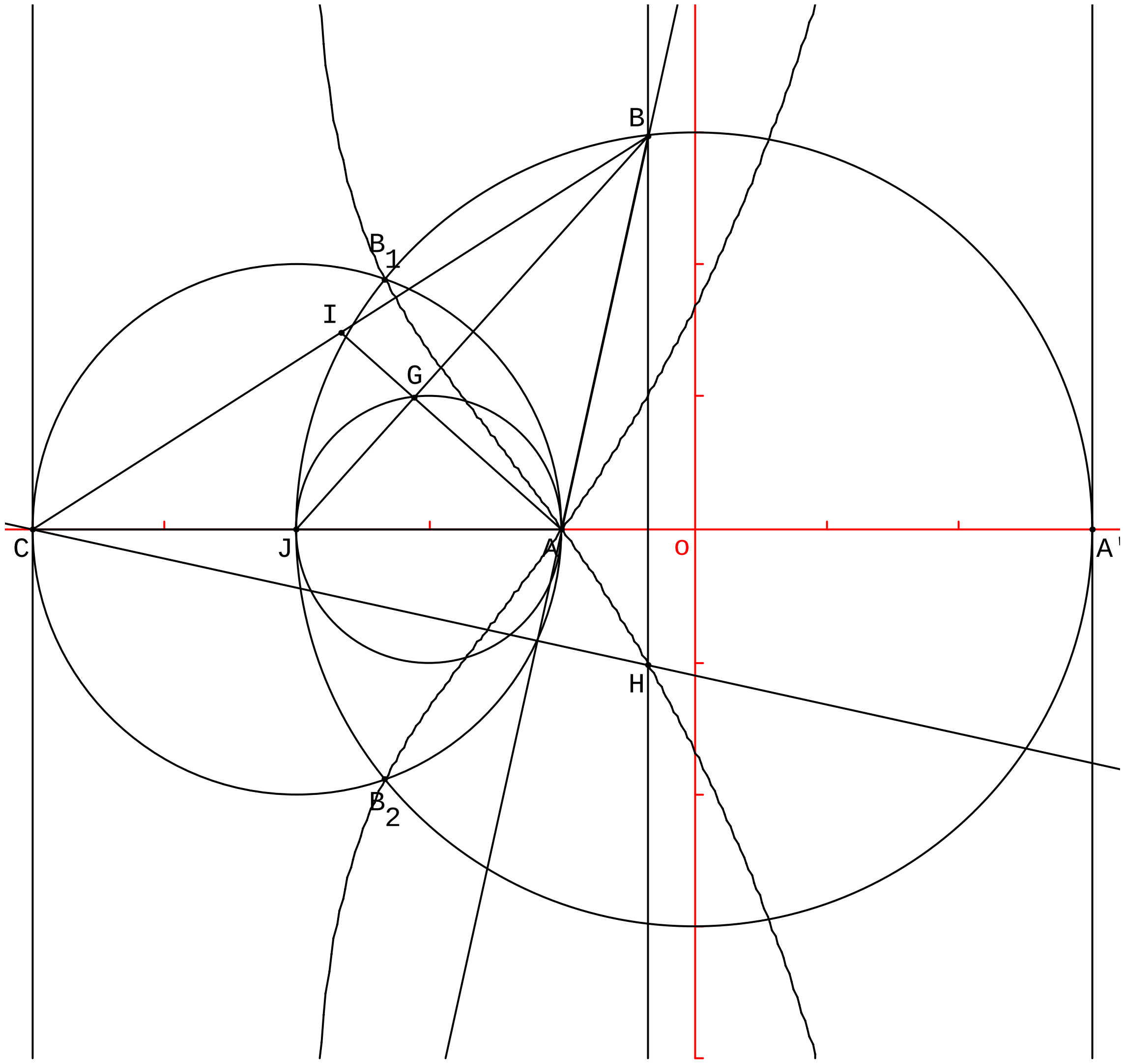
3)

a) Le triangle AJG étant rectangle en G, le point G décrit le cercle de diamètre [AJ] privé des points A et J. Soit A' l'image de A par l'homothétie de centre J et de rapport 3, l'ensemble Γ' est le cercle de diamètre [A'J] privé des points A' et J.

b) Lorsque G décrit le cercle de diamètre [AJ] privé de A et J, GA décrit l'intervalle $\left]0\,;\frac{b}{2}\right[$ et on peut exprimer $\frac{a}{b}$ en fonction de GA : dans le triangle BIG, $BI^2 = GB^2 + GI^2 = 4GJ^2 + \frac{GA^2}{4}$ où $GJ^2 = AJ^2 - GA^2 = \frac{b^2}{4} - GA^2$ d'où $\frac{a^2}{4} = b^2 - \frac{15\,GA^2}{4}$ et $\frac{a^2}{b^2} = 4 - \frac{15\,GA^2}{b^2}$. On en déduit que $\frac{a}{b}$ décrit l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;2\right[$.

c) Le cercle circonscrit à un triangle ABC de rayon minimal est le cercle de diamètre [AC]. Ce cercle et le cercle Γ' sont sécants en deux points B_1 et B_2, symétriques par rapport à [AC].

d) Dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, où $\vec{i} = \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JA}$, le point H, orthocentre d'un triangle ABC, est le point d'intersection des hauteurs issues de C et de B. En notant (x, y) les coordonnées de H, on obtient : $yy_B = -(x_B + 1)(x+5)$ et $x = x_B$. D'autre part, d'après 3) a), $x_B^2 + y_B^2 = 9$. D'où, en posant $f(x) = \frac{(x+1)(x+5)}{\sqrt{9-x^2}}$, où $x \in \left]-3\,;3\right[$, $y = f(x)$ ou $y = -f(x)$. La fonction f est dérivable sur $\left]-3\,;3\right[$ et $f'(x) = \frac{-x^3 + 23x + 54}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$. L'étude du numérateur montre que $-x^3 + 23x + 54$ est positif sur $\left]-3\,;3\right[$, f est donc croissante sur $\left]-3\,;3\right[$ et l'on a les courbes suivantes :



4)

a) Dans un triangle ABC, le théorème de la médiane permet d'écrire $AI^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}\right)$

et $BJ^2 = \frac{1}{2}\left(BA^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2}\right)$. D'où $GA^2 = \frac{2}{9}\left(c^2 + b^2 - \frac{a^2}{2}\right)$ et $GB^2 = \frac{2}{9}\left(c^2 + a^2 - \frac{b^2}{2}\right)$.

Un triangle ABC est donc de type W si et seulement si $GA^2 + GB^2 = AB^2$ ou $a^2 + b^2 = 5c^2$.

b) Trois réels strictement positifs a, b et c sont les longueurs des cotés d'un triangle si et seulement si $a - b < c < a + b$.

Si a, b et c vérifient la relation $a^2 + b^2 = 5c^2$, on a $c^2 < 5c^2 < (a+b)^2$ c'est-à-dire $c < a + b$.

Il reste la condition $a - b < c$ qui équivaut à $(a-b)^2 < c^2$ ou $5(a-b)^2 < 5c^2$ ou encore

$2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{b}\right) + 2 < 0$. On obtient $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$. La condition nécessaire et suffisante est donc

$\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$.

Partie II - Arithmétique

Pour faire la partie II sans avoir fait la partie I, il suffit de savoir qu'un triplet (a,b,c) d'entiers strictement positifs définit un triangle de type W si et seulement si $a^2+b^2=5c^2$ et $\frac{1}{2}<\frac{a}{b}<2$.

A – Deux familles de triangles

1)

a) a, b et c vérifient la relation $a^2+b^2=5c^2$ et sont premiers entre eux dans leur ensemble.
Si un nombre premier p divise a et b, p^2 divise a^2 et b^2 donc $5c^2$ et p divise c.
D'autre part, si un nombre premier p divise a et c, p^2 divise a^2 et c^2 donc b^2 et p divise b.
De même pour b et c. On en déduit que a, b et c sont premiers entre eux deux à deux.

b) D'après 1) a), a et b ne peuvent être tous les deux pairs. Si a et b sont impairs, $a=2p+1$, $b=2q+1$ où $p,q\in\mathbb{N}$. Avec la congruence modulo 4 on obtient $a^2\equiv 1$ et $b^2\equiv 1$.
D'autre part, $c\equiv 0,\ 1,\ 2$ ou 3 entraîne $c^2\equiv 0$ ou 1 et on déduit de la relation $a^2+b^2=5c^2$, $2\equiv 0$ ou 1. Donc a et b sont de parités différentes.

c) Si a est divisible par 3, d'après 1) a), b et c ne sont pas divisibles par 3. Avec la congruence modulo 3 on obtient $a\equiv 0$, $b\equiv 1$ ou 2 et $c\equiv 1$ ou 2 puis $a^2\equiv 0$, $b^2\equiv 1$ et $c^2\equiv 1$. D'où $1\equiv 2$.
De même pour b. Donc a et b ne sont pas divisibles par 3.
Si a est divisible par 4, b et c sont impairs. Avec la congruence modulo 4 on obtient $a\equiv 0$, $b\equiv 1$ ou 3 et $c\equiv 1$ ou 3, avec la congruence modulo 8 on obtient alors $a^2\equiv 0$, $b^2\equiv 1$ et $c^2\equiv 1$. D'où $1\equiv 5$. De même pour b. Donc a et b ne sont pas divisibles par 4.
D'autre part, d'après 1) a), a et b ne peuvent pas être divisibles par 5. En conclusion, a et b ne sont divisibles ni par 3, ni par 4, ni par 5.

d) a, b et c vérifient la relation $a^2+b^2=5c^2$ d'où $b^2-4a^2=5(c^2-a^2)$ et $a^2-4b^2=5(c^2-b^2)$.
5 divise b^2-4a^2 et a^2-4b^2.
En particulier, 5 divise $(b+2a)(b-2a)$ donc $2a+b$ ou $2a-b$. Dans le premier cas, 5 divise aussi $2(2a+b)-5a=-a+2b$, dans le second cas, 5 divise $5a-2(2a-b)=a+2b$.

On en déduit qu'il existe $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ tels que l'on ait $\begin{cases}2a+b=5\alpha\\-a+2b=5\beta\end{cases}$ ou $\begin{cases}2a-b=5\alpha\\a+2b=5\beta\end{cases}$.

Le premier système équivaut à $\alpha=\frac{2a+b}{5}$ et $\beta=\frac{-a+2b}{5}$. D'où $\alpha^2+\beta^2=\frac{5a^2+5b^2}{25}=c^2$, et, tout diviseur commun à α et β divise $2\alpha-\beta=a$ et $\alpha-2\beta=b$, α et β sont premiers entre eux.
Le second système entraîne les mêmes propriétés.

e) D'après 1) d), si α et β sont premiers entre eux tout diviseur commun à a et b divise 5 d'où $\mathrm{PGCD}(a,b)=1$ ou 5. D'autre part, $\mathrm{PGCD}(a,b)=5$ si et seulement si 5 divise a, c'est-à-dire, 5 divise $2\alpha-\beta$ ou 5 divise $2\alpha+\beta$. Sinon $\mathrm{PGCD}(a,b)=1$.

2) Un triangle est de type W_e si et seulement si les longueurs a, b et c de ses cotés sont des entiers strictement positifs, premiers entre eux, qui vérifient $a^2+b^2=5c^2$ et $\frac{1}{2}<\frac{a}{b}<2$.

La condition $\frac{1}{2}<\frac{a}{b}<2$ entraîne $-a+2b>0$ et $2a-b>0$. D'autre part, a et b étant de parités différentes et pouvant être échangés on peut supposer a pair et b impair.
D'après 1) d), les entiers α et β sont strictement positifs, β est pair, α, β et c sont premiers entre eux et $\alpha^2+\beta^2=c^2$. On peut donc appliquer le résultat donné dans l'énoncé au triplet (α,β,c) : $\alpha=u^2-v^2$, $\beta=2uv$, $c=u^2+v^2$ où u et v sont des entiers strictement positifs, tels que $u>v$, de parités différentes et premiers entre eux.
Avec le premier système de la question 1) d) on obtient alors $a=2(u^2-uv-v^2)$ et $b=u^2+4uv-v^2$, avec le second on obtient $a=2(u^2+uv-v^2)$ et $b=-u^2+4uv+v^2$.

3) Il est immédiat que a, b et c sont des entiers strictement positifs et que $a^2+b^2=5c^2$, il faut aussi qu'ils vérifient $\frac{1}{2}<\frac{a}{b}<2$.

Avec la relation (1) on obtient $3u^2-8uv-3v^2>0$ ou $3\left(\frac{u}{v}\right)^2-8\left(\frac{u}{v}\right)-3>0$ et la condition $\frac{u}{v}>3$ ou $u>3v$.

Avec la relation (2) on obtient $\begin{cases} u^2-v^2>0 \\ 2u^2-3uv-2v^2<0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \left(\frac{u}{v}\right)^2>1 \\ 2\left(\frac{u}{v}\right)^2-3\left(\frac{u}{v}\right)-2<0 \end{cases}$ et la condition $1<\frac{u}{v}<2$ ou $v<u<2v$.

4) Supposons qu'un triplet (a,b,c) vérifie les relations (1) et (2) : d'après (1), $2a+b$ est divisible par 5, d'après (2), $2a-b$ est divisible par 5. On en déduit que a et b sont divisibles par 5, ce qui est impossible d'après 1) c). Donc un triangle de type W_e ne peut être défini que par une seule des relations (1) et (2).

5) On cherche des entiers u et v strictement positifs, de parités différentes, premiers entre eux et tels que $u^2+v^2\leqslant 50$.
Pour un triangle de type W_1 il faut que $u>3v$, d'où $(u,v)=(4,1)$ ou $(u,v)=(6,1)$ et il existe deux triangles définis par $(a,b,c)=(22,31,17)$ et $(a,b,c)=(58,59,37)$.
Pour un triangle de type W_2 il faut que $v<u<2v$, d'où $(u,v)=(3,2)$ ou $(u,v)=(4,3)$ ou $(u,v)=(5,4)$ et il existe trois triangles définis par $(a,b,c)=(22,19,13)$, $(a,b,c)=(38,41,25)$ et $(a,b,c)=(58,71,41)$.

B – Entiers de la forme u^2-uv-v^2 et leurs diviseurs

1) On peut remarquer que l'une des solutions de l'équation $x^2-x-1=0$ est le nombre d'or, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
On a : $(u-\omega v)(u-\omega' v)=u^2-(\omega+\omega')uv+\omega\omega' v^2=u^2-uv-v^2$.
En appliquant cette factorisation à deux entiers $u_1^2-u_1v_1-v_1^2$ et $u_2^2-u_2v_2-v_2^2$ on obtient $(u_1^2-u_1v_1-v_1^2)(u_2^2-u_2v_2-v_2^2)=u^2-uv-v^2$ où $u=u_1u_2+v_1v_2$ et $v=u_1v_2+u_2v_1-v_1v_2$.
L'ensemble des entiers de la forme u^2-uv-v^2, où $u,v\in\mathbb{Z}$, est stable par multiplication.
On peut démontrer le même résultat pour les entiers de la forme $u^2+4uv-v^2$ en utilisant les solutions de l'équation $x^2+4x-1=0$.

2)

a) p divise u^2-uv-v^2. Avec la congruence modulo p, $u^2-uv-v^2\equiv 0$. On en déduit, d'une part, $4u^2-4uv-4v^2\equiv 0$ ou $(2u-v)^2\equiv 5v^2$, d'autre part, $4v^2+4uv-4u^2\equiv 0$ ou $(2v+u)^2\equiv 5u^2$.

b) q étant un entier supérieur à 2, d'après 2) a), $(2u-v)^{2q}\equiv 5^q v^{2q}$ ou $(2u-v)^{p-1}\equiv 5^q v^{p-1}$. Or, on peut appliquer le petit théorème de Fermat aux entiers $2u-v$ et v. En effet, p est un nombre premier supérieur à 5 et si p divise $2u-v$ ou v, d'après la relation $(2u-v)^2\equiv 5v^2$, il divise $2u-v$ et v, donc u et v. Ce qui est impossible car u et v sont premiers entre eux. Donc p ne divise pas $2u-v$ et $(2u-v)^{p-1}\equiv 1$, p ne divise pas v et $v^{p-1}\equiv 1$. D'où $5^q\equiv 1$.

c) L'entier j étant compris entre 1 et q, on considère la suite des divisions euclidiennes de $5j$ par p, $\begin{cases} 5j=pq_j+r_j \\ 1\leqslant r_j\leqslant 2q \end{cases}$, où r_j ne peut être nul car p est un nombre premier supérieur à 5 et j.
Si $1\leqslant r_j\leqslant q$, $f(j)=r_j$ donc $1\leqslant f(j)\leqslant q$ et $5j\equiv\varepsilon(j)f(j)$. Si $q+1\leqslant r_j\leqslant 2q$, $1\leqslant p-r_j\leqslant q$ donc $1\leqslant f(j)\leqslant q$ et $5j\equiv r_j-p=\varepsilon(j)f(j)$.
Soient deux entiers distincts j et j', compris entre 1 et q. On a $\begin{cases} 5j=pq_j+r_j \\ 5j'=pq_{j'}+r_{j'} \end{cases}$ et $f(j)=f(j')$ si et seulement si $r_j=r_{j'}$ ou $r_j=p-r_{j'}$.
Dans le premier cas p divise $5(j-j')$, ce qui est impossible. Dans le second cas, p divise

$5(j+j')$, ce qui est impossible car $3 \leqslant j+j' \leqslant p-2$.

On en déduit que les entiers $f(j)$ sont tous différents, ce sont les entiers compris entre 1 et q.

En multipliant les relations $5j \equiv \varepsilon(j)f(j)$, j variant de 1 à q, on obtient $5^q q! \equiv \left(\prod_{j=1}^{q} \varepsilon(j)\right) q!$.

D'après 2) b), $5^q \equiv 1$, d'où $q! \equiv \left(\prod_{j=1}^{q} \varepsilon(j)\right) q!$ ou $q!\left(\prod_{j=1}^{q} \varepsilon(j)-1\right) \equiv 0$. Or p ne divise pas $q!$ donc divise $\prod_{j=1}^{q} \varepsilon(j)-1$ et $\prod_{j=1}^{q} \varepsilon(j) = \prod_{\varepsilon(j)=-1} \varepsilon(j) \equiv 1$. D'autre part, $\prod_{\varepsilon(j)=-1} \varepsilon(j) = 1$ ou -1.

Si $\prod_{\varepsilon(j)=-1} \varepsilon(j) = -1$ alors $2 \equiv 0$, donc $\prod_{\varepsilon(j)=-1} \varepsilon(j) = 1$ et le nombre d'entiers j, compris entre 1 et q, tels que $\varepsilon(j) = -1$ est pair.

d) il s'agit de dénombrer les entiers j tels que $\varepsilon(j) = -1$ c'est-à-dire tels que $r_j > q$. Si l'on reprend les divisions euclidiennes de $5j$ par p, j variant de 1 à q, on observe que :

si $5j \leqslant q$ c'est-à-dire $5j < \frac{p}{2}$ ou $j < \frac{p}{10}$, $r_j \leqslant q$,

si $q+1 \leqslant 5j < p$ c'est-à-dire $\frac{p}{2} < 5j < p$ ou $\frac{p}{10} < j < \frac{2p}{10}$, $r_j > q$,

si $p \leqslant 5j \leqslant p+q$ c'est-à-dire $p < 5j < \frac{3p}{2}$ ou $\frac{2p}{10} < j < \frac{3p}{10}$, $r_j \leqslant q$,

si $p+q+1 \leqslant 5j < 2p$ c'est-à-dire $\frac{3p}{2} < 5j < \frac{4p}{2}$ ou $\frac{3p}{10} < j < \frac{4p}{10}$, $r_j > q$,

si $2p \leqslant 5j \leqslant 5q$ c'est-à-dire $\frac{4p}{2} < 5j < \frac{5p}{2}$ ou $\frac{4p}{10} < j < \frac{5p}{10}$, $r_j \leqslant q$.

Le nombre d'entiers j tels que $\varepsilon(j) = -1$ est donc le nombre d'entiers compris entre $\frac{p}{10}$ et $\frac{2p}{10}$ ou entre $\frac{3p}{10}$ et $\frac{4p}{10}$. Ces quotients n'étant pas entiers, ce nombre est égal à $\left[\frac{2p}{10}\right] - \left[\frac{p}{10}\right] + \left[\frac{4p}{10}\right] - \left[\frac{3p}{10}\right]$ qui est pair, d'après 2) c).

En posant $g(p) = \left[\frac{2p}{10}\right] - \left[\frac{p}{10}\right] + \left[\frac{4p}{10}\right] - \left[\frac{3p}{10}\right]$, on voit que $g(p+10) = g(p)+2$ donc $g(p+10)$ est pair si et seulement si $g(p)$ est pair. p étant un nombre premier impair supérieur ou égal à 7, il suffit, pour déterminer les valeurs possibles de p, de vérifier la parité de $g(p)$ pour $p = 7,\ 11,\ 13$ ou 19. Or seuls $g(11)$ et $g(19)$ sont pairs. Donc, nécessairement, $p = 11+10k$ ou $p = 19+10k$ où $k \in \mathbb{N}$.

3)

a) Si p est un diviseur premier impair de a, d'après A 2), p divise un entier de la forme $u^2 - uv - v^2$ et d'après B 2) d), $p \equiv 1$ ou 9 modulo 9.

Si $a = 2(u^2 + uv - v^2)$ on remplace v par –v.

b) Si p est un diviseur premier impair de b, d'après A 2), p divise un entier de la forme $u^2 + 4uv - v^2$ ou $-u^2 + 4uv + v^2$. Or, par exemple, $u^2 + 4uv - v^2 = (u+2v)^2 - 5v^2 = 5u^2 - (2u-v)^2$. Avec un raisonnement analogue à celui de la question B 2) on en déduit que $p \equiv 1$ ou 9 modulo 9.