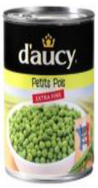
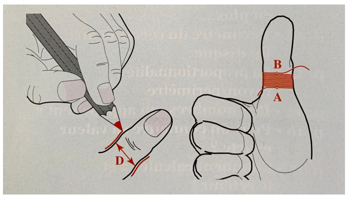
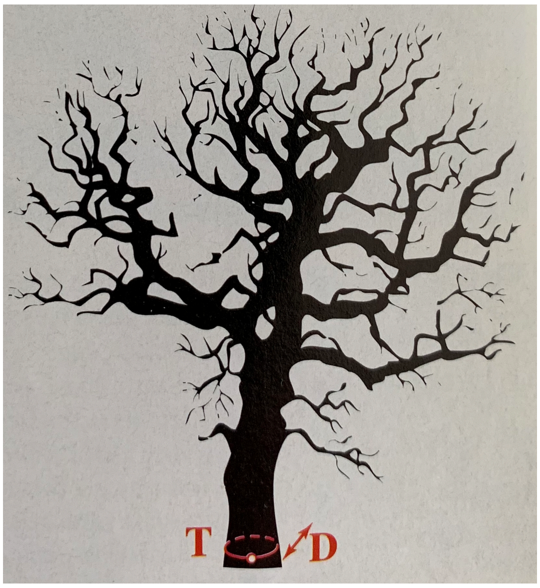
Le fabuleux nombre π

Il est célébré dans le monde entier le 14 mars (Pie day) et tire son nom de la première lettre du mot grec *περιφέρεια* "périmètre".
Il a pendant 4000 ans fasciné les mathématiciens notamment Archimède (287-212 av JC) qui fut le premier à en déterminer une estimation assez précise avec 2 décimales.

<u>Expériences</u> :
La classe sera répartie en plusieurs groupes (6) .
Vous allez mesurer soigneusement le diamètre de chaque objet, puis en enroulant une ficelle autour de chaque objet vous en mesurerez le contour.



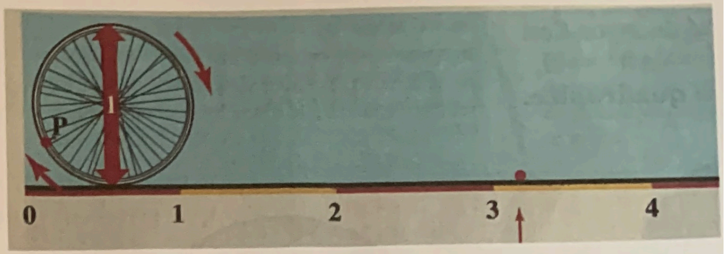




Objet	Pièce de 2€	Bâton de colle	CD	Boîte de conserve	Pouce	Tronc d'un arbre	Objet avec cercle trouvé à la maison	Roue
Diamètre								
Longueur de la ficelle (circonférence du cercle)						T≈		

Parmi les exemples précédents choisissez-en deux et calculer à la main le quotient de la longueur de la ficelle par le diamètre:

Pour la roue de vélo, un groupe utilisera la ficelle et un autre procèdera de la manière suivante:
Nous allons tracer avec du scotch adhésif une droite sur le sol, marquer au feutre un trait sur la bande correspondant au point de gonflage et dérouler la roue sur toute sa circonférence pour en mesurer sa longueur.



Expériences en classe et autour d'un arbre............

En salle informatique avec Open Office nous allons analyser le rapport de la circonférence du cercle (sa longueur) par son diamètre, suite aux résultats trouvés par tous les élèves.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Objet	Pièce de 2€	Bâton de colle	CD	Boîte de conserve	Pouce	Tronc d'arbre	Objet circulaire	Roue
2	Diamètre D								
3	Longueur L du cercle								
4	Longueur divisée par diamètre: L / D								
5									
6									
7									

Que remarquez- vous?

Conjecture:

Propriété:

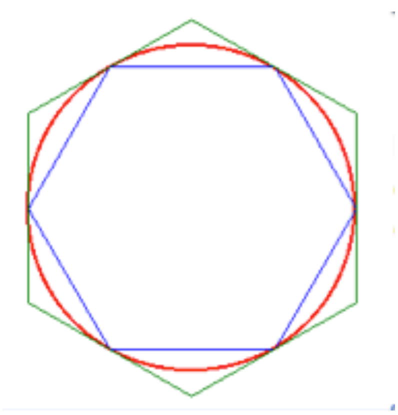
Le quotient du périmètre P d'un cercle par son diamètre D est constant et égal au nombre π ($\pi \approx 3{,}14$):

$P : D = \pi$ ou $\boxed{P = \pi \times D}$

Comme $D = 2 \times R$ (R rayon) alors $P = \pi \times D = \pi \times 2 \times R = 2 \times \pi \times R$

$\boxed{P = 2 \times \pi \times R}$

Histoire du nombre π:



Dans la Bible (livre des Rois), le nombre π est arrondi à 3.
Les babyloniens avaient il y a 4 mille ans déjà, en base 60, donné une approximation du nombre π au dixième.
Le premier mathématicien à expliciter et déterminer une bonne estimation du nombre π fut Archimède (287-212 Av JC). Etabli à Syracuse, il a défini une approximation du nombre π avec 2 chiffres après la virgule. Son ingénieuse méthode consistait à coincer un cercle de rayon 1 entre deux polygones réguliers pour lesquels on pouvait calculer le périmètre du polygone intérieur et celui du polygone extérieur en dédoublant chaque côté (6/12/24/48 et 96).
Par cette méthode, Archimède a ainsi réussi à encadrer le nombre π:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

Activité:

a) Ecrire $3+\frac{10}{71}$ et $3+\frac{1}{7}$ comme quotient de deux nombres entiers.

b) En augmentant le nombre de côtés indéfiniment vers quoi les polygones se rapprochent-ils?

c) Quel est le nom d'un polygone régulier à trois côtés? 5 côtés? 6 côtés ? dix côtés?

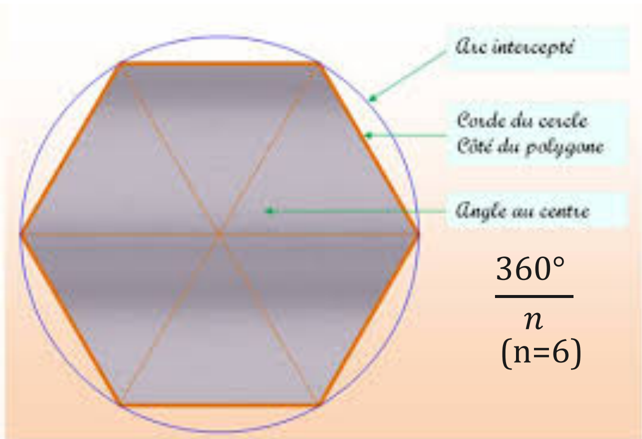
d) Pour un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon 1, déterminer son périmètre.
Même question pour un triangle équilatéral qui englobe le cercle de rayon 1.

Pour un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1, déterminer son périmètre.

e) La méthode D'Archimède consistait à encadrer la longueur d'un cercle de rayon 1 par des périmètres de polygones réguliers à 96 côtes inscrits et circonscrits à ce cercle. Retrouver par des calculs appropriés l'encadrement du nombre π au centième, en montrant que pour 96 côtés le périmètre du cercle de rayon 1 peut être compris entre $96\sin(\pi/96)$ et $96\tan(\pi/96)$, ou que la longueur d'un arc est comprise entre son sinus et sa tangente.

Prérequis:
. Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi médiatrice et axe de symétrie

. Si un polygone régulier à n côtés est inscrit dans un cercle alors l'angle au centre coupant chaque côté mesure $\frac{360°}{n}$.



Poésie et nombre π
Le nombre π peut aussi inspirer les poètes, y compris en proposant un moyen mnémotechnique de retenir ses décimales:

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages
3 , 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5
Glorieux Archimède, artiste ingénieux,
8 9 7 9
Toi de qui Syracuse aime encore la gloire,
3 2 3 8 4 6 2 6
Soit ton nom conservé par de savants grimoires!
4 3 3 8 3 2 7 9

Irrationnalité du nombre et transcendance:

Le nombre π a fasciné les mathématiciens car il n'obéissait pas aux critères de la raison de l'époque. En effet il n'est pas rationnel, c'est à dire qu'il ne peut s'écrire sous la forme d'un quotient d'un nombre entier par un autre nombre entier. Comme le nombre $\sqrt{2}$ d'ailleurs.
Ainsi les décimales du nombre π ne suivent pas un développement périodique comme tout nombre rationnel (comme $\frac{2}{3}$ par exemple: $\frac{2}{3} = 0{,}6666666......$)

Mais il possède une étrangeté supplémentaire que n'a pas $\sqrt{2}$:

$\sqrt{2}$ est solution de l'équation algébrique $x^2 = 2$

Or le nombre π n'est solution d'aucune équation algébrique (équation avec des coefficients entiers), il est **transcendeant** (il dépasse la raison).
De par cette propriété il a interrogé de nombreux philosophes!

Le nombre π au Lycée et à l'Université

. Périmètre d'un polygone régulier inscrit dans un cercle avec le théorème d'Al- Kaachi (qui détermine en 1429 14 décimales du nombre π)

.Formules de Wallis

.Séries et nombre π: Formule de Leibnitz

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^k}{2k+1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$ (formule de Madhava, Gregory et Leibniz)