

Sommaire

I Suites complexes et orbites	2
I.1 Une relation de récurrence	2
I.2 Cas où c est nul	2
I.3 Cas général	5
II Quelques ensembles fractals	7
II.1 Un peu de vocabulaire	7
II.2 Partition du plan complexe	8
II.3 Algorithme et représentation	10
II.4 Connexité	11
III Un ensemble pour les gouverner tous	13
III.1 Une nouvelle partition du plan	13
III.2 Algorithme et représentation	14
III.3 Pour aller plus loin	16
IV Appendices	17
IV.1 Pierre Fatou (1878-1929)	17
IV.2 Gaston Julia (1893 -1978)	18
IV.3 Georg Cantor (1845-1918) et son célèbre ensemble triadique	19
IV.4 Benoit Mandelbrot (1924-2010)	20
IV.5 Adrien Douady (1935-2006)	22
V Documentation	23

Prologue :

Le but de ce document est de présenter au lecteur un moyen de construire et représenter certains types d'ensemble fractals, pour cela les seuls pré-requis nécessaires sont les notions de nombres complexes et de suites actuellement étudiées en Terminale S, ainsi qu'un soupçon de curiosité.

Les rares éléments dépassant ce cadre seront introduits ici, au moins de manière intuitive. Par ailleurs, on ne peut guère parler mathématiques sans faire mention à des mathématiciens célèbres, ne serait-ce que parce que les objets étudiés portent leurs noms, aussi l'on trouvera des précisions en appendice que le lecteur est invité à consulter en suivant l'ordre dans lequel ils sont numérotés.

I Suites complexes et orbites

I.1 Une relation de récurrence

Soit c dans \mathbb{C} , on note $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la valeur complexe initiale z_0 et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = z_n^2 + c$.

Remarque 1

Il s'agit ici d'une suite de nombre complexes, ce n'est pas une notion fondamentalement différente des suites réelles étudiées au lycée, en effet ces dernières associent à un entier naturel n un nombre réel, dans notre cas on lui associe un nombre complexe.

Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux différents comportements possibles de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selon la valeur initiale choisie.

Pour ce faire, il est essentiel de bien comprendre d'une part la transformation $z \mapsto z^2$ (section I.1), et d'autre part $z \mapsto z + c$ (section I.2).

I.2 Cas où c est nul

La suite étudiée devient :

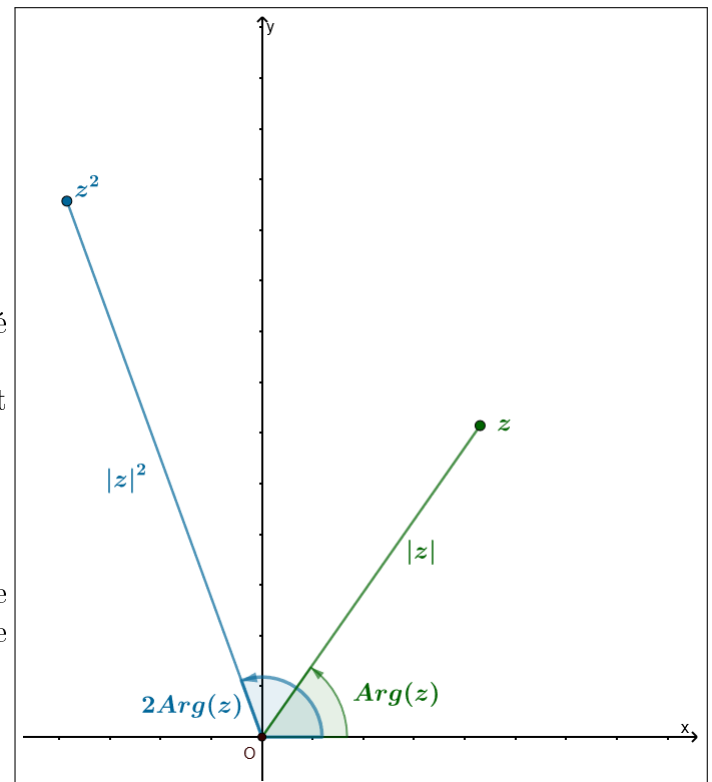
$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{C} \\ z_{n+1} = z_n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Que se passe-t-il lorsqu'un nombre complexe est élevé au carré ?

Rappelons nous que tout nombre complexe peut s'écrire sous forme trigonométrique : $z = |z|e^{i \text{Arg}(z)}$.

Ainsi on a : $z^2 = |z|e^{i \text{Arg}(z)} \times |z|e^{i \text{Arg}(z)} = |z|^2 e^{2i \text{Arg}(z)}$

Son module est donc élevé au carré tandis que son argument est doublé comme illustré sur la figure ci-contre.

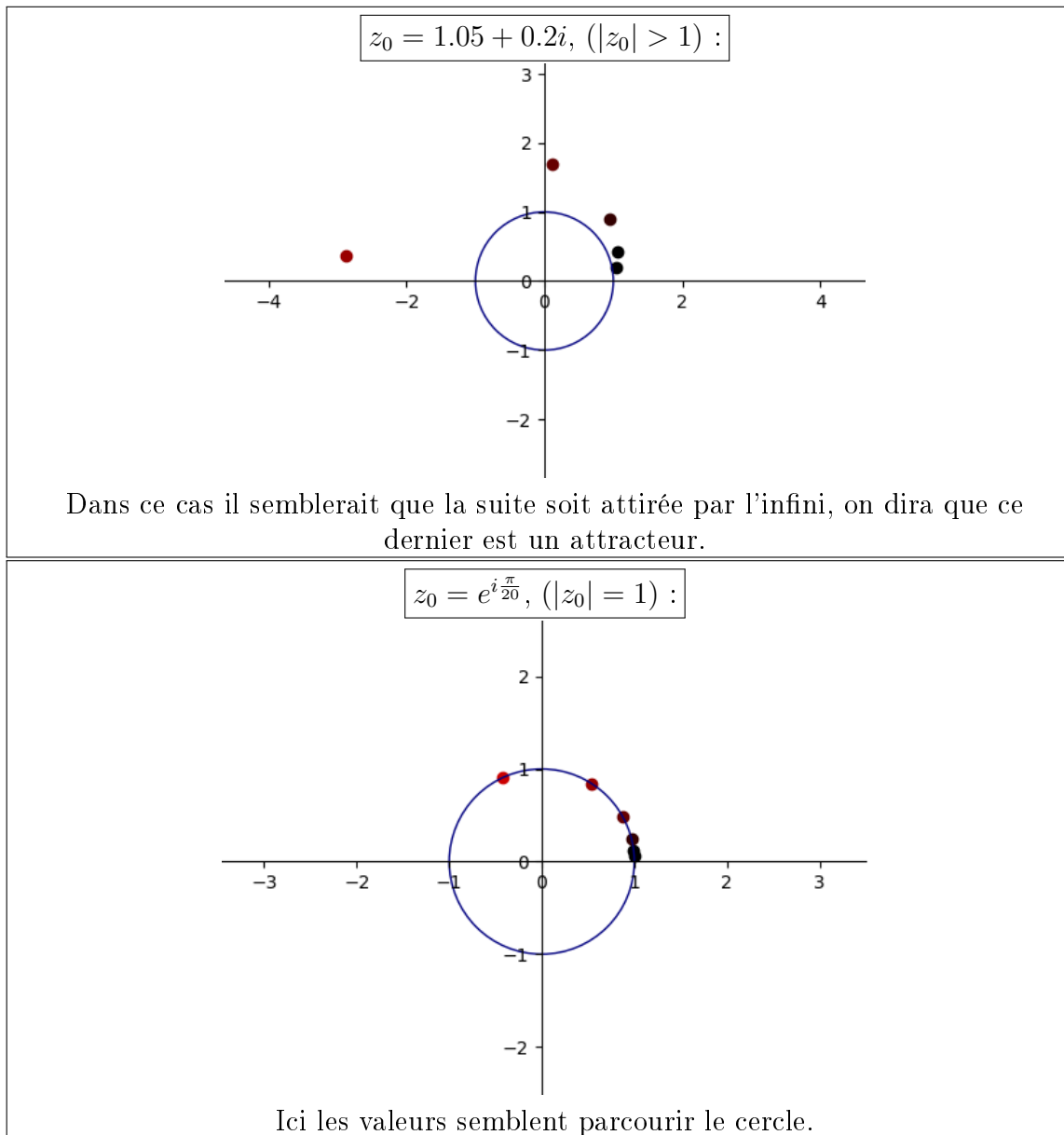


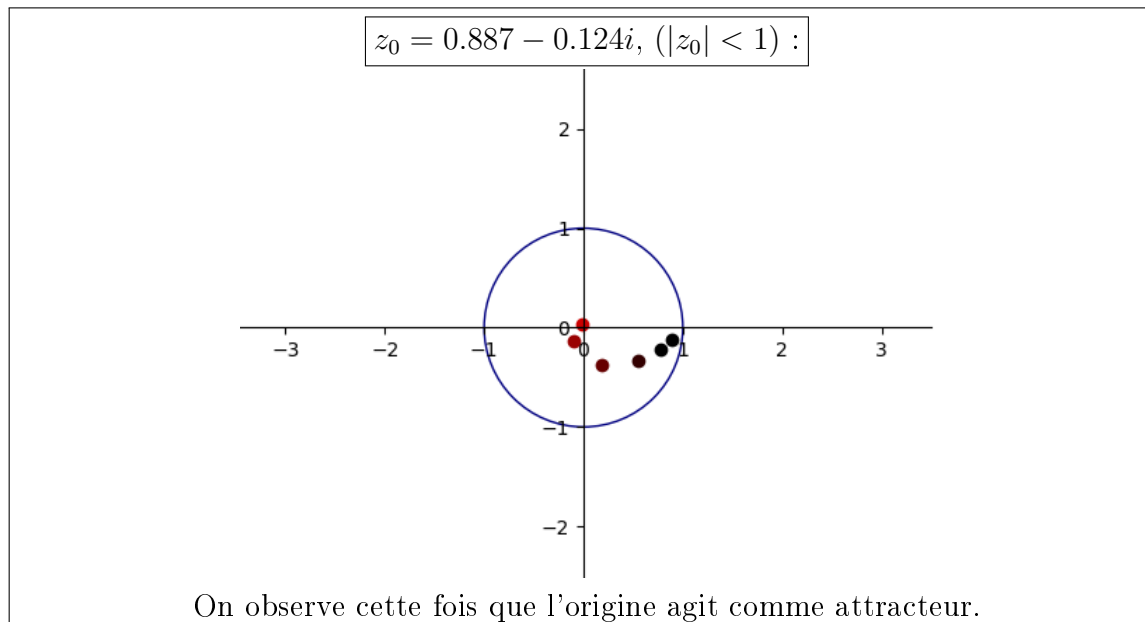
Remarque 2

À ce stade il est important d'avoir en tête les trois possibilités suivantes :

- Si $|z| > 1$, alors $|z|^2 > |z|$, donc si l'on choisit z_0 hors du cercle unité, les termes de la suite vont s'éloigner indéfiniment du centre.
- Si $|z| = 1$, alors $|z|^2 = |z|$, donc si l'on choisit z_0 sur le cercle unité, les termes de la suite vont rester sur le cercle et subir une rotation d'angle $\text{Arg}(z_n)$ à chaque itération.
- Si $|z| < 1$, alors $|z|^2 < |z|$, donc si l'on choisit z_0 à l'intérieur du cercle unité, les termes de la suite vont se rapprocher peu à peu de l'origine.

Voici à titre d'exemple, la représentation graphique des cinq premiers termes de la suite pour différentes valeurs de z_0 . Les premiers termes calculés sont en noirs tandis que les derniers tendent vers le rouge, le disque unité est représenté en bleu.

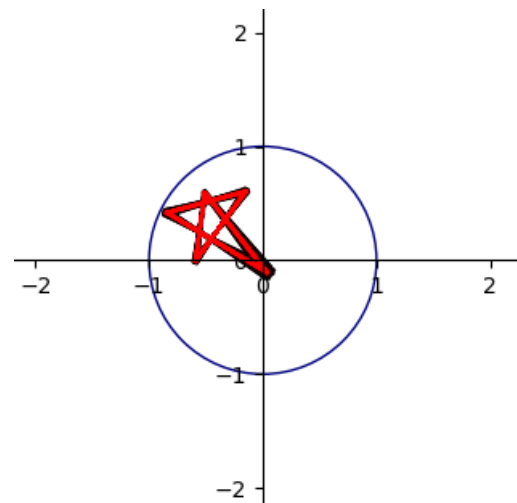
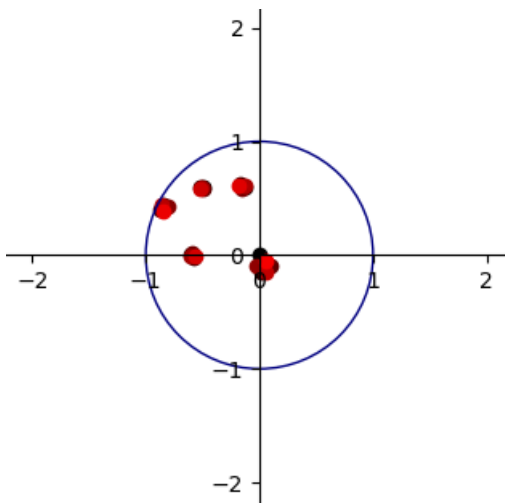




Définition 1 (Orbite).

L'ensemble des valeurs atteintes par la suite, $\mathcal{O} = \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{z_0, z_1, z_2, z_3, \dots\}$ sera appelé son orbite.

Visuellement, cela correspond sur l'exemple précédents aux points rouges et noirs. Si les valeurs prises par la suite se répètent, on dira que l'orbite est cyclique. Ci-dessous un bel exemple d'orbite cyclique commence à être observable en allant seulement jusqu'à $n = 25$ pour $c = -0.5 + 0.6i$ et $z_0 = 0$. Sur la deuxième image, un millier de termes ont été calculés et les points successifs sont reliés entre eux afin de permettre de mieux visualiser la trajectoire.



I.3 Cas général

Revenons à notre première suite :

$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{C} \\ z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

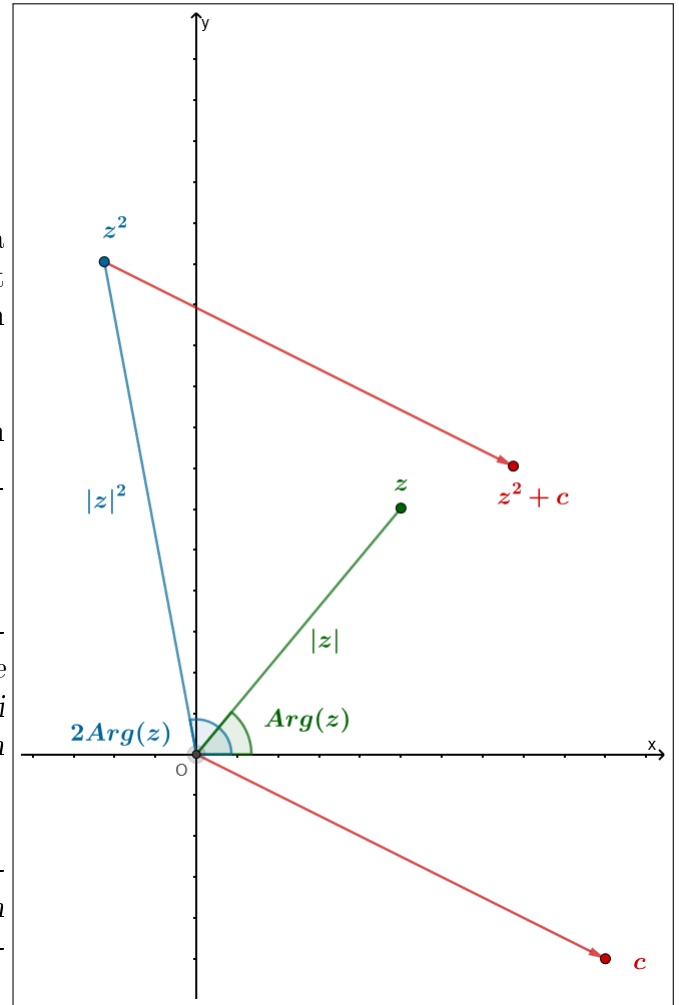
La relation de récurrence est sensiblement la même à ceci près que l'élevation au carré est suivie de l'ajout du nombre complexe (cette fois potentiellement non nul) c à chaque itération.

Cette dernière opération correspond à une translation par un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \text{Re}(c) \\ \text{Im}(c) \end{pmatrix}$ comme illustré ci-contre.

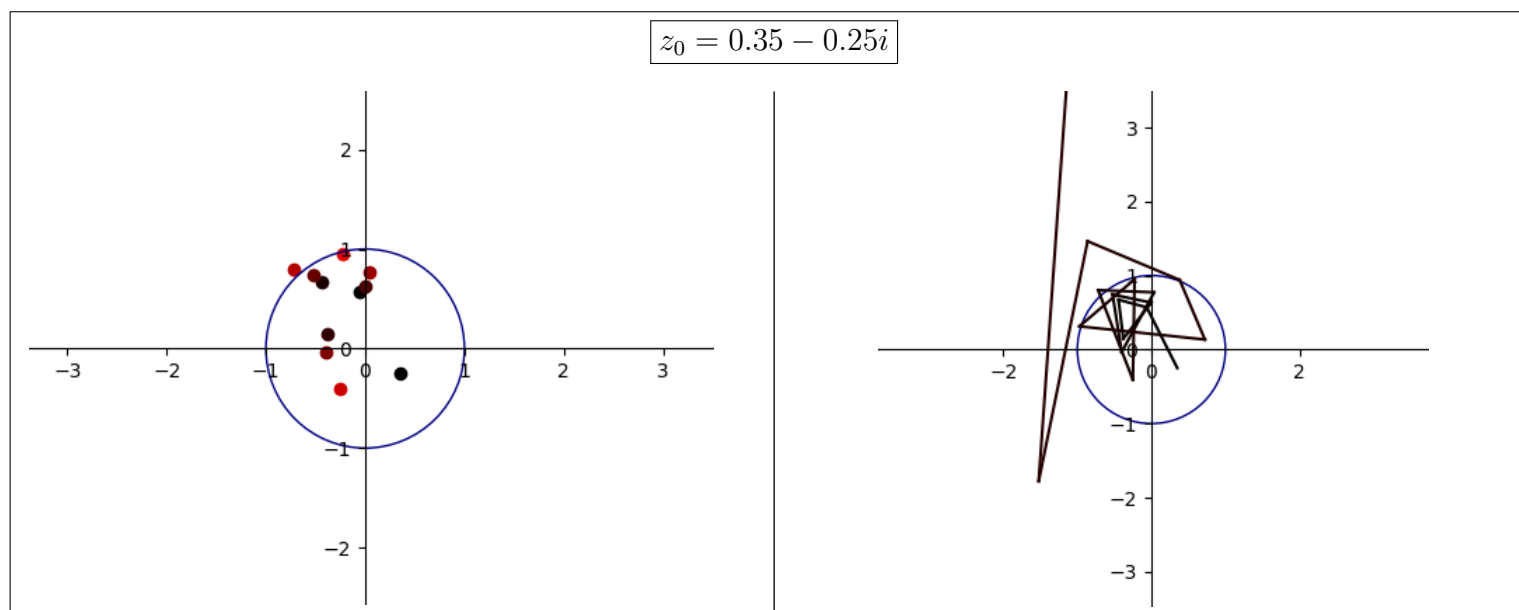
Remarque 3

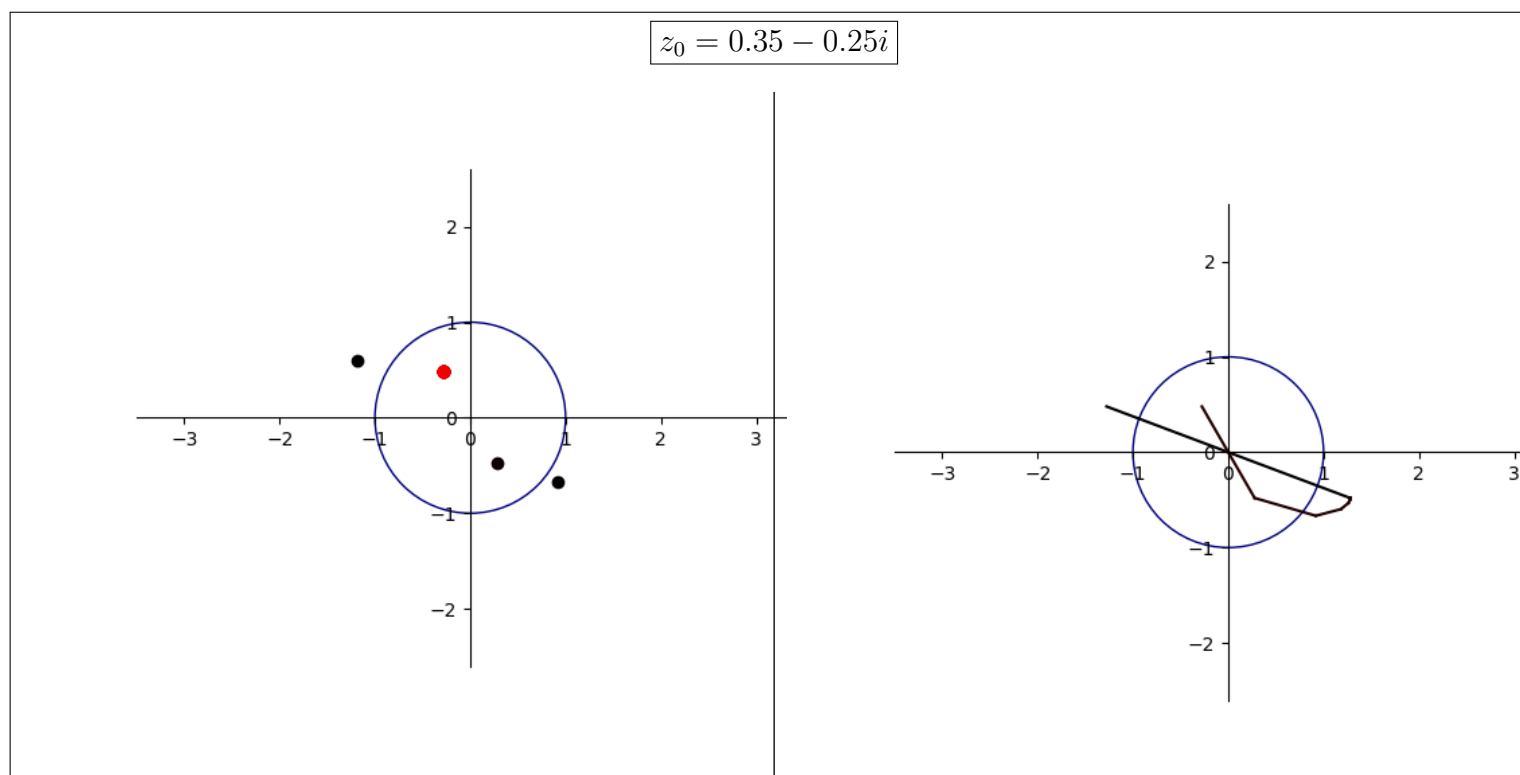
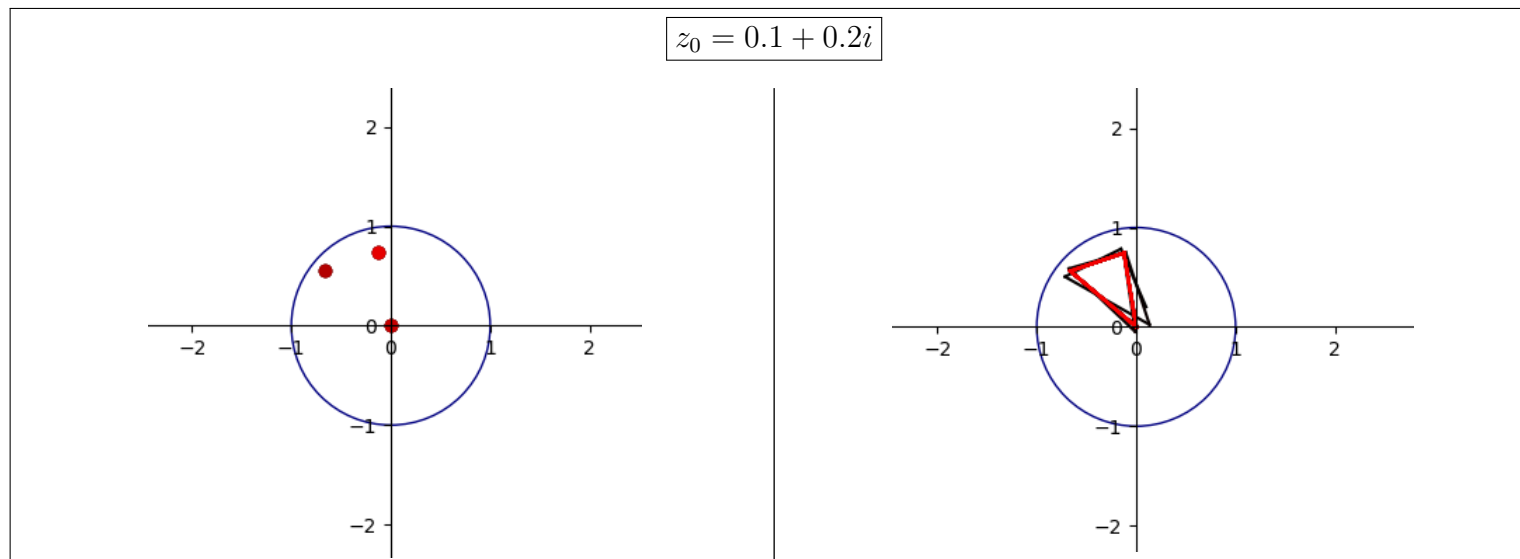
Le fait d'ajouter c complique légèrement la situation : dans le cas précédent il était aisé de prédire le comportement de la suite tandis qu'ici la translation peut ramener dans le cercle unité un point qui s'en serait échappé.

Cela dit si c est trop « grand », il peut tout aussi facilement l'en éloigner, nous verrons par la suite un critère permettant de lever l'incertitude dans certains cas (Voir critère d'échappement).



Comme dans l'exemple précédent, on a représenté ci-dessous quelques termes de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $c = -0.123 + 0.745i$ et différentes valeurs de z_0 . Il est cette fois plus ardu de deviner le comportement de la suite à l'infini, aussi nous allons dans chaque cas utiliser deux représentations. La première (celle de gauche) est construite de la même manière que précédemment et affichera les dix premiers termes de la suite. Quant à la seconde, elle en représentera une centaine, en reliant les termes successifs.





On retrouve ainsi des cas similaires aux précédents : soit la suite est captive, soit elle s'échappe, aussi l'on introduit les termes suivants.

Définition 2 (*Deux types de points*).

- Un point d'affixe z_0 sera dit **captif** si la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui lui est associée reste bornée en module.
- Dans le cas contraire, on parlera de **point d'échappement**.

Remarque 4

Dans le cas où l'on a affaire à un point captif, on peut distinguer deux possibilités : soit la suite possède plusieurs attracteurs et son orbite est cyclique, soit elle n'en possède qu'un seul et converge vers celui-ci.

La notion de convergence pour des suites complexes peut se définir comme suit :

$z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ si et seulement si pour tout rayon $r > 0$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la

suite sont compris dans le disque de centre ℓ et de rayon r .

Proposition 1 (Critère d'échappement).

Si il existe, pour un z_0 dans \mathbb{C} donné, un rang n tel que : $|z_n| > \max(2, |c|)$, alors z_0 correspond à l'affixe d'un point d'échappement.

Preuve 1

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, supposons donc qu'il existe un rang n tel que $|z_n| > 2$ et $|z_n| > |c|$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } |z_n^2| &= |z_n^2 + c - c| \leq |z_n^2 + c| + |c| && \text{par inégalité triangulaire.} \\ &= |z_{n+1}| + |c| && \text{par définition de } (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

$$\text{D'où il suit que : } |z_{n+1}| \geq |z_n^2| - |c|$$

$$\text{Comme } |z_n| > |c|, \text{ il est clair que } -|c| > -|z_n|, \text{ ainsi : } |z_{n+1}| \geq |z_n^2| - |c| > |z_n^2| - |z_n| = |z_n|(|z_n| - 1)$$

Or, on a également supposé que $|z_n| > 2$ donc il existe un réel ϵ strictement positif tel que : $|z_n| = 2 + \epsilon$

$$\text{Ainsi : } |z_{n+1}| > |z_n|(2 + \epsilon - 1) = |z_n|(1 + \epsilon)$$

On montre alors par récurrence immédiate que $|z_{n+k}| > |z_n|(1 + \epsilon)^k$

Donc comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} |z_n|(1 + \epsilon)^k = +\infty$, on en déduit que $|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Remarque 5

La preuve précédente permet ainsi de s'assurer que lorsque les termes de la suite s'éloignent trop de l'origine, non seulement l'éloignement est définitif mais en plus il n'y a pas d'autre attracteur possible que l'infini.

II Quelques ensembles fractals

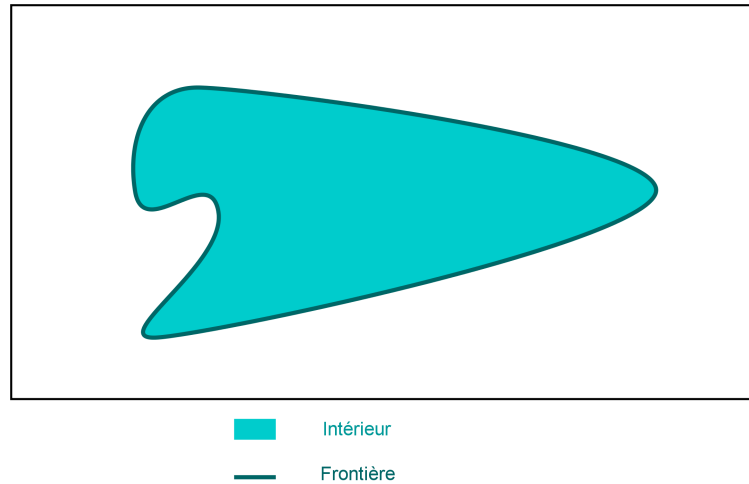
II.1 Un peu de vocabulaire

Les notions introduites dans cette section le seront dans un aspect purement intuitif et resteront dénuée de tout formalisme afin de ne pas rendre leur exposé inutilement fastidieux.

Définition 3.

Étant donné un ensemble E , on parlera de « **frontière de E** » pour désigner son contour et « **d'intérieur de E** » correspondra à l'ensemble E privé de sa frontière.

Exemple 1



II.2 Partition du plan complexe

Imaginons à présent que, pour un certain $c \in \mathbb{C}$, l'on veuille distinguer les points d'échappement des points captifs en leur attribuant à chacun une couleur, pour cela on découpe le plan complexe en deux parties : les valeurs initiales z_0 pour lesquelles l'orbite reste bornée et celles dont les itérées s'éloignent indéfiniment, ce qui va correspondre aux ensembles définis ci-dessous.

Définition 4.

L'ensemble des points captifs est appelé **ensemble de Julia rempli**. (Voir [Appendice 2](#))
 On appelle **ensemble de Julia** la frontière de l'ensemble des points captifs, il est noté \mathcal{J}_c .
 L'**ensemble de Fatou** (Voir [Appendice 1](#)) correspond au complémentaire de l'ensemble de Julia dans le plan complexe.

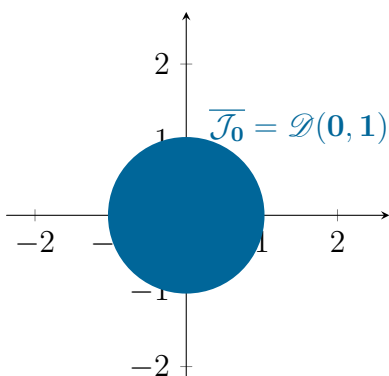
Remarque 6

L'ensemble de Julia rempli associé à c , correspond à : $\overline{\mathcal{J}_c} = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid \forall n \in \mathbb{N}, |z_n| < +\infty\}$
 Notons alors \mathcal{J}_c l'ensemble de Julia.
 Ainsi l'ensemble de Fatou est : $\mathcal{F}_c = \mathbb{C} \setminus \mathcal{J}_c$

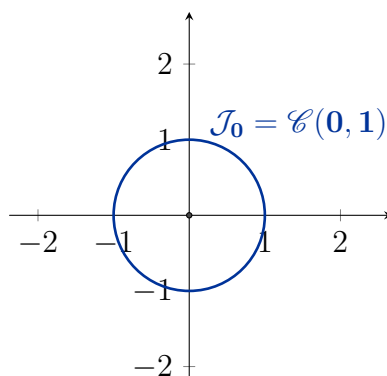
Exemple 2

Revenons au cas où $c = 0$, il est alors relativement simple de distinguer chacun des trois ensembles :

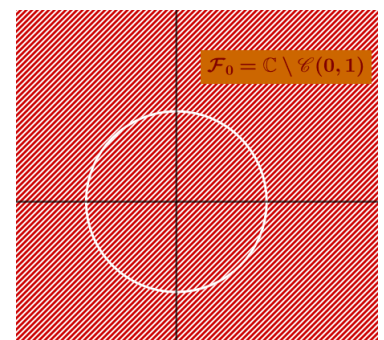
L'ensemble de Julia rempli $\overline{\mathcal{J}_0}$ correspond au disque unité :



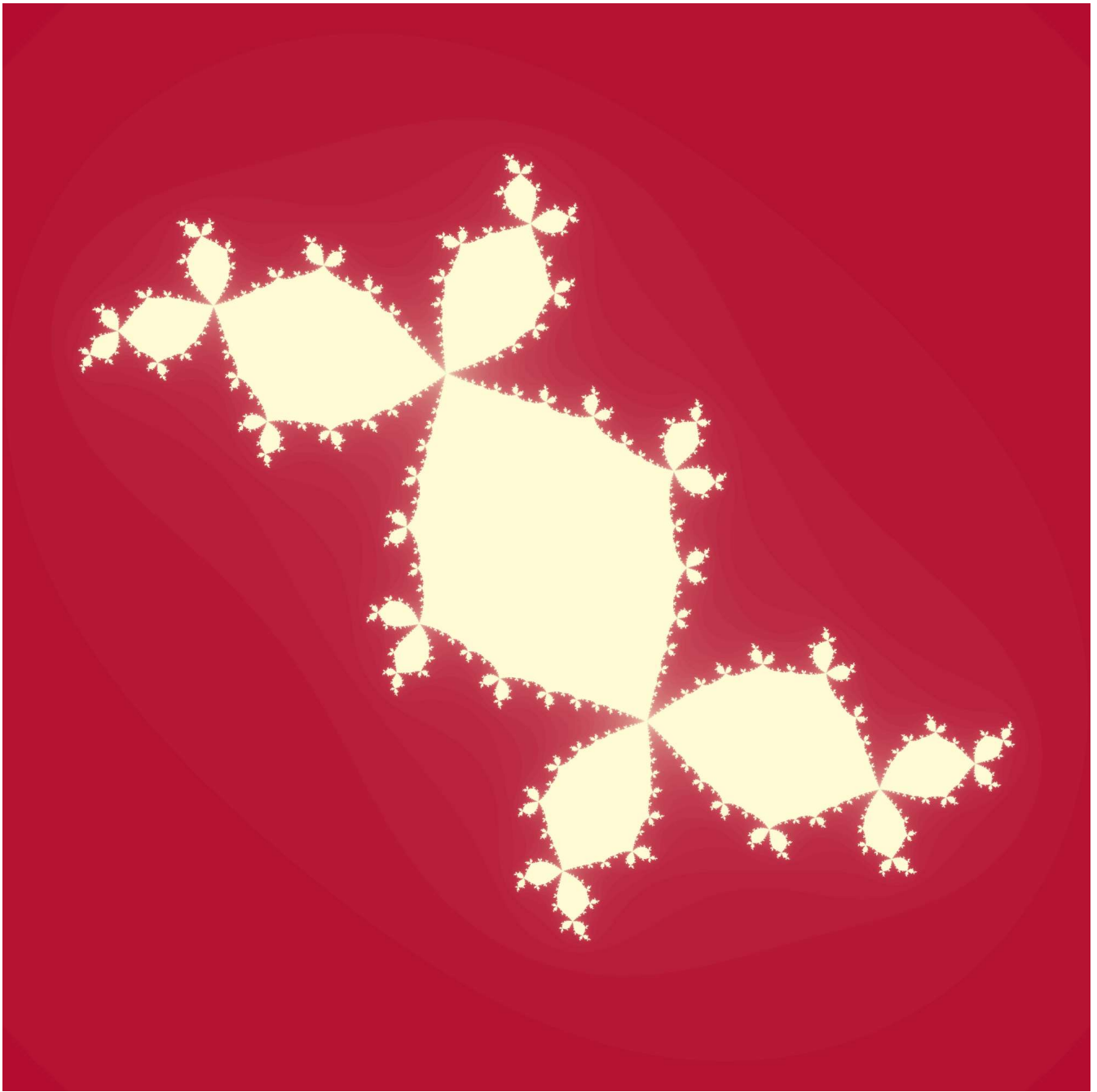
L'ensemble de Julia \mathcal{J}_0 correspond donc au cercle unité :



Ainsi l'ensemble de Fatou \mathcal{F}_0 est le plan complexe privé du cercle unité, ici hachuré en rouge :



En reprenant la valeur $c = -0.123 + 0.745i$ on obtient (en blanc) l'ensemble de Julia rempli suivant, aussi appelé lapin de Douady (Voir [Appendice 5](#)) :



Lapin de Douady : $\overline{\mathcal{J}}_{-0.123+0.745i}$

La partie rouge correspond aux points d'échappement, plus le rouge est foncé et moins le rang d'échappement est élevé. On remarque en effet des lignes de niveau de différentes couleurs entourant l'ensemble de Julia, celles-ci épousant peu à peu le contour : plus le rang d'échappement est élevé, plus la valeur initiale correspondant est proche des points captifs.

Par ailleurs on distingue une quasi auto-similarité dans les motifs qui forment le contour, chaque partie semble être une reproduction du même motif (réduit, tourné ou agrandi) : on observe ainsi le caractère fractal de l'ensemble de Julia !

II.3 Algorithme et représentation

En pratique, il n'est pas toujours aussi aisé de déterminer quels sont les points captifs et les points d'échappement. Il n'y a pas de raisonnement général permettant de discriminer les points captifs à coup sûr, le seul véritable outil dont on dispose est le critère d'échappement.

Faute de mieux la seule alternative serait donc de calculer les termes de la suite pour de grandes valeurs de n et de vérifier qu'ils ne violent pas le critère d'échappement. Comme il serait extrêmement fastidieux de faire ces calculs à la main, il est préférable d'avoir recours à un algorithme. Les images d'ensembles de Julia présentes dans ce document ont d'ailleurs été obtenue avec python au moyen d'un programme dont voici l'essentiel en pseudo-code :

```

Saisir  $a, b, n, N_{max}$ 
 $a + ib \rightarrow c$ 
Pour  $x$  de 1 à  $n$  faire
  Pour  $y$  de 1 à  $n$  faire
     $i = 1$ 
     $x + iy \rightarrow z$ 
    Tant que ( $i \leq N_{max}$  et  $|z| \leq \max(|c|, 2)$ ) faire
       $z^2 + c \rightarrow z$ 
       $i + 1 \rightarrow i$ 
    Fait
    Si ( $i > N_{max}$  et  $|z| < \max(|c|, 2)$ ) Alors
       $\text{couleur}(x, y) = (0, 0, 0)$ 
    Sinon
       $\text{couleur}(x, y) = (255, 255, 255)$ 
    Fin Si
  Fin Pour
Fin Pour

```

Remarque 7

- Pour des raisons de clareté, les nombres complexes intervenant dans l'algorithme sont écrits naïvement sous forme mathématique, comme si le langage utilisé permettait d'interpréter cette écriture, ce qui n'est pas le cas en pratique.
- **Description des différents paramètres :**

a, b : permet de définir les parties réelles et imaginaires du nombre complexe c à partir duquel on construira l'ensemble de Julia J_c .

n : taille de la fenêtre ($n \times n$ pixels).

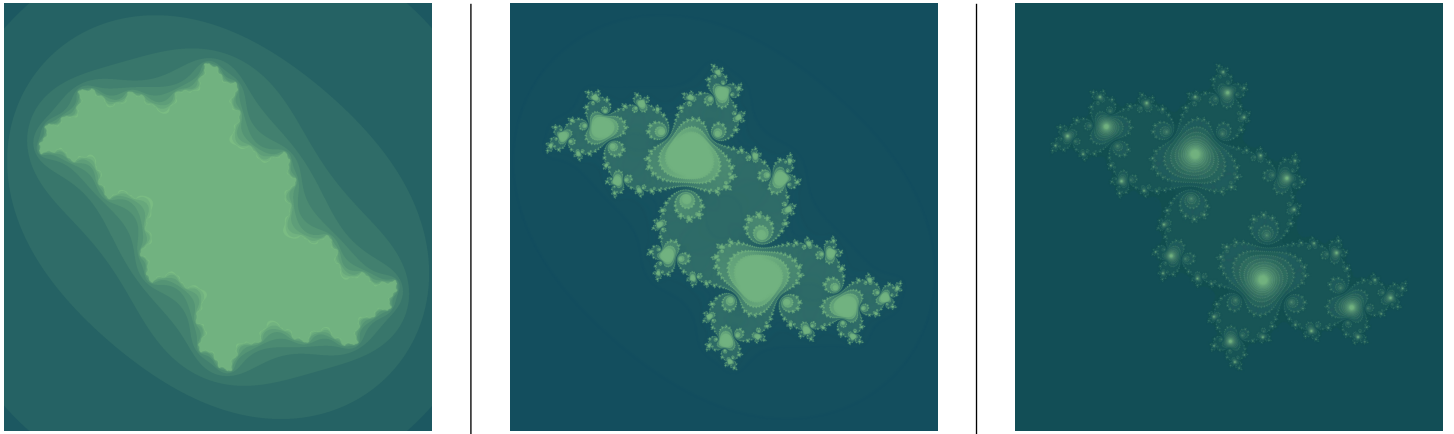
$(x; y)$: variables des boucles « Pour » correspondant aux coordonnées du pixel de départ (et donc à z_0).

i : compteur de la boucle « Tant que », correspond au rang de la suite à chaque itération.

N_{max} :rang à partir duquel on considèrera que le point est captif.

- La fonction « couleur » attribue une couleur en RGB au pixel de coordonnées $(x; y)$. Les triplets $(0, 0, 0)$ et $(255, 255, 255)$ correspondent respectivement au noir et au blanc. Ici le pixel est donc noir si la valeur de z en fin de boucle n'a pas violé le critère (considéré captif) et blanc sinon (point d'échappement).

En adaptant l'algorithme au niveau de la coloration, on obtient ces trois représentations de $\overline{\mathcal{J}}_{-0.1+0.651i}$:



Comment se fait-il qu'elles soient si différentes alors qu'elles sont censées représenter le même ensemble ?

La première a été obtenue avec $N_{max} = 10$ tandis qu'il est fixé à 255 et 1000 respectivement pour les deux autres. La dernière est donc bien plus précise : on se rend alors compte que l'on avait au début qu'un très vague contour et que les motifs de la deuxième n'avaient en fait pas lieu d'être remplis.

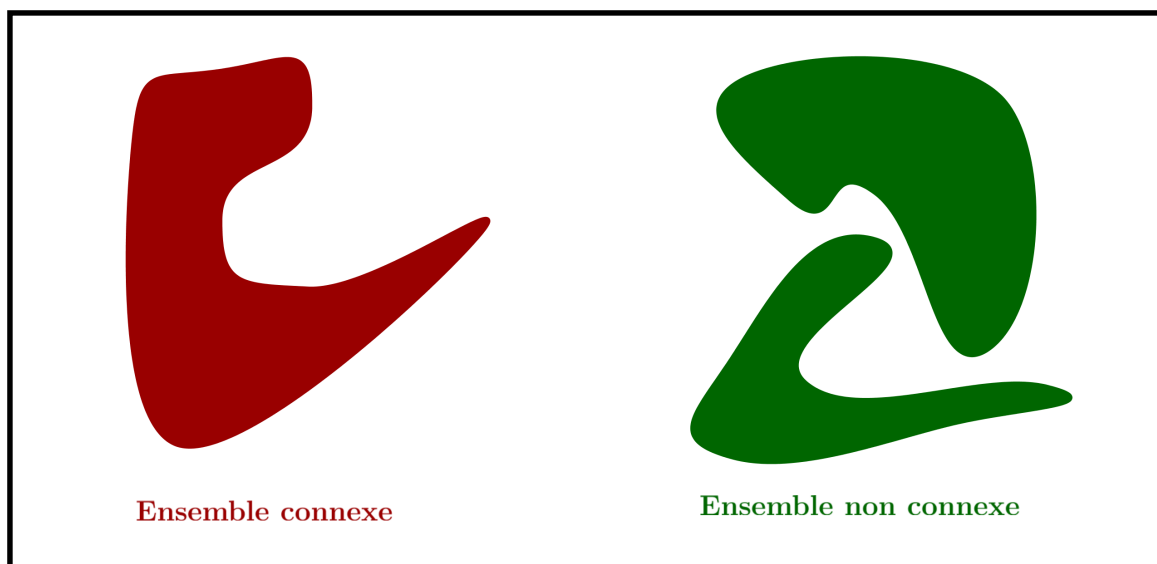
En augmentant le nombre de boucles, on parvient ainsi à affiner la représentation de l'ensemble de Julia mais c'est aussi considérablement plus coûteux et augmente donc le temps de calcul de manière non négligeable.

II.4 Connexité

Définition 5 (*Ensemble connexe*).

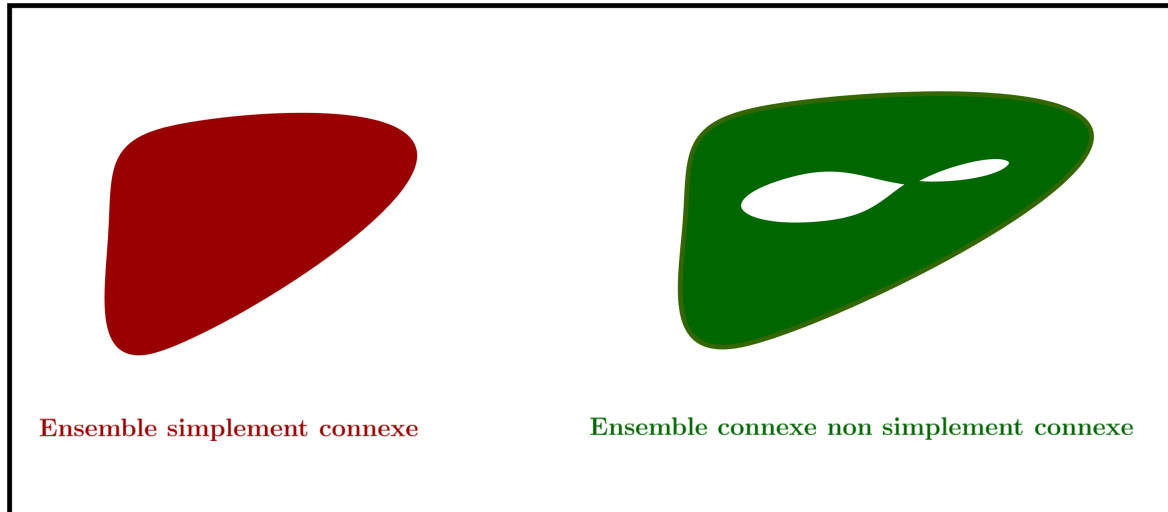
On dira qu'un ensemble est **connexe** s'il est fait d'un seul « morceau ».

Exemple 3



Remarque 8

On dira qu'un ensemble est **simplement connexe** si en plus d'être connexe, il ne comporte pas de « trou ».



Mais revenons aux ensembles de Julia remplis, il a été établi la proposition suivante quant à leur connexité :

Proposition 2 (*Connexité des ensembles de Julia remplis*).

Selon la valeur de c choisie, $\overline{\mathcal{J}_c}$ est soit simplement connexe, soit constitué de points complètement déconnectés les uns des autres.

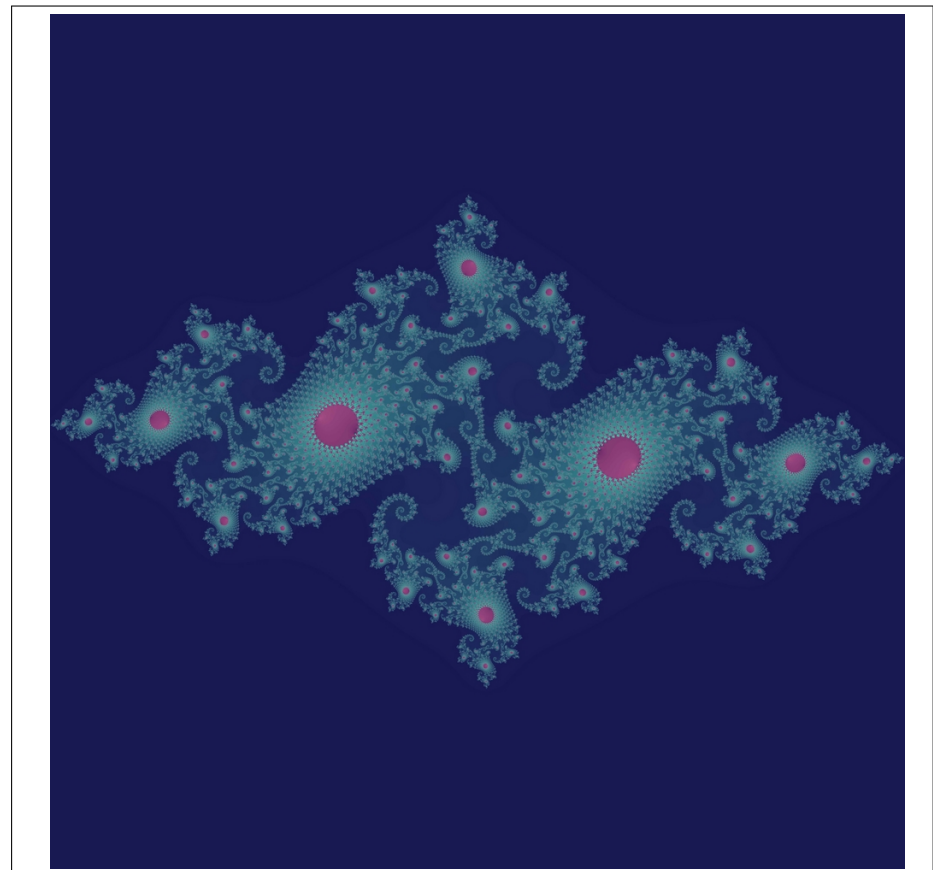
Dans le second cas $\overline{\mathcal{J}_c}$ est qualifié de poussière de Cantor, en référence à l'ensemble du même nom (Voir [Appendice 3](#)).

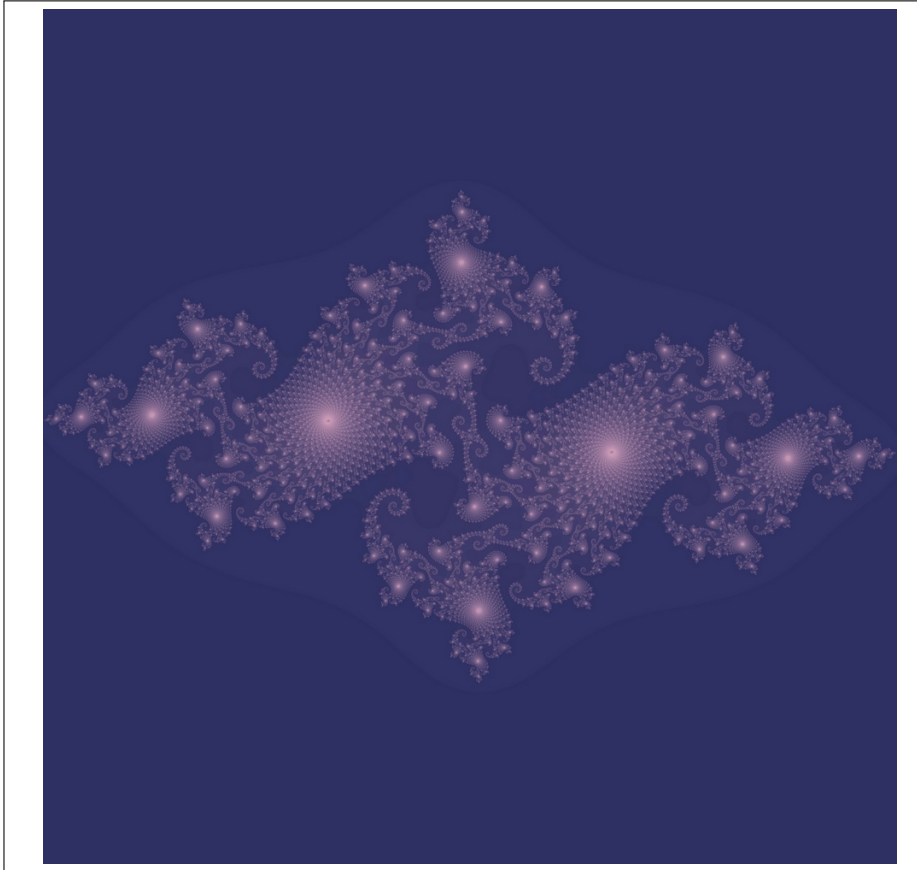
Ci-contre $\overline{\mathcal{J}_{-0.74543+0.11301i}}$ pour $N_{max} = 300$ en violet, les points d'échappement sont représentés en dégradé bleu en fonction de leur rang d'échappement (plus il est grand, plus le bleu est clair).

Quelque chose ne va pas ?

$\overline{\mathcal{J}_{-0.74543+0.11301i}}$ ne semble pas connexe, il devrait donc, si l'on en croit la proposition précédente, être « poussiéreux ».

Essayons d'obtenir une représentation plus fine.





En augmentant N_{max} à 800 on obtient cette nouvelle figure qui semble finalement avoir le bon goût d'être en adéquation avec la Proposition 2 :

$\overline{\mathcal{J}}_{-0.74543+0.11301i}$ correspondant aux points roses, on comprend alors qu'il s'agit d'un ensemble de type poussière de Cantor.

III Un ensemble pour les gouverner tous

III.1 Une nouvelle partition du plan

Voyons à présent les choses de manière différente, il y a deux types de nombres complexes : les c qui vont donner un ensemble de Julia rempli connexe, et les autres, il paraît alors naturel d'introduire l'ensemble suivant :

Définition 6 (*Ensemble de Mandelbrot (Voir Appendice 4)*).

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid \overline{\mathcal{J}}_c \text{ est connexe}\}$$

Bien que très claire cette définition semble calculatoirement peu maniable, et encore moins pour représenter l'ensemble, aussi l'on admettra le théorème suivant :

Proposition 3 (*Théorème fondamental de l'ensemble de Mandelbrot*).

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid \text{pour } z_0 = 0, (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

Si l'appellation de ce dernier résultat est incertaine (il est parfois référencé en tant que théorème de Fatou ou théorème de Julia), nul doute quant au fait qu'il va s'avérer très utile pour représenter l'ensemble : il « suffit » désormais de calculer les itérées de la suite en partant de 0 et en faisant varier c .

III.2 Algorithme et représentation

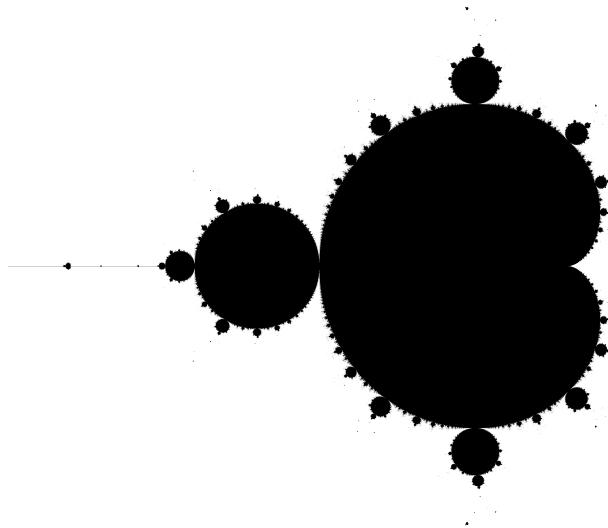
Évidemment vu l'ampleur de la tâche, nous allons la déléguer à un algorithme, puisque le critère d'échappement reste valable, celui-ci sera très similaire au programme vu en II.3 : en effet c joue à présent le rôle de z_0 , lequel est désormais fixé à 0.

```

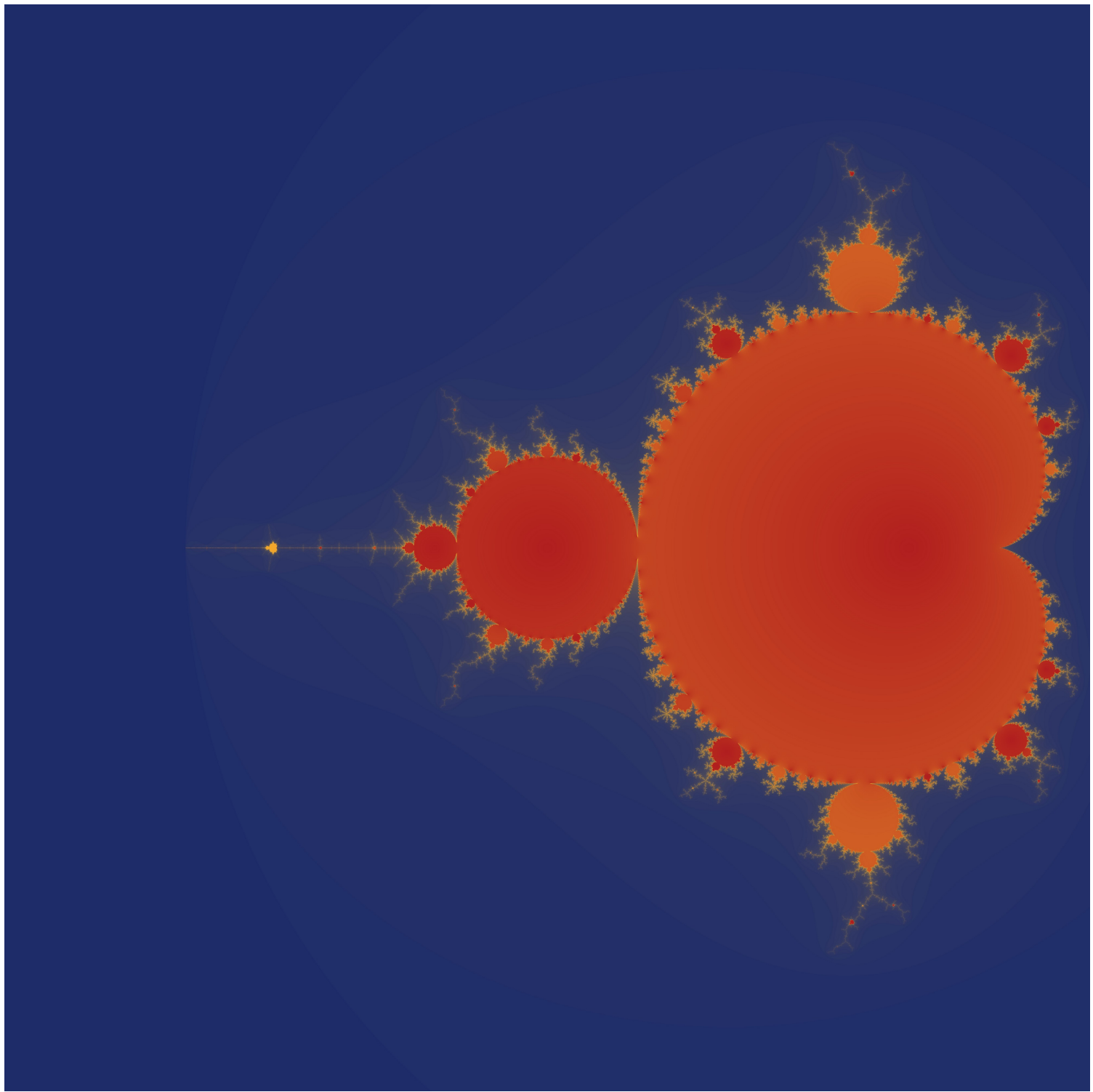
Saisir  $n, N_{max}$ 
Pour  $x$  de 1 à  $n$  faire
  Pour  $y$  de 1 à  $n$  faire
     $i = 1$ 
     $x + iy \rightarrow c$ 
     $0 \rightarrow z$ 
    Tant que ( $i \leq N_{max}$  et  $|z| \leq \max(|c|, 2)$ ) faire
       $z^2 + c \rightarrow z$ 
       $i + 1 \rightarrow i$ 
    Fait
    Si ( $i > N_{max}$  et  $|z| < \max(|c|, 2)$ ) Alors
       $\text{couleur}(x, y) = (0, 0, 0)$ 
    Sinon
       $\text{couleur}(x, y) = (255, 255, 255)$ 
    Fin Si
  Fin Pour
Fin Pour

```

Ce qui nous permet d'obtenir la figure suivante :



Les points considérés captifs sont colorés en noir tandis que les points d'échappement sont blancs, il est bien sûr possible de paramétrer les couleurs de manière différente de sorte à obtenir une figure moins terne, comme celle-ci :



Ensemble de Mandelbrot

L'origine est au centre de la cardioïde, les points en bleu sont les points de d'échappement, plus ils se rapprochent du jaune et plus leur vitesse d'échappement est lente, nous avons en rouge/orange les points considérés comme captifs, qui vont donc donner des ensembles de Julia connexes.

Ainsi l'ensemble de Mandelbrot permet d'effectuer une sorte de cartographie des ensembles de Julia selon leur connexité, à noter qu'il a été établi qu'il était lui-même connexe. On notera de plus qu'il possède également un caractère fractal très prononcé.

III.3 Pour aller plus loin

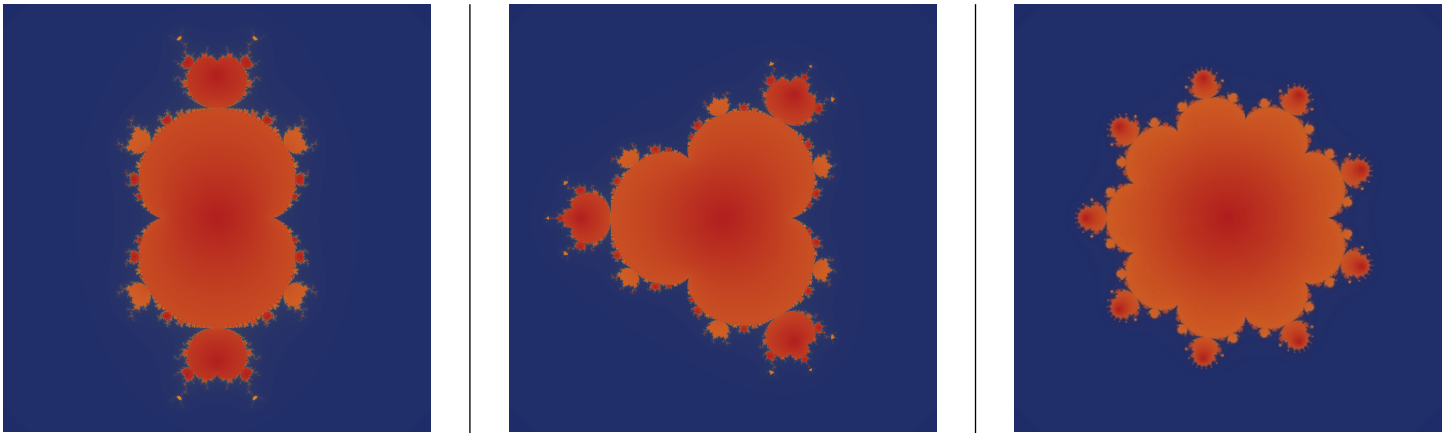
À noter que jusqu'à présent nous avons travaillé avec des suites de la forme :

$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{C} \\ z_{n+1} = z_n^2 + c = f(z_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

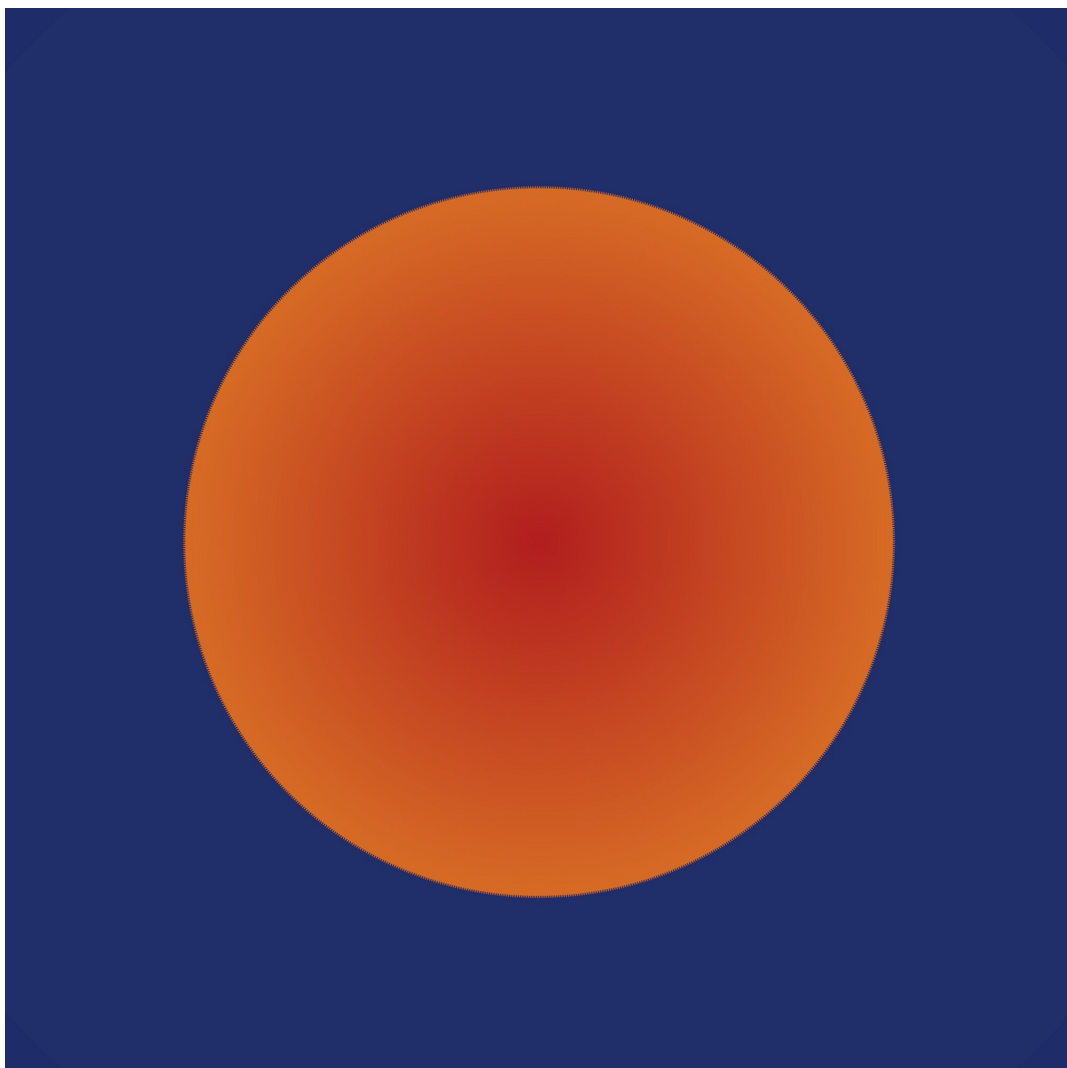
Ces dernières sont en fait construites à partir des itérées de la fonction complexe $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,
 $z \mapsto z^2 + c$,

que se passerait-il si l'on répétait le même procédé pour d'autres fonctions ?

Voici quelques représentations pour $n = 3, 4$ et 10 :



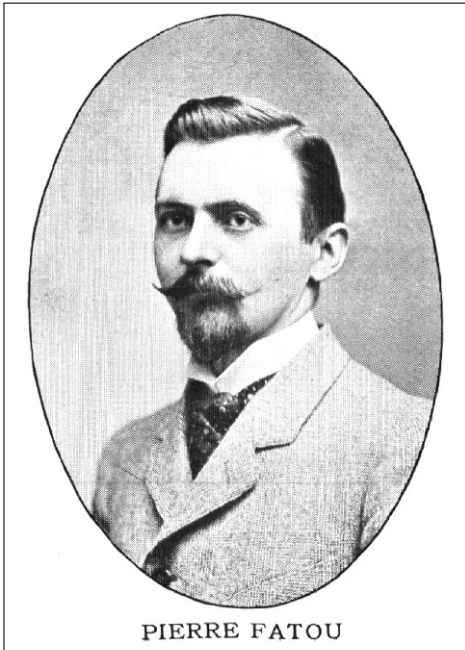
Saurez-vous deviner à quelle exposant correspond l'ensemble de Mandelbrot suivant ?



IV Appendices

On trouvera dans cette partie quelques éléments de contexte historique vis-à-vis des noms de mathématiciens associés à certains ensembles. Le lecteur assidu pourra en consulter les sources sous leurs intitulés respectifs dans la partie V.

IV.1 Pierre Fatou (1878-1929)



Né à Lorient en 1878, où il est éduqué et y est l'élève du philosophe Alain qui se souvient de lui en ces termes :

« J'eus en ces années là un élève tout simple et modeste, qui était un génie mathématicien. Je lui enseignai vaille que vaille la philosophie de ces choses ; il comprenait aisément tout cela et ne faisait jamais d'objection. Il m'apprit beaucoup sur ces méthodes d'aigle ; car j'observai l'aiglon encore petit. Il est mort il y a quelques années calculateur à l'Observatoire de Paris, et auteur d'une thèse qui fut comprise peut-être de deux hommes dans le monde. »

Alain, Histoire de mes pensées (1936).

Admis à l'École Normale Supérieure de Paris en 1898 en se classant premier au concours, il en ressort diplômé en mathématiques en 1901. Il travaille par la suite à l'Observatoire de Paris tout en préparant sa thèse qu'il soutient en 1906.

Fatou est l'un des premiers mathématiciens à s'intéresser aux itérations de fonctions rationnelles complexes, ce qui le mènera à introduire et étudier les ensembles aujourd'hui dits « de Julia ». Il est d'ailleurs en lice face à ce dernier pour le Grand Prix de l'Académie des sciences de 1918 mais devant la similarité des résultats obtenus par les deux mathématiciens, Fatou s'incline et renonce à participer. L'Académie est cependant consciente de l'importance de ses contributions puisqu'il ne faudra pas attendre plus de deux ans pour qu'elle le récompense, alors qu'une fois de plus, il n'est pas au nombre des participants.

« Quant à moi, qui suis résigné d'avance à ne jamais arriver, je continuerai tranquillement mon métier de sous-ordre [...]; c'est peu glorieux, mais ma philosophie s'en accommode et cela ne m'empêchera pas de faire des math. dans la mesure de mes moyens. »

Lettre à Paul Montel en 1920.

Sa santé fragile, qui lui avait épargné d'être mobilisé durant la première guerre mondiale, a finalement raison de lui durant l'été 1929 alors qu'il est en vacances à Pornichet.

IV.2 Gaston Julia (1893 -1978)



Français né en Algérie en 1893, malgré des origines modestes, il parvint toujours à suivre la devise que sa mère lui inculqua : « toujours premier » : brillamment reçu au baccalauréat en 1910, il est admis en classe préparatoire au lycée Janson de Sailly à Paris.

Atteint de typhoïde dès la rentrée, il est incapable d'assister aux deux premiers mois de cours, qu'à cela ne tienne, les huit restants lui suffiront pour être classé (encore et toujours) premier à la fois aux concours de l'X et de l'ENS. C'est finalement cette dernière qu'il choisit et y prépare l'agrégation qu'il passe en 1914 peu avant d'être mobilisé sur le Chemin des Dames.

La guerre ne l'empêche pas de poursuivre ses travaux mathématiques puisqu'il reste en contact par courrier avec le mathématicien Émile Borel, alors directeur adjoint de l'École Normale.

Sa vie militaire prend cependant brusquement fin en 1915, il la raconte lui-même en ces termes :

« Nous étions à l'Est de Soissons. On n'a cédé l'Aisne que vers Soissons et l'attaque des Allemands sur nous a sans doute eu pour objet de reprendre l'Aisne. Les Allemands envahissaient déjà ma tranchée. On s'est battu corps à corps. J'ai réussi à les arrêter. Alors, j'ai reçu ma balle qui a dû être tirée presque à bout portant. Et quand je suis tombé, les nôtres débouchaient à la rescousse dans ma tranchée. On l'a gardée. »

M. Julia, sous-lieutenant au 34^e rég. d'infanterie : le 25 janvier 1915, a montré le plus profond mépris du danger sous un bombardement d'une extrême violence, a su malgré sa jeunesse prendre sur ses hommes un réel ascendant. A repoussé une attaque menée contre ses tranchées et a été atteint d'une balle en pleine figure lui occasionnant une blessure affreuse. Bien que ne pouvant plus parler, a écrit sur un billet qu'il ne voulait pas être évacué, ne s'est rendu à l'ambulance que quand l'attaque ennemie a été refoulée. Cet officier, reçu premier à l'école polytechnique et premier à l'école centrale, venait de rejoindre le front et voyait le feu pour la première fois.

*Journal officiel de la République française,
21 Février 1915.*

Suite à sa blessure, Julia est rapatrié à Paris pour y être opéré, il y survit mais perd son nez, une partie du palais et l'usage d'un œil, ce qui le contraindra à porter un masque et à souffrir sa vie durant de terribles crises de névralgie faciale (cela reste une chance toute relative : plus d'un quart des promotions normaliennes de 1900 à 1918 ayant été décimé durant la guerre).

Toujours résilient face à l'adversité et soutenu par la communauté mathématique, il soutient sa thèse en 1917 et remporte un an plus tard le Grand Prix de l'Académie pour son *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles* où il fournit une description précise des ensembles qui aujourd'hui portent son nom. Julia est alors chargé de cours au Collège de France, à l'École Normale et à Polytechnique, président de la Société Mathématique de France en 1932, puis membre de l'Académie des Sciences en 1934 (qu'il présidera également en 1950). Le seul bémol à sa brillante carrière aura duré moins d'un mois, en 1944, alors qu'il est suspendu de ses fonctions et passe devant une commission d'épuration administrative des fonctionnaires de l'Éducation Nationale pour avoir séjourné et donné des conférences en Allemagne en 1942. Incapable de prouver le fait d'une quelconque collaboration et au vu de son statut d'ancien combattant, la commission renonce à toute sanction et le mathématicien peut alors reprendre ses fonctions.

« J'ai quelque raison que vous apercevez sur ma figure d'attacher une importance particulière au 25 Janvier de chaque année qui s'écoule. C'est en effet un 25 Janvier que je suis né à la vie que je mène aujourd'hui par l'effet d'une balle qui me laissa pour mort dans une tranchée boueuse. »

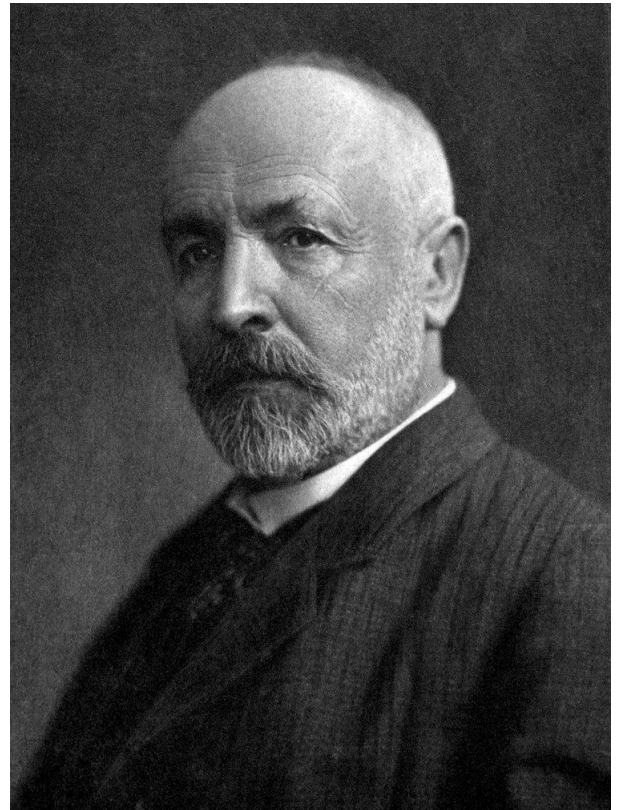
Discours prononcé à Genève le 25 Janvier 1941, à l'occasion du 225^{ème} anniversaire de Lagrange.

Ainsi, c'est cette seconde vie qui s'achèvera finalement en tant que pensionnaire aux Invalides le 19 Mars 1978.

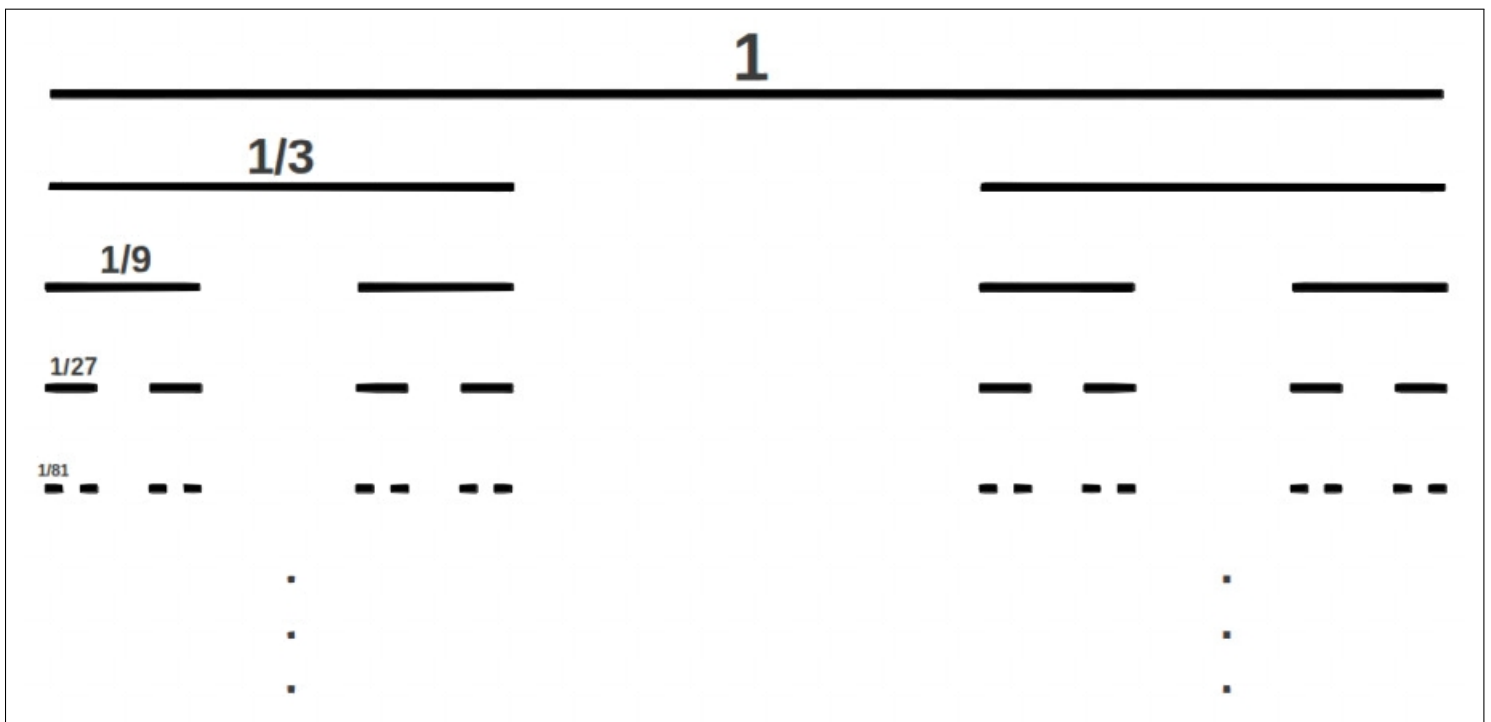
IV.3 Georg Cantor (1845-1918) et son célèbre ensemble triadique

Mathématicien allemand né en 1845 à Saint-Pétersbourg dont les travaux jouent un rôle fondamental dans l'axiomatique de la théorie des ensembles, il est notamment l'un des premiers à affronter l'infini avec succès. Après des contributions exceptionnelles aux fondements des mathématiques, il souffre de dépression suite à la mort de son plus jeune fils en 1899 et ce jusqu'à la fin de sa vie qui s'achève en 1918 dans un hôpital psychiatrique de Halle en Allemagne.

Aussi importantes que soient ses plus célèbres contributions nous ne les évoquons malheureusement pas ici, car trop éloignées de notre thématique. Nous nous bornerons donc à décrire l'ensemble qui porte son nom représenté ci-dessous. Il est construit à partir du segment $[0; 1]$ par un procédé itératif consistant à chaque étape à priver l'ensemble du tiers médian. Le résultat conceptuel obtenu après une infinité d'étapes est appelé ensemble triadique de Cantor, il a la particularité d'être infini mais de mesure nulle, en plus de constituer le premier exemple d'ensemble fractal.



Georg Cantor



Ensemble triadique de Cantor après 4 itérations

IV.4 Benoît Mandelbrot (1924-2010)



Benoît « B. » Mandelbrot, conférence TED (2010)

Benoît Mandelbrot est né à Varsovie en 1924, sa famille quitte cependant la Pologne pour s'installer en France en 1936 afin de fuir le régime nazi. Après une éducation chaotique due à des années d'errances durant lesquelles fuir la guerre reste une priorité, il est tout de même admis, en 1944, en classe préparatoire au lycée du Parc à Lyon, où il se distingue par sa capacité à transformer des problèmes d'algèbre abstraite en questions géométriques.

Reçu parmi les premiers à la fois à l'École Polytechnique et à l'École Normale Supérieure, le choix fut difficile : son oncle, Szolem Mandelbrojt, alors professeur au Collège de France et co-fondateur du groupe Bourbaki, lui recommande fortement l'ENS mais ils se rend vite compte que la vision abstraite des mathématiques qui y règne à l'époque est incompatible avec son approche géométrique, plus intuitive.

Aussi décide-t-il finalement d'intégrer l'École Polytechnique qu'il considère comme plus adaptée à sa pensée et où il fut notamment élève de Gaston Julia et Paul Lévy.

C'est sous l'influence de ce dernier que Mandelbrot rédige sa thèse en 1952, alors qu'il est consultant chez Philips, ce qui lui permettra de réaliser ses études post-doctorales auprès de John Von Neumann à l'Institute for Advanced Study de Princeton.

Par la suite, Mandelbrot est invité à New York par IBM en 1958, et étant donné son profil très hétérodoxe, il entrevoit alors des perspectives sans équivalent en France ce qui le décide à accepter l'offre d'emploi qui lui est faite.

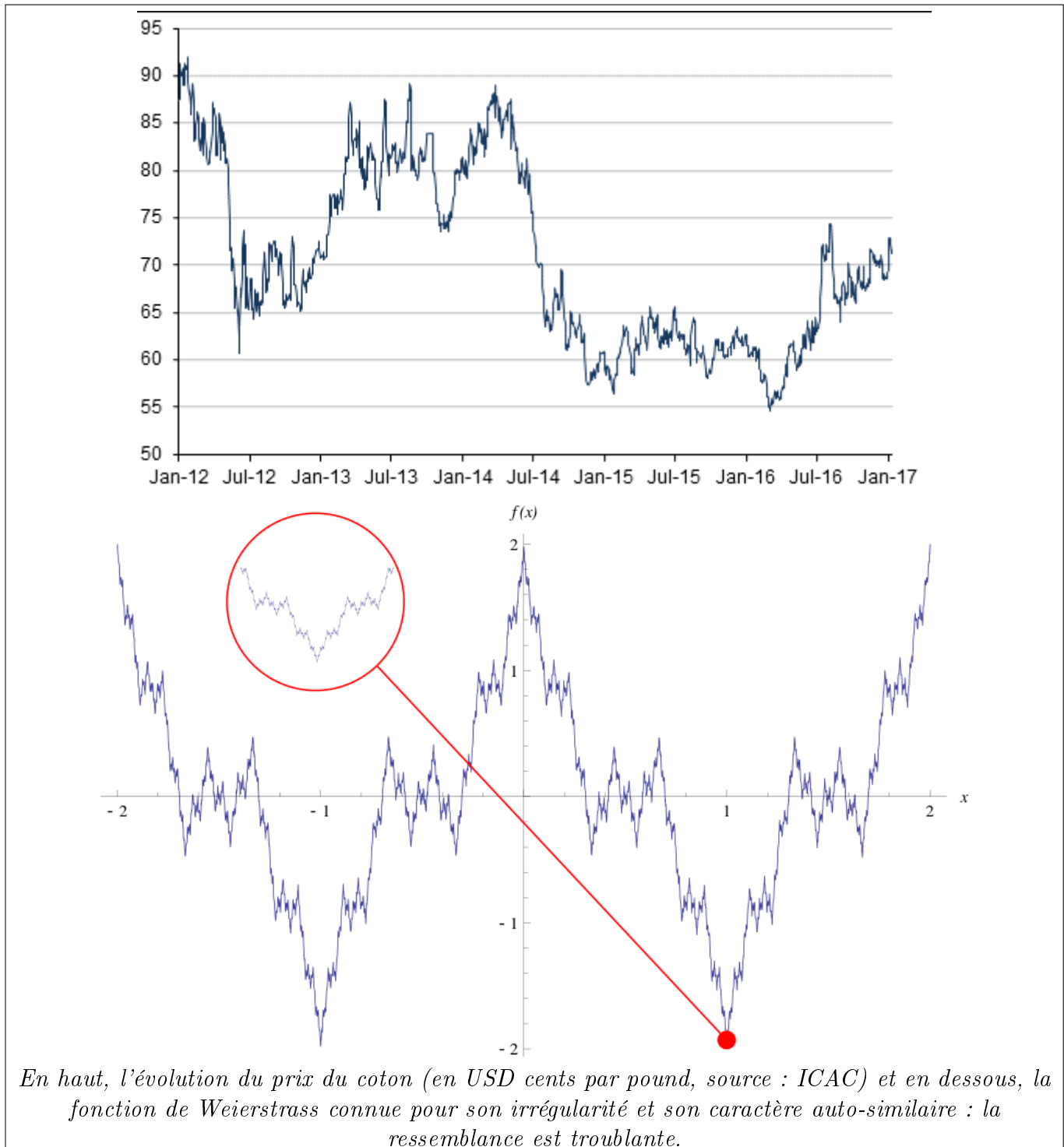
Bien que son oncle ait attiré son attention dessus longtemps auparavant, ce n'est qu'en 1970 que Mandelbrot redécouvre le *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles* qui valut le Grand Prix de l'Académie des sciences à son ancien professeur, Gaston Julia. Ayant accès aux ordinateurs d'IBM, il lui est alors possible de représenter les ensembles de Julia, de la même manière que sur les exemples que nous avons vu, ce qui l'amènera à introduire l'ensemble qui aujourd'hui porte son nom.

Benoît Mandelbrot donne alors le nom de « fractale » (du latin *fractus*, brisé) à ce type d'ensemble, en raison de leur aspect fortement irrégulier. Mais il ne s'est pas contenté de cela puisqu'il est le premier à leur trouver de nombreuses applications concrètes, notamment en économie, en biologie, dans l'étude du mouvement brownien, etc.



Szolem Mandelbrojt (1899-1983)

Malheureusement le caractère hautement original de ses travaux a dans un premier temps tendance à rebuter. En effet l'approche fractale apparaît comme trop différente et trop complexe du côté des sciences appliquées tandis qu'elle est jugée très sévèrement par les mathématiciens « purs », y compris par son oncle.



Son œuvre est finalement reconnue à sa juste valeur à partir des années 90, où l'utilité des objets fractals est telle que l'on ne peut plus se permettre de s'en passer notamment dans la modélisation financières mais également dans des domaines aussi variés que la biologie, l'astronomie, la géologie, etc.

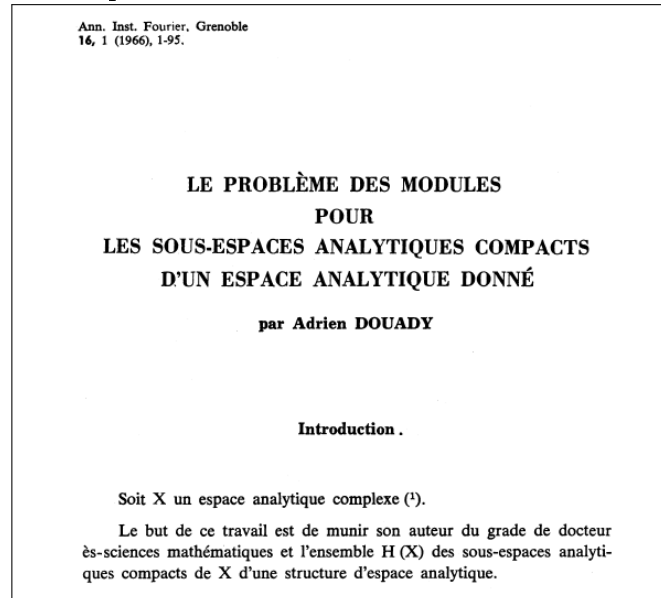
C'est donc après une vie bien remplie que Benoît Mandelbrot s'éteint en 2010 à Cambridge aux États-Unis des suites d'un cancer.

IV.5 Adrien Douady (1935-2006)



Adrien Douady et son lapin en Mai 2006

Adrien Douady est un mathématicien français né à Grenoble en 1935, ancien élève normalien, il prépare une thèse (dont on peut voir un extrait soigneusement choisis ci-dessous), qu'il soutient en 1966, sous la direction d'Henri Cartan et la soutient en 1966. Nul doute que ce dernier, devant les compétences mathématiques et le sens de l'humour très prononcé de son élève, verra en lui une recrue de choix pour Bourbaki.



Cependant, contrairement aux autres bourbakistes, Douady s'intéresse de près aux travaux de Mandelbrot et baptise du nom de ce dernier l'ensemble désormais bien connu.

Ainsi, les principaux résultats récents sur les itérations de fonctions complexe, comme la connexité de l'ensemble de Mandelbrot sont dûs à lui et à ses élèves.

Par ailleurs, il est également, avec sa femme Régine Douady, auteur de contenus pédagogiques et didactiques remarquables, ce qui rend, s'il est possible, d'autant plus regrettable son décès d'une noyade aux environs de Saint-Raphaël en Novembre 2006.

« Je dois avouer qu'en 1980, toutes les fois que j'ai annoncé à mes amis que nous avons commencé à étudier, avec J.H. Hubbard, les polynômes de degré deux à une variable complexe (et plus particulièrement ceux de la forme $f : z \mapsto z^2 + c$), ils me dévisageaient en me demandant : Vous pensez réellement trouver quelque chose de nouveau ?

C'est cependant cette simple famille de polynômes qui est responsable de la construction d'objets si compliqués : pas chaotiques, mais bien au contraire, rigoureusement organisés selon des lois combinatoires sophistiquées. »

Adrien Douady



Adrien Douady étudiant l'ensemble de Mandelbrot

V Documentation

Ci-dessous, classées par thématiques, les références des ouvrages et liens utiles que le lecteur assidu pourra consulter pour approfondir ses recherches.

Généralités (eljj) : <https://www.youtube.com/watch?v=Y4ICbYtBGzA>

Ensemble de Mandelbrot interactif : <http://www.malinc.se/m/JuliaSets.php>

Pi (Numberphile) : <https://www.youtube.com/watch?v=d0vY0CKYhPY>

La dynamique du lapin : <https://www.youtube.com/watch?v=JttLtB0Gkdk>

Dimension fractale (3blue1brown) : <https://www.youtube.com/watch?v=gB9n2gHsHN4>

Applications :

B. Mandelbrot, *Les objets fractals - Forme, hasard et dimension*

Les fractales - Art, Nature et Modélisation (Bibliothèque Tangente HS n° 18)

Contenu théorique approfondi :

<http://pi.math.cornell.edu/~hubbard/OrsayFrench.pdf>

Peitgen HO., Jürgens H., Saupe D. *Julia Sets : Fractal Basin Boundaries*. (Springer, New York, 1992)

P. Fatou :

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Fatou.html>

<http://images.math.cnrs.fr/Pierre-Fatou-mathematicien-et-astronome>

M. Audin, *Fatou, Julia, Montel, le grand prix des sciences mathématiques de 1918, et après* (Springer, Berlin, 2009)

G. Julia :

https://www.horizon14-18.eu/wa_files/Lettre_20automne_202011_20LCDD_2023_20web.pdf

<https://alysgo-apollo.org/lycee-lamoricier/lyceens/un-lyceen-celebre-le-mathematicien.html>

<http://www.cerclealgerianiste.fr/index.php/archives/encyclopedie-algerianiste/culture/sciences/technologie/374-un-des-plus-grands-mathematiciens-du-xxe-siecle-gaston-julia>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Julia.html>

<https://images.math.cnrs.fr/Le-double-portrait-des-mathematiciens-Gustav-Herglotz-et-Gaston-Julia.html>

G. Cantor :

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cantor.html>

<http://georgcantorbyelithompson.blogspot.com/2015/02/the-cantor-set.html>

B. Mandelbrot :

<https://www.youtube.com/watch?v=0kw391-egAA>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Mandelbrot.html>

<https://www.youtube.com/watch?v=0ABtOHVhr6E&list=PLVV0r6CmEsFwL4HlrIKxKmdpBAGYJ9AbR>

A. Douady :

<http://serge.mehl.free.fr/chrono/Douady.html>

<https://videotheque.cnrs.fr/doc=166>

<https://www.math.univ-toulouse.fr/~cheritat/Adrien70/FakeDouadys/>

<http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=286#> (hilarant)

