CRM 2023 Éléments de solution

Exercice 1 L'esprit de la lettre

1. ***a.*** Pour le mot ETUDE, en conservant le E initial et le E final, il y a autant de mots possibles que des permutations des lettres T, U et D, soit 6 : TUD, TDU, DUT, DTU, UDT et UTD.

b. Pour le mot HUMAIN, on conserve le H et le N et on compte les permutations des quatre lettres U, M, A et I. Il y en a 24 (de gauche à droite dans l'écriture, on a 4 possibilités pour la première lettre, 3 pour la deuxième, 2 pour la troisième et $4 \times 3 \times 2 = 24$.

c. Le mot de trois lettres n'offre qu'une possibilité et pour les deux autres, on doit compter les permutations des lettres centrales, 5 lettres pour l'un, quatre pour l'autre. Au total, $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 2\ 880$ phrases possibles en conservant l'ordre des mots.

2. Si n est inférieur ou égal à 3, il n'y a qu'une écriture possible. Si $n \geq 3$, on compte les permutations des $(n-2)$ lettres centrales. Il y en a $(n-2)(n-3) \ldots 3 \times 2 \times 1$. Ce nombre est appelé la factorielle de $(n-2)$, est noté $(n-2)!$, ce qu'on lit « factorielle $(n-2)$ ».

3. Chacune des permutations des $(n-2)$ lettres apparaît deux fois, deux lettres identiques étant interchangeables. Le nombre cherché est donc $(n-2)(n-3) \ldots 4 \times 3$.

Exercice 2 Lecture inversée

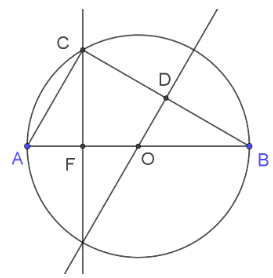
1. Oui. Le nombre N' ne s'écrit qu'avec 3 chiffres si son chiffre des milliers putatif (le chiffre des unités de N, donc) est 0. Par exemple, si $N = 4530$ alors $N' = 354$ et N' s'écrit avec trois chiffres.

2. L'égalité $N' = 5N$ n'est envisageable que si $N < 2\ 000$, ce qui exige que le chiffre des milliers de N soit 1. Mais alors, le chiffre des unités de N' est aussi 1, ce qui ne se peut pas pour un multiple de 5. Il n'y a donc pas de solution à cette équation.

3. L'égalité $N' = 4N$ n'est envisageable que si $N < 2\ 500$, ce qui exige que le chiffre des milliers de N soit 1 ou 2. Mais N' étant un multiple de 4, son chiffre des unités ne peut pas être 1. Ce multiple de 4 a donc comme chiffre des unités 2, ce qui limite à 3 ou 8 les possibilités pour le chiffre des unités de N. Mais, comme $N \geq 2\ 000$, N'est nécessairement supérieur à 8 000 et le chiffre des unités de N ne peut être 3. Si on écrit $N = 2\ 000 + 100b + 10c + 8$, b et c étant des chiffres, on obtient $N' = 8\ 000 + 400b + 40c + 32 = 8\ 000 + 100c + 10b + 2$, ou encore $390b = 60c - 30$. De $13b = 2c - 1$, on déduit $b = 1$ et $c = 7$. Le nombre cherché est 2 178.

Exercice 3 Quel est le rayon du cercle ?

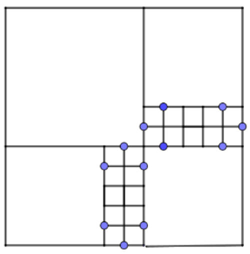
1. Par définition des points D et F, les triangles CFO et CDO sont rectangles respectivement en F et D. Ils ont un côté commun, le segment [CO] et OD = OF. On en déduit qu'ils sont isométriques.
La droite (DO) est la médiatrice du segment [BC] donc les triangles OCB et OBD sont rectangles en D, ont le côté [OD] en commun et DC = DB.
On en déduit qu'ils sont isométriques. Donc le triangle ODB est isométrique au triangle OFC.



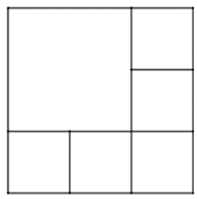
2. Les angles $\widehat{OBD}, \widehat{OCF}, \widehat{OCD}$ ont même mesure, et, en se plaçant dans le triangle CFB, leur somme est supplémentaire de l'angle droit $\widehat{BFC}$ (le triangle BFC est rectangle en F). Leur mesure est donc 30°.

Le triangle OFC est rectangle et ses angles aigus mesurent 30° et 60°. C'est ce qu'on appelle « un demi triangle « équilatéral », OF est donc la moitié de OC. Le rayon du cercle est 14.

Exercice 4 Carrément carré

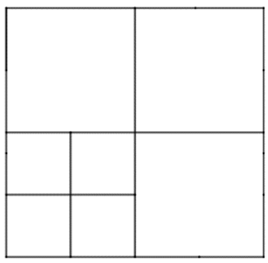


1. a. La figure ci-contre à gauche montre 24 carrés (quand on « coupe en 4 » un carré, on ajoute 3 carrés).



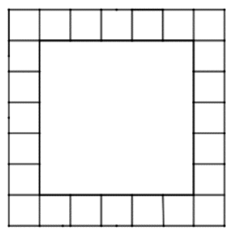
b. La figure de droite montre un dallage comportant 6 carrés. La figure ci-dessous à droite montre un dallage comportant 7 carrés.

c. Deux carrés auraient un côté commun ou le support d'un côté en commun. Dans les deux cas, la figure formée par l'ensemble n'est pas un carré (rectangle de longueur égale à deux fois la largeur ou polygone non convexe). Trois carrés formeraient aussi un rectangle non carré ou un polygone non convexe.



d. Comme dit plus haut, « couper un carré en quatre carrés » revient à ajouter 3 carrés. Si on peut réaliser un dallage de $1 + 3n$ carrés, on peut par ce procédé ajouter 3 carrés et obtenir $1 + 3n + 3 = 1 + 3(n + 1)$ carrés et ainsi de proche en proche à partir de 1.

2. a. Dans le cas de la figure 2, le dallage est constitué de 4 petits carrés sur le côté, ce qui donne 12 petits carrés et 1 grand, soit au total 13 carrés.
Si on prend 5 petits carrés sur chaque côté, on aura au total $5 + 5 + 3 + 3 + 1 = 17$ carrés.
Pour 6 petits carrés sur chaque côté, on aura au total $6 + 6 + 4 + 4 + 1 = 21$ carrés.
Pour 7 petits carrés sur chaque côté, on aura au total $7 + 7 + 5 + 5 + 1 = 25$ carrés.



b. Plus généralement, s'il y a n carrés sur un côté, il y en a $(n - 1)$ sur les côtés adjacents et $(n - 2)$ sur le côté opposé : au total $1 + n + 2 \times (n - 1) + (n - 2) = 4n - 3$ carrés (en n'oubliant pas le carré central).