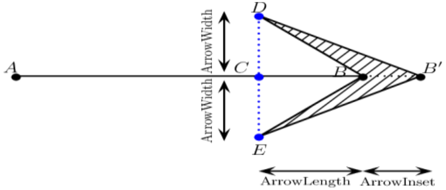
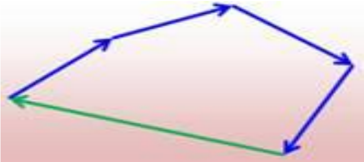
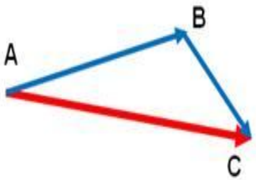
« Dessine-moi un vecteur »

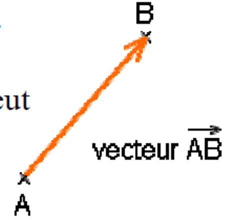


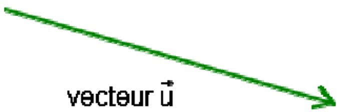


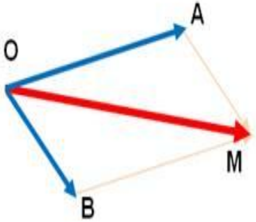


Si un vecteur va d'un point A à un point B on le note $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Si les points d'origine et d'arrivée n'ont pas de nom, on peut simplement noter le vecteur avec une petite flèche au-dessus d'une lettre en minuscule, par exemple le vecteur $\vec{u}$.



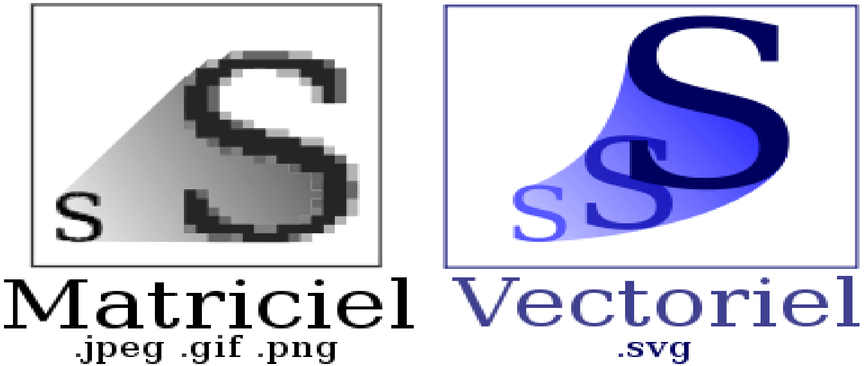




Étymologie et usages

1. 1596 « conducteur d'un bateau ou d'une voiture »
2. 1752 Qui porte, qui entraîne. Les Tourbillons **vecteurs** des planètes
3. 1760 *rayon vecteur* « rayon qui va du centre d'un astre à un satellite »
4. 1910 « hôte d'un agent infectieux qui le transmet en parasitant un être vivant »
5. 1922 *substance vectrice* ; « ce qui conduit, qui transporte quelque chose »
6. 1936 « ce qui transmet un message, une donnée abstraite »
7. 1962 « engin permettant le transport d'une bombe atomique à son point de chute

1862 math. Emprunté au latin.*vectŏr, -ōris* « celui qui transporte », dér. de *vehĕre* « transporter, porter ». Introduit par l'intermédiaire de l'anglais *vector* utilisé en math. (1846, W. R. Hamilton) d'après son usage en astronomie



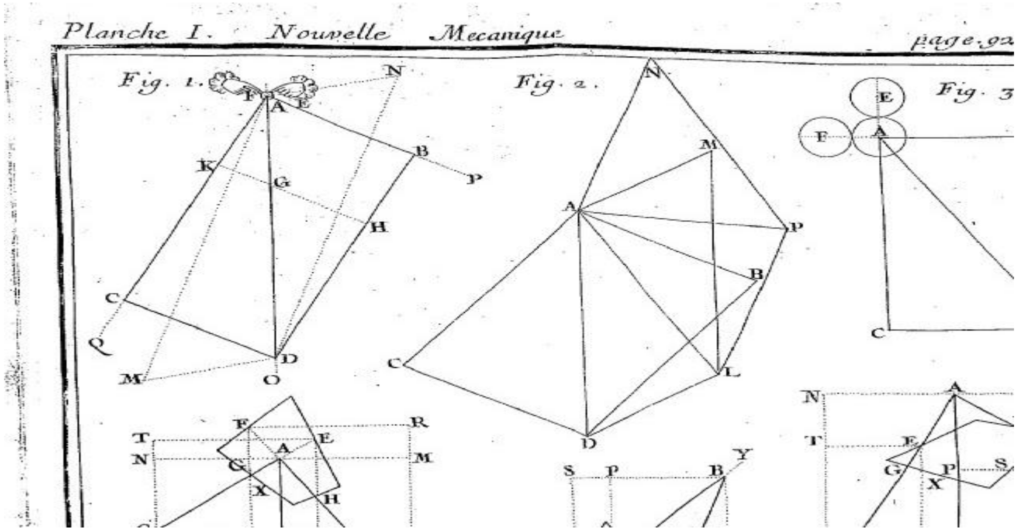
Avant

les vecteurs…

Équilibre des forces

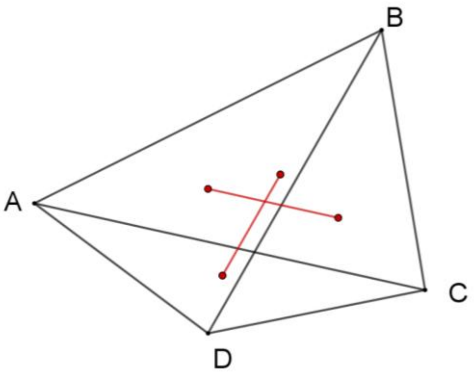
La « Clootcransbewijs » Simon Stevin (1548 – 1620)

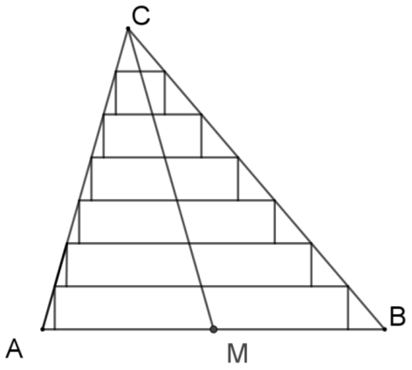
Le parallélogramme des forces de Pierre Varignon (1654 – 1722)



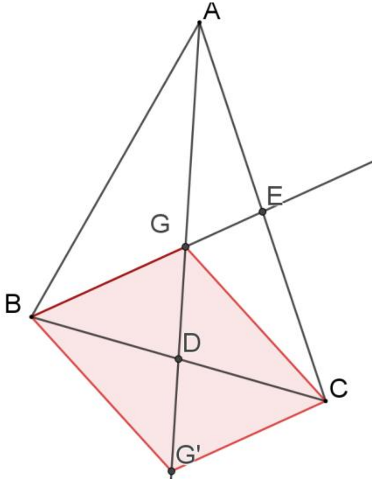
Calculs barycentriques

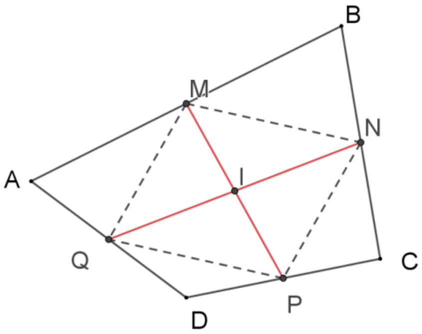
Centre de gravité d’une plaque homogène





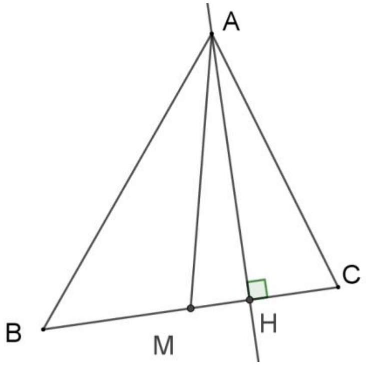
Isobarycentre d’un système de points





Angles et distances

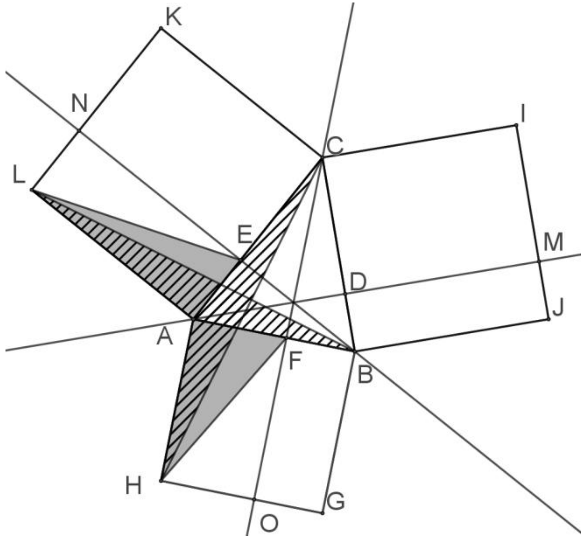
Le théorème de la médiane
Apollonius (–240 - ?)



$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$
$$AC^2 = AH^2 + CH^2$$
$$AM^2 = AH^2 + MH^2$$
$$AB^2 + AC^2 - 2AM^2$$
$$= (BH^2 - MH^2) + (CH^2 - MH^2)$$
$$= \cdots = \frac{1}{2}BC^2$$

La loi des cosinus
Al Kashi (1380 – 1429)

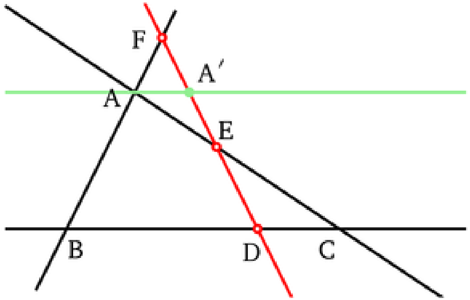
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos\hat{C}$$



… il fallait souvent regarder la figure

Problèmes d'alignement

Le quadrilatère complet



Théorème de Meneläus)

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} \times \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = 1$$

Meneläus d'Alexandrie (70 – 140)

Les équations de droites

Soient $A(x_A, y_A)$et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts tels que $x_A \neq x_B$.

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\textit{variation des ordonnées}}{\textit{variation des abscisses}}$$

L'accroissement des ordonnées (la variation) est proportionnel à l'accroissement des abscisses et le coefficient de proportionnalité est a

Remarque : Si $x_A = x_B$ alors la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées et le coefficient directeur n'existe pas.

La droite (AB) admet pour équation $x = x_A$

(extrait d'un site d'aide aux élèves « approuvé par les parents »)

Vecteurs du plan :
une définition

Un vecteur est un ensemble

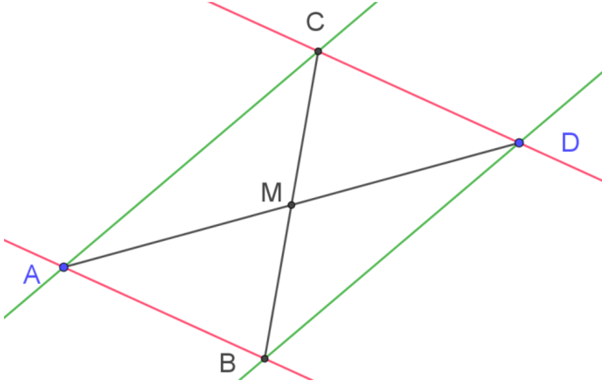
… de **bipoints** : (A, B) et (C, D) appartiennent au même vecteur si (A, D) et (B, C) ont le même milieu. On dit que (A, B), par exemple, est un **représentant** du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Avantages : intégration de tous les cas de figure

Le milieu d'un bipoint est une notion universelle

(… et pas liée à la distance)

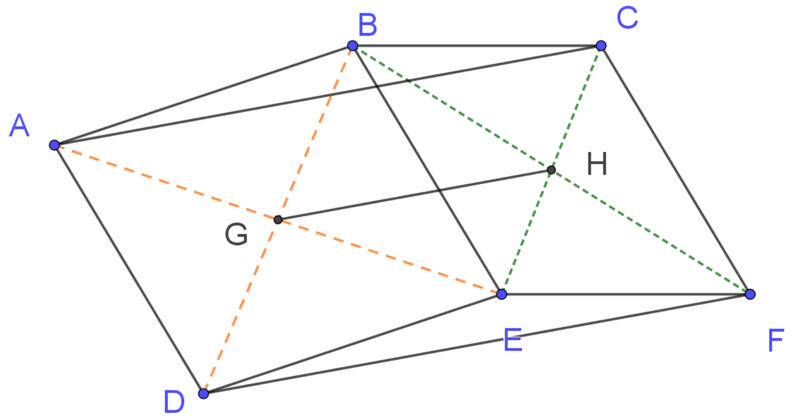
Possibilité du calcul vectoriel



Le calcul vectoriel (1)

Addition des vecteurs

Pour faire une opération sur deux vecteurs, faites-en une sur des représentants



*Vous passerez alors au vecteur, **lorsque vous aurez montré** que le vecteur résultat est indépendant des représentants choisis.*

Le calcul vectoriel (2)

Produit d'un vecteur par un réel

$\vec{u} + \vec{u} = 2\vec{u}$ *peut s'écrire chaque fois qu'on a défini une addition sur un ensemble. Ça n'ajoute rien.*

On peut prolonger cette notation au produit par un rationnel. L'étendre au produit par un réel est plus délicat.

La colinéarité

Des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel α tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha\vec{u}$

On peut *imaginer* ce qui se passe si l'un des vecteurs est le vecteur nul, mais c'est une régression que de considérer a priori les vecteurs comme nuls ou pas.

Qui a inventé les vecteurs ?

Jean-Robert Argand (1768 – 1822) et la notation $z = a + \mathrm{i}b$ pour désigner les points du plan

Hermann Günther Grassmann (1809 – 1877) et la *lineale Ausdehnung* construit une théorie complète

William Rowan Hamilton (1805 – 1865) est l'inventeur des *quaternions* (qui peuvent être considérés comme sommes d'un nombre et d'un vecteur de l'espace.

L’algèbre linéaire

Il y a des ensembles d’objets dans lesquels existe :

Une addition possédant les mêmes propriétés que l’addition des nombres réels

Une opération des nombres réels sur ces objets :

$(a, x) \mapsto a.x$ telle que, pour tous a, b, x, y:

$(ab).x = a.(bx)$ $\qquad$ $(a+b).x = a.x + b.x$

$a.(x+y) = a.x + a.y$ et $1.x = x$