Collection

1 Problème

Un fabricant de produits frais propose à ses acheteurs potentiels de constituer la carte de la France, basée sur ses 101 départements proposés sous forme d'aimantins.
On se propose de déterminer le nombre moyen de produits que doit se procurer un client isolé n'ayant aucune possibilité d'échange pour obtenir la carte complète.

2 Résolution

2.1 Matrice de transition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre total d'aimantins à collectionner (101 dans le cas présent) et soit k le nombre d'aimantins distincts possédé par le client ; on a $k \in [\![0; n]\!]$.
Si le client possède k aimantins après un certain nombre d'achats, alors la probabilité d'obtenir un double à l'achat suivant est $\frac{k}{n}$ et la probabilité d'obtenir un aimantin nouveau à l'achat suivant est $\frac{n-k}{n}$.
La matrice de transition associée M, dans laquelle l'état k représente le nombre d'aimantins distincts déjà acquis, est d'ordre $n+1$ et est donnée par

$$M = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 & n & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & n-1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & n-2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-2 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & n-1 & 1 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

M est une matrice triangulaire d'ordre $n+1$ ayant ses $n+1$ valeurs propres $\left(\frac{k}{n}\right)_{k\in[\![0;n]\!]}$ sur sa diagonale. M est donc diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe donc une matrice P inversible d'ordre $n+1$ telle que $M = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale sur laquelle on a les valeurs propres $\left(\frac{k}{n}\right)_{k\in[\![0;n]\!]}$.

2.2 Matrice de passage

Soit $P = (x_{i,j})$ la matrice définie pour tout $(i,j) \in [\![1;n+1]\!]^2$ par

$$\begin{cases} x_{i,j} = 0 & \text{si } j < i \\ x_{i,j} = \binom{n-i+1}{j-i} & \text{si } j \geqslant i \end{cases}$$

Montrons que P est inversible, en considérant la matrice $Q = (y_{i,j})$ définie pour tout $(i,j) \in [\![1;n+1]\!]^2$ par

$$\begin{cases} y_{i,j} = 0 & \text{si } j < i \\ y_{i,j} = (-1)^{i+j} x_{i,j} & \text{si } j \geqslant i \end{cases}$$

et en montrant que $PQ = I_{n+1}$. Posons $PQ = (z_{i,j})$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1;n+1]\!]^2$,

$$z_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} x_{i,k} \times y_{k,j}$$

Pour que $x_{i,k} \times y_{k,j} \neq 0$, il faut que que l'on ait $k \geqslant i$ et $j \geqslant k$, c'est-à-dire $i \leqslant k \leqslant j$, ce qui n'est possible que si $j \geqslant i$.
On en déduit que, pour tout $i \in [\![1;n+1]\!]$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $j < i$, on a $z_{i,j} = 0$.
PQ est donc une matrice triangulaire supérieure.
Pour tout $i \in [\![1;n+1]\!]$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $j \geqslant i$,

$$z_{i,j} = \sum_{k=i}^{j} \binom{n-i+1}{k-i} \times (-1)^{k+j} \binom{n-k+1}{j-k}$$

Lorsque $i = j$, on obtient

$$\begin{aligned} z_{i,i} &= \binom{n-i+1}{0} \times (-1)^{2i} \binom{n-i+1}{0} \\ z_{i,i} &= 1 \end{aligned}$$

La diagonale de PQ ne contient donc que la valeur 1.
Pour tout $i \in [\![1;n+1]\!]$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $j > i$,

$$\begin{aligned} z_{i,j} &= \sum_{k=i}^{j} \frac{(n-i+1)!}{(n-i+1-k+i)! \times (k-i)!} \times (-1)^{j+k} \times \frac{(n-k+1)!}{(n-k+1-j+k)! \times (j-k)!} \\ z_{i,j} &= (-1)^j \sum_{k=i}^{j} \frac{(n-i+1)!}{(n-k+1)! \times (k-i)!} \times (-1)^k \times \frac{(n-k+1)!}{(n-j+1)! \times (j-k)!} \\ z_{i,j} &= \frac{(n-i+1)!}{(n-j+1)!} \sum_{k=i}^{j} \frac{(-1)^k}{(k-i)! \times (j-k)!} \\ z_{i,j} &= \frac{(n-i+1)!}{(n-j+1)! \times (j-i)!} \sum_{k=i}^{j} \frac{(-1)^k \times (j-i)!}{(k-i)! \times (j-k)!} \end{aligned}$$

Posons $s_{i,j} = \sum_{k=i}^{j} \frac{(-1)^k \times (j-i)!}{(k-i)! \times (j-k)!}$ et montrons que $s_{i,j} = 0$.
Pour tout $i \in [\![1; n+1]\!]$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $j > i$,

$$\begin{array}{rcl}
s_{i,j} & = & \displaystyle\sum_{k=i}^{j} (-1)^k \times \binom{j-i}{j-k} \\
s_{i,j} & = & \displaystyle\sum_{k'=0}^{j-i} (-1)^{k'+i} \times \binom{j-i}{j-i-k'} \text{ en posant } k' = k-i \\
s_{i,j} & = & (-1)^i \displaystyle\sum_{k'=0}^{m} (-1)^k \times \binom{m}{m-k'} \text{ en posant } m = j-i \\
s_{i,j} & = & (-1)^i \times (1 + (-1))^m \\
s_{i,j} & = & 0
\end{array}$$

Ainsi,pour tout $i \in [\![1; n+1]\!]$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $j > i$, $z_{i,j} = 0$ et on a $PQ = I_{n+1}$.
On montre de même que $QP = I_{n+1}$ donc P est inversible de matrice inverse $P^{-1} = Q$.
Soit D la matrice diagonale sur laquelle on a l'ensemble ordonné $\left\{\frac{k}{n}, k \in [\![0; n]\!]\right\}$.
Montrons que $M = PDP^{-1}$.
Posons $D = (d_{i,j})$ et $PD = (a_{i,j})$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1; n+1]\!]^2$,

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} x_{i,k} \times d_{k,j}$$

et, pour tout $j \in [\![1; n+1]\!]$,

$$\left\{\begin{array}{rcll}
d_{k,j} & = & 0 & \text{si } k \neq j \\
d_{j,j} & = & \frac{j-1}{n} & \text{sinon}
\end{array}\right.$$

On en déduit que, pour tout $(i,j) \in [\![1; n+1]\!]^2$,

$$a_{i,j} = \frac{j-1}{n} x_{i,j}$$

Posons maintenant $PDP^{-1} = (b_{i,j})$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1; n+1]\!]^2$,

$$\begin{array}{rcl}
b_{i,j} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_{i,k} \times y_{k,j} \\
b_{i,j} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{n} x_{i,k} \times y_{k,j}
\end{array}$$

Pour que $x_{i,k} \times y_{k,j} \neq 0$ il faut que l'on ait $k \geqslant i$ et $k \leqslant j$ c'est-à-dire $i \leqslant k \leqslant j$, ce qui n'est possible que si $j \geqslant i$.
On en déduit que, pour tout $i \in [\![1; n+1]\!]$ et tout entier j tel que $1 \leqslant j < i$, $b_{i,j} = 0$. Ainsi, PDP^{-1}est donc une matrice triangulaire supérieure.
Pour tout $i \in [\![1; n+1]\!]$ et tout entier j tel que $j \geqslant i$,

$$\begin{array}{rcl} b_{i,j} & = & \displaystyle\sum_{k=i}^{j} \frac{k-1}{n} \binom{n-i+1}{k-i} \times (-1)^{k+j} \binom{n-k+1}{j-k} \\ b_{i,j} & = & \displaystyle\sum_{k=i}^{j} \frac{k-1}{n} \times \frac{(n-i+1)!}{(n-i+1-k+i)! \times (k-i)!} \times (-1)^{j+k} \times \frac{(n-k+1)!}{(n-k+1-j+k)! \times (j-k)!} \\ b_{i,j} & = & \displaystyle\frac{(-1)^j}{n} \times \frac{(n-i+1)!}{(n-j+1)!} \sum_{k=i}^{j} \frac{(k-1) \times (-1)^k}{(k-i)! \times (j-k)!} \end{array}$$

Lorsque $j = i$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} b_{i,i} & = & \displaystyle\frac{(-1)^i}{n} \times \frac{(n-i+1)!}{(n-i+1)!} \times \frac{(k-1) \times (-1)^i}{0! \times 0!} \\ b_{i,i} & = & \displaystyle\frac{(-1)^{2i}}{n} \times (i-1) \\ b_{i,i} & = & \displaystyle\frac{i-1}{n} \\ b_{i,i} & = & m_{i,i} \end{array}$$

où $M = (m_{i,j})$.
Lorsque $j = i+1$,

$$\begin{array}{rcl} b_{i,i+1} & = & \displaystyle\frac{(-1)^{i+1}}{n} \times \frac{(n-i+1)!}{(n-i)!} \left(\frac{(i-1) \times (-1)^i}{0! \times 1!} + \frac{i \times (-1)^{i+1}}{1! \times 0!} \right) \\ b_{i,i+1} & = & \displaystyle\frac{(-1)^i \times (-1) \times (n-i+1)}{n} \times (-1)^i \times (i-1-i) \\ b_{i,i+1} & = & \displaystyle\frac{n-i+1}{n} \\ b_{i,i+1} & = & m_{i,i+1} \end{array}$$

Il reste donc à montrer que, pour tout $i \in [\![1; n+1]\!]$ et tout entier j tel que $j - i \geqslant 2$, $b_{i,j} = 0$.
On pose, pour tout $i \in [\![1; n+1]\!]$, et tout $j \in [\![1; n+1]\!]$, $j = i + r$ où r est un entier supérieur ou égal à 2.

$$b_{i,j} = \frac{(-1)^j}{n \times (j-i)!} \times \frac{(n-i+1)!}{(n-j+1)!} \sum_{k=i}^{j} \frac{(k-1) \times (-1)^k \times (j-i)!}{(k-i)! \times (j-k)!}$$

Posons, $t_{i,j} = \sum_{k=i}^{j} \frac{(k-1) \times (-1)^k \times (j-i)!}{(k-i)! \times (j-k)!}$.

On a

$$\begin{array}{rcll} t_{i,j} & = & \sum_{k'=0}^{j-i}(-1)^{k'+i}(k'+i-1)\frac{(j-i)!}{k'!\times(j-i-k')!} & \text{en posant } k'=k-i \\ t_{i,j} & = & \sum_{k'=0}^{j-i}(-1)^{k'+i}(k'+i-1)\binom{j-i}{k} & \\ t_{i,j} & = & (-1)^i\sum_{k'=0}^{p}(-1)^{k'}(k'+i-1)\binom{p}{k} & \text{en posant } p=j-i \\ t_{i,j} & = & (-1)^i\sum_{k'=0}^{p}(-1)^{k'}k'\binom{p}{k}+(-1)^i\sum_{k'=0}^{m}(-1)^{k'}(i-1)\binom{p}{k} & \end{array}$$

On a déjà montré précédemment que $\sum_{k'=0}^{p}(-1)^{k'}(i-1)\binom{p}{k}=0$.
Il s'ensuit que

$$\begin{array}{c} t_{i,j}=(-1)^i\sum_{k'=1}^{p}(-1)^{k'}k'\frac{p!}{(k'-1)!\times(p-k')!} \\ t_{i,j}=(-1)^i p\sum_{k'=1}^{p}(-1)^{k'}k'\frac{(p-1)!}{(k'-1)!\times(p-k')!} \\ t_{i,j}=(-1)^{i+1}p\sum_{k''=0}^{p-1}(-1)^{k''}k'\binom{p-1}{k''}k'' \quad \text{en posant } k''=k'-1 \end{array}$$

qui est nul lorsque $p-1>0$, soit $j-i-1>0$ c'est-à-dire $j \geqslant i+2$.
On a ainsi démontré que $M=PDP^{-1}$.

2.3 Matrice puissance

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire M sous la forme

$$M=\left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline O & I \end{array}\right)$$

où

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{n} & \frac{n-2}{n} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{n-2}{n} & \frac{2}{n} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

O est la matrice ligne nulle de dimension n et $I=(1)$.

2.3.1 Multiplication de matrices par blocs

Soit m, n et p trois entiers naturels non nuls et A, B des matrices de dimensions respectives (m,n) et (n,p).
On suppose que A et B peuvent se décomposer sous la forme

$$A=\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)$$

et

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right)$$

où $(A_i)_{i \in [\![1;4]\!]}$, $(B_i)_{i \in [\![1;4]\!]}$ sont huit matrices.
On montre que

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ \hline A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{array}\right)$$

2.3.2 Calcul par blocs de la matrice puissance

On établit par récurrence, que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$M^p = \left(\begin{array}{c|c} Q^p & \sum_{k=0}^{p-1} Q^k R \\ \hline O & I \end{array}\right)$$

Q est la sous-matrice supérieure gauche issue de M de dimension n ; elle admet pour ensemble de valeurs propres $\left\{\frac{k}{n}\right\}_{k \in [\![0;n-1]\!]}$. Cet ensemble contenant n valeurs distinctes, Q est diagonalisable et il existe une matrice S inversible telle que $Q = SDS^{-1}$ où S est la matrice diagonale définie par $\left\{\frac{k}{n}\right\}_{k \in [\![0;n-1]\!]}$.
Il s'ensuit que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $Q^p = SD^pS^{-1}$.
Puisque, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $0 \leqslant \frac{k}{n} < 1$, on en déduit que

$$\lim_{p \to +\infty} Q^p = O$$

D'autre part, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\sum_{k=0}^{p-1} Q^p\right)(I - Q) = I - Q^p$$

donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{p-1} Q^p = (I - Q^p)(I - Q)^{-1}$$

et $I - Q$ est inversible puisque cette matrice admet n valeurs propres distinctes définies par $\left\{\frac{n-k}{n}\right\}_{k \in [\![0;n-1]\!]}$.
Puisque $\lim_{p \to +\infty} Q^p = O$, on en déduit que

$$\lim_{p \to +\infty} M^p = \left(\begin{array}{c|c} O & (I - Q)^{-1}R \\ \hline O & I \end{array}\right)$$

2.3.3 Inverse de $I - Q$

On a

$$I - Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n-1}{n} & -\frac{n-1}{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n-2}{n} & -\frac{n-2}{n} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{2}{n} & -\frac{2}{n} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Soit V la matrice définie par

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{n-1} & \frac{n}{n-2} & \cdots & \cdots & n \\ 0 & \frac{n}{n-1} & \frac{n}{n-2} & \frac{n}{n-3} & \cdots & n \\ 0 & 0 & \frac{n}{n-2} & \frac{n}{n-3} & \cdots & n \\ \vdots & & & \ddots & \cdots & n \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

Montrons que V est l'inverse de $I - Q = U$. Posons $U = (u_{i,j})$, $V = (v_{i,j})$ et $W = UV$, $W = (w_{i,j})$.
Pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]$,

$$w_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} u_{i,k} \times v_{k,j}$$

Si $i \neq j$, alors

$$\begin{aligned} w_{i,j} &= \frac{n+1-i}{n} \times \frac{n}{n+1-i} - \frac{n+1-i}{n} \times \frac{n}{n+1-i} \\ w_{i,j} &= 0 \end{aligned}$$

et si $i = j$ alors

$$\begin{aligned} w_{i,i} &= \frac{n+1-i}{n} \times \frac{n}{n+1-i} \\ w_{i,i} &= 1 \end{aligned}$$

donc $W = I$ soit $UV = I$. On montre de même que $VU = I$ et on en déduit que $V = U^{-1}$.

2.3.4 Conclusion

Du résultat précédent on déduit que

$$\lim_{p \to +\infty} M^p = \left(\begin{array}{c|c} O & VR \\ \hline O & I \end{array} \right)$$

Le nombre moyen d'achats $\overline{m}$ est donc

$$\overline{m} = 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \cdots + \frac{n}{2} + n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k}$$

c'est-à-dire

$$\overline{m} = n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

3 Loi géométrique

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de produits à acheter pour obtenir exactement n aimantins distincts.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le nombre de produits à acheter pour avoir un k^{e} aimantin distinct des $k-1$ aimantins distincts déjà possédés par le client.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1;n]\!]$. $X_k = j$ signifie que le client a acheté $j-1$ produits contenant un aimantin au moins en double parmi les $k-1$ déjà en sa possession et qu'il a obtenu un aimantin différent parmi les $n-k+1$ au j^{e} achat.
On en déduit que

$$\begin{aligned} p(X=j) &= \frac{(k-1)^{j-1} \times (n-k+1)}{n^j} \\ p(X=j) &= \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k suit la loi géométrique de paramètre $\frac{n-k+1}{n}$ donc son espérance est

$$E\left(X_k\right) = \frac{n}{n-k+1}$$

Puisque $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ on en déduit que

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} E\left(X_k\right) \\ E(X) &= n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} \\ E(X) &= n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre moyen N de produits qu'il faut acheter pour posséder les 101 aimantins représentant la carte complète des départements français est $\sum_{k=1}^{101} \frac{1}{k}$ soit

$$N = \frac{14639190792407439662689546747109297683610083}{2788815009188499086581352357412492142272}$$

soit 525 produits arrondi à l'unité.

4 Ressources *euler*

- Calcul matriciel
- Temps d'attente de complétion d'une collection
- Calculs matriciels associés à la complétion d'une collection