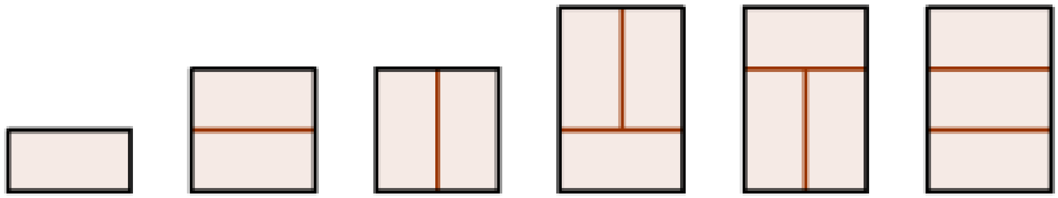
Concours par équipe 2023

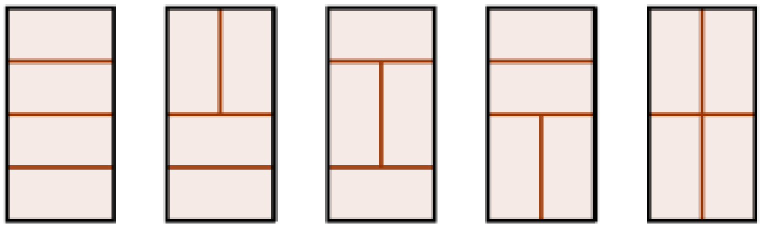
Éléments de solution

Exercice 1

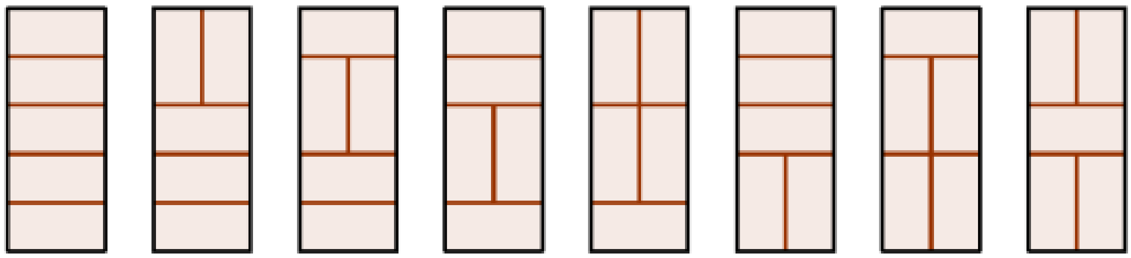
1. Voici, ci-dessous, toutes les organisations possibles pour $n = 1, n = 2\ et\ n = 3$:



On en déduit $A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = 3$.
On fait de même pour $n = 4$:



Et on trouve $A_4 = 5$ puis pour $n = 5$:



Et on trouve $A_5 = 8$.

2. Pour tout entier naturel n, si on cherche à constituer toutes les organisations possibles pour un rectangle de longueur $n + 2$, on peut s'intéresser aux deux premières lignes (en bas) du rectangle et on considère deux cas :
   - On commence par placer un rectangle horizontal dans la première ligne. Le nombre d'organisations qui possèdent un tel rectangle horizontal en première ligne est alors le nombre d'organisations pour un rectangle de longueur $n + 1$, soit A_{n+1}.
   - On commence par placer deux rectangles verticaux dans les deux premières lignes. Reste alors à organiser les n lignes restantes, ce qui peut se faire de A_n manières.

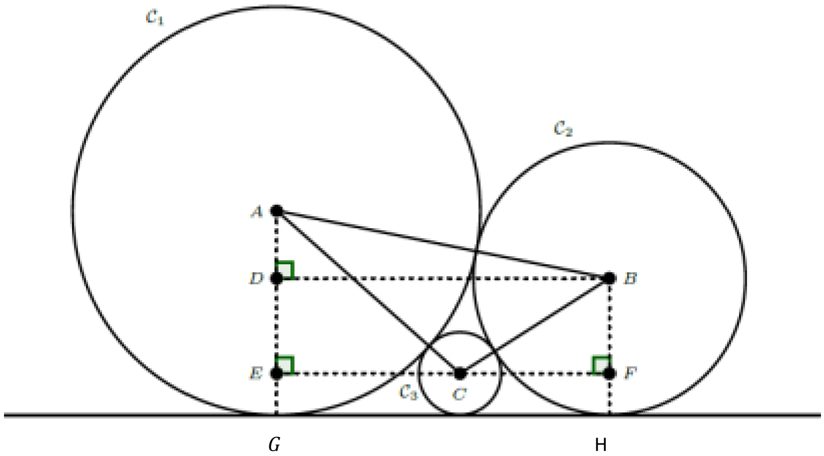
   On a donc, pour tout entier n non nul $A_{n+2} = A_{n+1} + A_n$.

3. Il suffit de calculer tous les nombres A_n jusqu'à A_{12} en s'appuyant sur la relation précédente.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Julie peut donc remplir un rectangle de largeur 2 et de longueur 12 de 233 manières possibles.

Exercice 2



1. Les points A et B sont les centres de deux cercles tangents extérieurement, donc la longueur du segment $[AB]$ est la somme des rayons de ces deux cercles, soit $\boldsymbol{AB = a + b}$.

De même, $\boldsymbol{BC = b + c}$ et $\boldsymbol{AC = a + c}$.

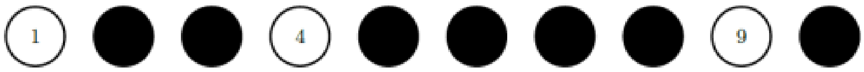
D'autre part, par définition des points E et F, comme les droites (AE) et (BF) sont perpendiculaires à la droite modélisant le sol, les droites (CE) et (CF) sont parallèles et même confondues et le point C appartient à la droite (EF) qui est parallèle à la droite modélisant le sol.

On en déduit que si G et H sont les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur la droite modélisant le sol, $BDEF$ et $FEGH$ sont des rectangles et $\boldsymbol{AE = a - c}$, $\boldsymbol{BF = b - c}$ et $\boldsymbol{AD = a - b}$.

2. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AEC rectangle en E, on peut écrire :
   $AC^2 = AE^2 + EC^2$ soit $EC^2 = (a+c)^2 - (a-c)^2 = 4ac$ donc $EC = \sqrt{4ac} = 2\sqrt{ac}$.
   De même, dans le triangle BFC rectangle en C :
   $CF^2 = CB^2 - BF^2 = (b+c)^2 - (b-c)^2 = 4bc$ d'où $CF = 2\sqrt{bc}$.
3. On a vu que le quadrilatère $BDEF$ est un rectangle donc $EF = BD$. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABD rectangle en D, on peut écrire :
   $EF^2 = BD^2 = AB^2 - AD^2$, soit, puisque C appartient au segment $[EF]$,
   $(EC + CF)^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$, soit $\left(2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}\right)^2 = 4ab$ soit $\left(\sqrt{ac} + \sqrt{bc}\right)^2 = ab$, c'est-à-dire $ab = ac + bc + 2\sqrt{acbc} = ac + bc + 2c\sqrt{ab}$ (car $\sqrt{acbc} = \sqrt{abc^2} = \sqrt{ab} \times \sqrt{c^2} = c\sqrt{ab}$), soit, après avoir factorisé par c (qui est non nul),
   $$c = \frac{ab}{a + b + 2\sqrt{ab}}$$
4. On applique la formule précédente pour $a = 3$ et $b = 2$ pour trouver $c = \frac{6}{5+2\sqrt{6}}$.
   Au centimètre près, on obtient $c \approx 0{,}61$ mètre (0,6 est également acceptable, comme tout résultat compris entre 0,596 et 0,616)

Exercice 3

1. On donne la liste de tous les diviseurs des 10 premiers entiers naturels non nuls :
   Diviseur de 1 : 1 Diviseurs de 2 : 1,2 Diviseurs de 3 : 1,3 Diviseurs de 4 : 1, 2, 4
   Diviseurs de 5 : 1,5 Diviseurs de 6 : 1, 2, 3, 6 Diviseurs de 7 : 1,7
   Diviseurs de 8 : 1, 2, 4, 8 Diviseurs de 9 : 1, 3, 9 Diviseurs de 10 : 1, 2, 5, 10
   Une pièce portant le numéro n est retournée à chaque passage qui correspond à un diviseur de n différent de 1. Par exemple, la pièce portant le numéro 6 est retournée trois fois car 6 a trois diviseurs différents de 1 : 2, 3 et 6.
   On remarque de plus que :
   • Si une pièce est retournée un nombre pair de fois, elle sera face blanche vers le haut après le dernier passage.
   • Si une pièce est retournée un nombre impair de fois, elle sera face noire vers le haut après le dernier passage.
   Les pièces 1, 4 et 9 qui ont un nombre de diviseurs (différents de 1) pair seront donc face blanche vers le haut après le dernier passage. Les pièces 2, 3, 5, 7, 8 et 10 qui ont un nombre de diviseurs (différents de 1) impair seront donc face noire vers le haut après le dernier passage.
   On a donc, après le dernier passage :



2. Si une pièce porte un numéro qui est un nombre premier. Comme, un nombre premier n'a qu'un seul diviseur autre que 1, la pièce portant ce numéro n'est retournée qu'une fois pour rester noire jusqu'au dernier passage.
3. Le nombre 12 a pour diviseurs 1, 2, 3, 4, 6 et 12 donc cinq diviseurs autres que 1. La pièce portant le numéro 12 sera donc retournée 5 fois et sera noire après le dernier passage.
   Le nombre 25 a pour diviseurs 1, 5 et 25 donc deux diviseurs autres que 1. La pièce portant le numéro 25 sera donc retournée deux fois et sera blanche après le dernier passage.
   Le nombre 72 a pour diviseurs 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. Le nombre 72 a donc 11 diviseurs différents de 1 et la pièce correspondante sera donc retournée 11 fois durant les différents passages. Après le dernier passage, la pièce numéro 72 sera retournée un nombre impair de fois et donc face noire vers le haut.
   Le nombre 81 a pour diviseurs 1, 3, 9, 27, 81. Il a donc 4 diviseurs autres que 1. Après le dernier passage, la pièce numéro 81 sera donc retournée un nombre pair de fois et donc face blanche vers le haut.
4. Montrons que les carrés sont retournés un nombre pair de fois durant les différents passages et que seules les pièces portant un numéro qui est un carré sont face blanche vers le haut après le dernier passage.
   - Supposons tout d'abord que n est un carré, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel q tel que $n = q^2$.
   Or si d est un diviseur de n, alors il existe un entier d' tel que $n = dd'$ et donc d' est aussi un diviseur de n et les diviseurs de n vont par paires sauf le diviseur q. Si on retire le diviseur 1, au final le nombre n a un nombre pair de diviseurs autres que 1 et la pièce portant le numéro n est retournée un nombre pair de fois donc face blanche vers le haut après le dernier passage.
   - Réciproquement, soit n un entier naturel non nul. Si la pièce portant le numéro n est retournée face blanche vers le haut après le dernier passage, c'est que n admet un nombre pair de diviseurs différents de 1, donc un nombre impair de diviseurs en comptant 1. Or, comme le nombre n admet toujours des diviseurs allant par paire, sauf dans le cas d'un diviseur formant un couple (q, q) tel que $n = q^2$, la seule façon pour n d'avoir un nombre pair de diviseurs autres que 1 est d'être un carré.

   On a donc montré que les seules pièces à être retournées face blanche vers le haut après le dernier passage sont les pièces portant un numéro qui est un carré.