LA DÉMONSTRATION AU COLLÈGE

Le 19 décembre 2012

DOCUMENTS DE RÉFÉRENCES

- Les programmes officiels de collège (euler)

- Document ressource : «raisonnement et démonstration » (eduscol juin 2009) sur euler

- « Démontrer et évaluer au collège » (Académie de Versailles) CRDP

CE QUE DIT LE PROGRAMME

- La question de la **preuve** occupe une place centrale en mathématiques.

- La pratique de l'**argumentation** pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre un «phénomène» mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l'élève à cette **forme particulière de preuve qu'est la démonstration.**

COMPÉTENCES DU SOCLE COMMUN

(Palier 3, Compétence 3, Domaine « Pratiquer une démarche scientifique, résoudre des problèmes»

Items :
« Rechercher, extraire et organiser l'information utile. »,

« Réaliser, manipuler, mesurer, calculer, appliquer des consignes. »,

« Raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale ou technologique, ou démontrer. »,

« Présenter la démarche suivie, les résultats obtenus, communiquer à l'aide d'un langage adapté. »

DES DÉMONSTRATIONS AUSSI BIEN EN GÉOMÉTRIE QUE DANS LE DOMAINE NUMÉRIQUE POUR :

- Donner du sens aux notions abordées
- Structurer, renforcer les connaissances, les décloisonner
- Introduire de nouveaux outils pour démontrer
- Articuler les notions entre elles
- Acquérir des compétences dans le domaine du raisonnement

DEUX ÉTAPES

- La première, la plus importante, est **la recherche et la production d'une preuve** que l'on peut appeler le **raisonnement**

- La seconde, **mise en forme de la preuve**, ne doit pas donner lieu à un formalisme prématuré ; des exigences trop importantes de rédaction risqueraient d'occulter le rôle essentiel du raisonnement.

- En particulier la mise en forme écrite d'une preuve appelée **démonstration formalisée** ne fait pas partie des exigences du socle commun

AUSSI ON DISTINGUERA :

- Les démonstrations proposées par l’enseignant où chaque étape doit être clairement identifiée et la rédaction aboutie

- Les démonstrations proposées par les élèves que l’on rencontrera souvent dans la **résolution de problèmes** pour lesquelles une place prépondérante sera accordée au raisonnement

DIFFÉRENTS TYPES DE RAISONNEMENTS RENCONTRÉS AU COLLÈGE

- Raisonnement déductif (si … , alors….)
- Raisonnement par disjonction de cas
- Infirmation par production d’un contre-exemple
- Raisonnement par l’absurde (approche)

- Un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux

- Pour qu’il soit vrai, <u>il est nécessaire</u> qu’il soit vérifié dans tous les cas

- Pour qu’il soit faux, <u>il suffit</u> de trouver un exemple qui ne le vérifie pas (contre-exemple)

Exemples en quatrième

Type de raisonnement	Organisation, gestion de données, fonctions	Nombres, calcul	Géométrie
déductif	Proportionnalité et alignements de points	Quotients Ordre et addition Ordre et multiplication	Toute la géométrie
avec un contre-exemple	Situations de non-proportionnalité	Opposé du produit et produit des opposés Somme des inverses et inverse de la somme	Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors (MN) et (BC) sont parallèles
par disjonction de cas		Ordre et multiplication	Intersection droite-cercle
par l'absurde (approche)	Suites de nombres non proportionnelles (graphique)	Tester si un nombre est solution d'une équation	Un triangle n'est pas rectangle

DÉMONTRER EN PRODUISANT UN CONTRE-EXEMPLE

Exemple en classe de 4e :

La proposition « si la somme de deux nombres non nuls n'est pas nulle, alors l'inverse de cette somme est égal à la somme des inverses des deux nombres » **est fausse**

Soit $a = 1$ et $b = 2$. Alors : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1+\frac{1}{2}$, donc $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1,5$

et $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{3}$.

Donc $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\neq\frac{1}{a+b}$.

Il existe deux nombres non nuls *a* et *b*, de somme non nulle, tels que $\frac{1}{a+b}\neq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

INITIATION AU RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

Exemple en classe de 4e :

Soit un triangle ABC tel que $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$.

Si le triangle ABC était rectangle en A, on aurait, d'après le théorème de Pythagore,

$BC^2 = AB^2 + AC^2$, ce qui n'est pas le cas.

Donc le triangle ABC n'est pas rectangle en A

Donc « si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A ».c

RAISONNEMENT PAR DISJONCTION DE CAS

Exemple en classe de 4e :

Ordre de deux nombres de même signe et de leurs carrés

Soient a et b deux nombres de même signe, tels que $a < b$.

1er cas : a et b sont tous les deux positifs.

Alors, $a < b$ et $a > 0$, donc $a \times a < b \times a$

$a < b$ et $b > 0$, donc $b \times a < b \times b$

Donc par **transitivité de la relation d'ordre,** $a^2 < b^2$

2ème cas : a et b sont tous les deux négatifs.

Alors, $a < b$ et $a < 0$, donc $a \times a > b \times a$

$a < b$ et $b < 0$, donc $b \times a > b \times b$

Donc par **transitivité de la relation d'ordre,** $a^2 > b^2$

Conséquence : Soient a et b deux nombres **positifs** si $a^2 < b^2$ alors $a < b$.

DANS LE COURS

- Réserver le mot « démonstration » à de vraies démonstrations mathématiques, ne pas l'utiliser pour des illustrations de raisonnements.
- Qualifier systématiquement les énoncés (définition, propriété, théorème) à distinguer des « méthodes » ou « illustrations ».
- Signaler systématiquement un énoncé admis.
- La progression choisie détermine les démonstrations possibles.
- Il ne s'agit pas de faire toutes les démonstrations de la liste mais de déterminer en équipe pédagogique celles qui seront faites par toutes les classes.

DES PISTES …

Travailler en amont :

- **Le vocabulaire**

- *Soit, étant donné, on considère*
- *Données, hypothèses*
- *Consécutifs, respectifs, successifs*
- *Le, la, un ou une ?*
- *Une ou des ?*
- *Dessiner, tracer, placer, représenter, construire …*
- *Vérifier que, expliquer pourquoi, prouver que, montrer, démontrer, justifier …*
- *En déduire*
- *Factoriser, développer, effectuer*
- *Comparer, classer*
- *Déterminer, calculer*
- *Résoudre*
- *Conjecturer*
- *Vrai ou faux*
- *Car, en effet, parce que, à cause de, donc, …*
- *Quel que soit, il existe, soit, tout, tous, il y a …*
- *…*

Exemple en classe de 6e avec : le, la, un ou une ?

Compléter le texte avec le, la, un ou une :

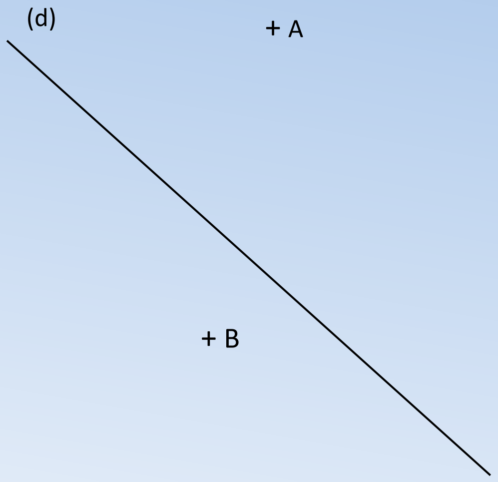
On a une droite (d) et deux points A et B.

a) Trace …droite passant par … point A et perpendiculaire à (d).

b) Trace … droite passant par … point A et sécante à … (d).

c) Place … point M équidistant du point A et du point B.

d) Place … point C tel que B soit … milieu de [AC]



- **Travailler le si …, alors …**

Exemple en classe de 4e :

- *À partir des onze propriétés suivantes d'un quadrilatère Q, on peut construire des implications et demander aux élèves de repérer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.*
- *Q est un rectangle.*
- *Les diagonales de Q se coupent en leur milieu.*
- *Deux côtés consécutifs de Q sont égaux.*
- *Q est un parallélogramme qui a un angle droit.*
- *Q est un carré.*
- *Q est un parallélogramme qui a ses diagonales égales.*
- *Q est un losange.*
- *Les côtés opposés de Q sont parallèles.*
- *Les diagonales de Q sont perpendiculaires.*
- *Q est un losange qui a un angle droit.*
- *Q est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux.*

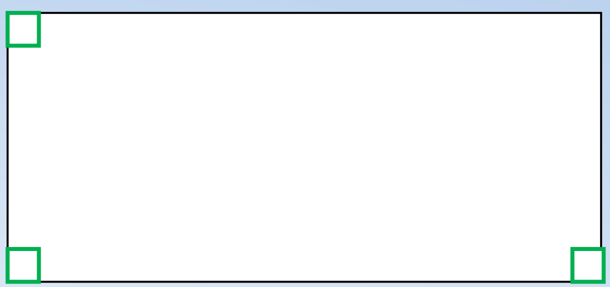
Ce travail permettra aussi de comprendre le rôle des exemples et des contre-exemples.

➢ Illustrer les théorèmes

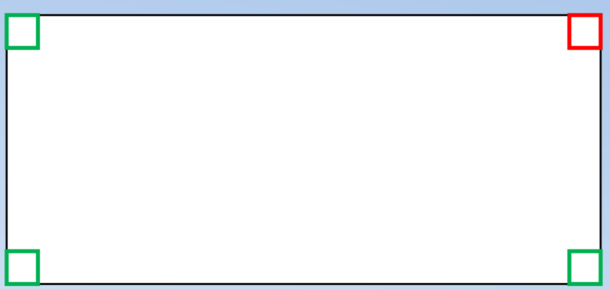
Exemple en classe de 6e :

Illustrer la propriété suivante :
« Si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle.3

SI



ALORS



➢ Travailler sur le langage professeur, langage élève

Les programme de construction rédigé en « langage élève » et en « langage professeur »

Exemple en classe de 6e :

Programme de construction élève :

« Je trace un segment [MN] de 5 cm de longueur.
Avec mon compas, je prends un écartement de 4 cm.
Je place la pointe sur M et je trace un cercle.
Je garde l'écartement du compas et je place la pointe sur N et je trace un cercle.
J'obtiens le point P.
Je relie M à P et N à P. »

Programme de construction professeur :
« Trace un segment [MN] de 5 cm.
Trace le cercle de centre M et de rayon 4 cm, puis le cercle de centre N de rayon 5 cm.
Nomme P l'un des points d'intersection.
Trace les segments [MP] et [NP]. »

- Narration de recherche

- Travailler les codages

- Accepter les représentations non discursives (tableaux, schémas …)

- Outils TICE : logiciels tableurs et de géométrie dynamique pour aider à la conjecture.

ET EN ÉVALUATION ?

- Distinguer le fond de la forme

- Pas d’exigence prématurée sur la forme

- Valoriser les écrits intermédiaires

- Valoriser/évaluer les interventions orales (dialogue, débat)