Écrire les nombres

Pour écrire les nombres, on a besoin de symboles, les *chiffres*. Le mot arabe *sifr* (صفر) a donné en italien *zefiro*, puis *zero*, dont le français a tiré *zéro* et *chiffre.*

Inventer les nombres

Avertissement

En 1994, Georges Ifrah publie son *Histoire universelle des chiffres.* 2 000 pages et des tas de documents. Admiration.

On va évoquer de l'histoire, bien sûr, mais le risque est grand de confusion entre les époques, les lieux et les idées dominantes. Il y a toujours un spécialiste pour vous accuser de confondre Babylone et Sumer…

Donc on y va doucement.

Des numérations anciennes

Basique : les systèmes *unaires* n’utilisent qu’un symbole, IIII ou XXX ou •••

Système additif : Quelques symboles représentent quelques nombres ; on en juxtapose autant qu’il faut de chaque sorte pour représenter le nombre voulu. Les symboles égyptiens ci-contre représentent 100, 10, 1.

Variante 1 : L’ordre des symboles peut appeler une *protraction*, comme chez les romains (je suis né en MCML, ma fille cadette en MCMXC)

Variante 2 : On indique le nombre de symboles de chaque sorte il faut considérer.

千九百七十五 en japonais ou en chinois signifie 1 975 $(1\,000 + 9 \times 100 + 7 \times 10 + 5)$

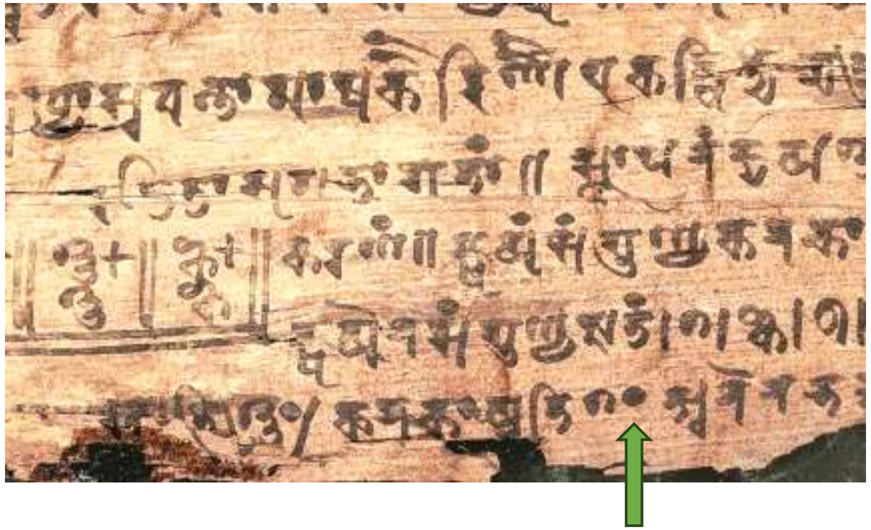
Positionnel : Les symboles utilisés marquent, selon leur position, quel nombre de fois compter telle puissance de la *base.*

Que fait-on si cette puissance n’apparaît pas?

Zéro, ce n’est pas rien (1)…

Babylone L’écriture babylonienne des nombres utilise deux symboles, le clou et le chevron.

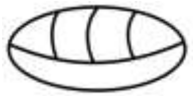
Les groupes de symboles, de la droite vers la gauche, indiquent le nombre d’unités, si on peut dire, puis le nombre par lequel multiplier 60, 3 600, etc. On sait qu’on passe de l’un au suivant en observant un « blanc ».



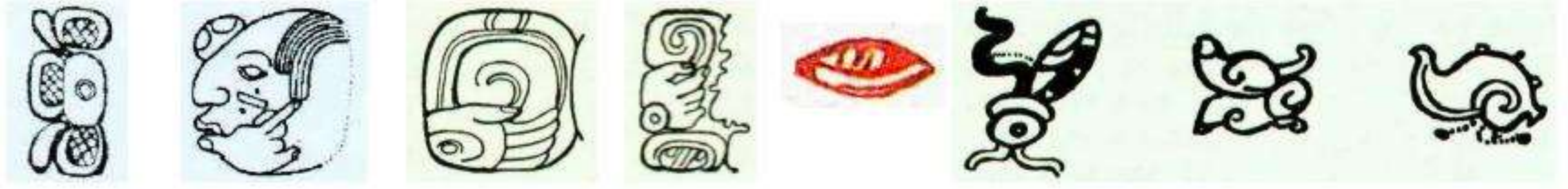
sunya

Inde Le manuscrit de Bakhshali est considéré comme le plus ancien manuscrit traitant des mathématiques indiennes. Il fait apparaître un symbole séparant deux groupes de chiffres : le zéro (*sunya*).

Zéro, ce n’est pas rien (2)…



Les **Mayas** ont aussi un symbole pour indiquer l’absence d’une puissance dans l’écriture d’un nombre MAIS …



En **Inde**, Brahmagupta (598 – 670) considère zéro comme le résultat de la différence entre un nombre et lui-même. Fin du problème philosophique : « zéro est-il seulement le signe d’une absence ou peut-on le considérer comme un nombre? » Zéro est un nombre.

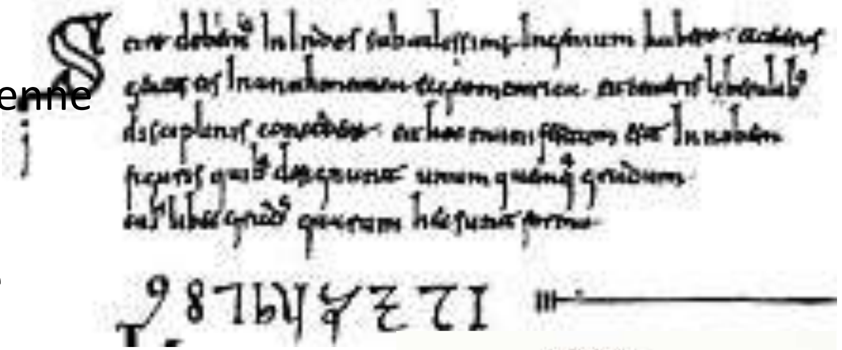
Traces de systèmes anciens

Dix	Onze	Douze	Treize	Quatorze	Quinze	Seize	dix-sept
Diez	Once	Doce	Trece	Catorce	Quince	Diesiseis	…
Zehn	Elf	Zwölf	Dreizehn	Vierzehn	Fünfzehn	…	
Ten	Eleven	Twelve	Thirteen	Fourteen	…		
десять	одиннадцать,	двенадцать,	…				

Le calcul écrit en Europe

La *Maison de la sagesse* a été fondée à Bagdad par la dynastie des Abbassides, notamment *Haroun al Rachid* (765 – 809). Elle accueille entre autres *Abou Jafar Muhammad ibn Musa Al Khwarizmi,* dont deux ouvrages permettent la diffusion dans le monde arabe du calcul écrit utilisant la numération de position. Le terme « *al jabr* » est passé à la postérité.

On trouve dans le *codex vigelianus* (Xe siècle) la plus ancienne représentation des chiffres « arabes » en occident.

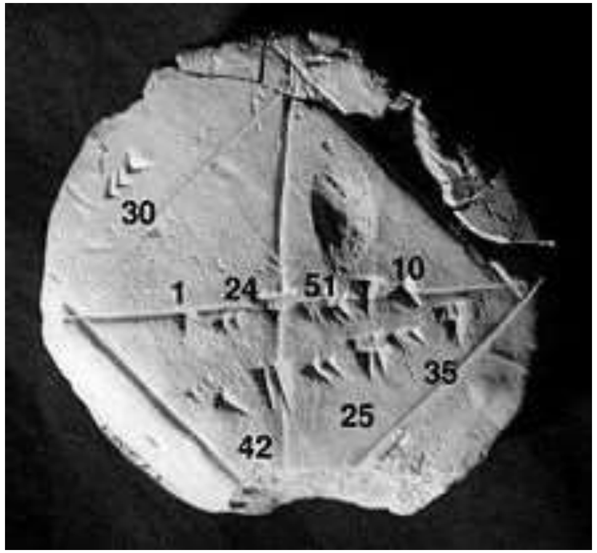


Gerbert d'Aurillac (950? – 1003), pape sous le nom de *Sylvestre II*, introduit le calcul sur abaque avec des jetons numérotés. On lui doit des travaux en arithmétique et géométrie.

Léonard de Pise (1170? – 1250?) apprend le calcul écrit par ses contacts avec les négociants de Bejaïa (en Algérie actuelle). Il le diffuse en particulier dans le *Liber abaci*, qui comporte beaucoup de problèmes pratiques. Les lapins, c'est lui.

Il a inventé les décimaux

Les Grecs ont découvert l'insuffisance de la commensurabilité.
Les *fractions,* rarement écrites sous la forme que nous connaissons, servent à gérer des situations pour lesquelles les nombres entiers sont insuffisants, mais on trouve, à Babylone, en Inde, chez les Arabes, des calculs complexes (par exemple la tablette YBC 7289 donne une très bonne approximation de $\sqrt{2}$).
François Viète (1540 – 1603) plaide : *« En mathématiques les soixantièmes et les soixantaines doivent être d'un usage rare ou nul. Au contraire les millièmes et les mille, les centièmes et les centaines, les dixièmes et les dizaines doivent être d'un usage fréquent ou constant. »*



Simon Stevin (1548 – 1620) publie en 1585 *La Disme,* petit livre dans lequel il introduit la notation décimale et le calcul sur les décimaux.

19⓪1①7②8③

Né à Bruges, Stevin a passé une grande partie de sa vie dans les *Provinces unies.* Il a laissé son nom dans de nombreux domaines, en hydraulique, en statique, en mathématiques, en linguistique. Sa statue, à Bruges, reproduit la *Clootcransbewijs* (expérience de pensée sur la statique du plan incliné.

...mais on avait les jetons

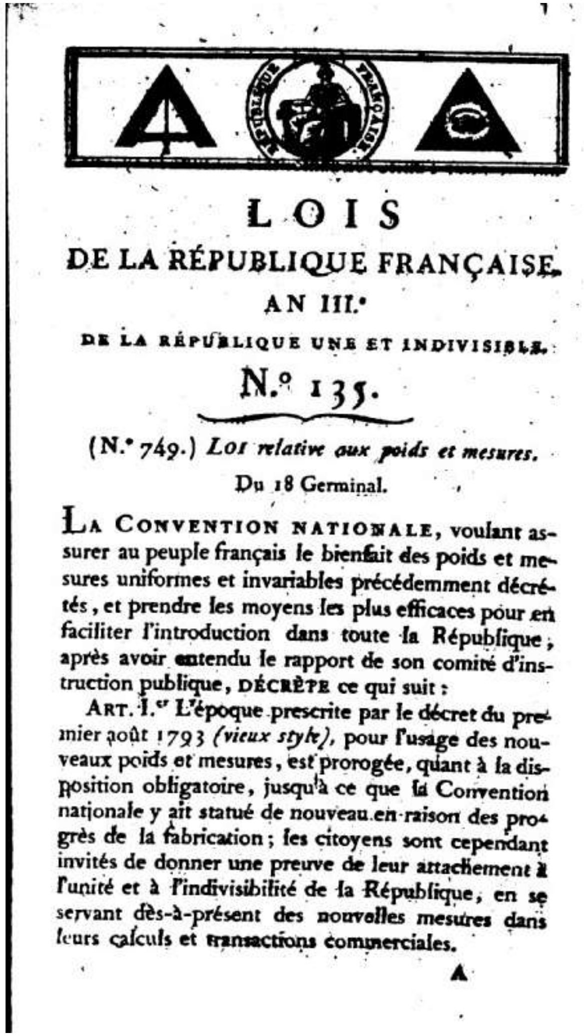
Unités de compte (Charlemagne)

	Livre	Sou	Denier
Livre	1	20	240
Sou	1/20	1	12
Denier	1/240	1/12	1

Le malade imaginaire (1673)

Unités de règlement (pièces de monnaie physiques) : louis, écu, franc, gros, liard, maille. Usage et masse de métal variable selon les époques et les monarques

Pour le chancelier de l'échiquier



LOIS
DE LA RÉPUBLIQUE FRANÇAISE.
AN III.e
DE LA RÉPUBLIQUE UNE ET INDIVISIBLE.
N.° 135.

(N.° 749.) *Loi relative aux poids et mesures.*

Du 18 Germinal.

LA CONVENTION NATIONALE, voulant assurer au peuple français le bienfait des poids et mesures uniformes et invariables précédemment décrétés, et prendre les moyens les plus efficaces pour en faciliter l'introduction dans toute la République ; après avoir entendu le rapport de son comité d'instruction publique, DÉCRÈTE ce qui suit :

ART. I.er L'époque prescrite par le décret du premier août 1793 *(vieux style)*, pour l'usage des nouveaux poids et mesures, est prorogée, quant à la disposition obligatoire, jusqu'à ce que la Convention nationale y ait statué de nouveau en raison des progrès de la fabrication ; les citoyens sont cependant invités de donner une preuve de leur attachement à l'unité et à l'indivisibilité de la République, en se servant dès-à-présent des nouvelles mesures dans leurs calculs et transactions commerciales.

A

Qu'est-ce qu'un nombre?

« Dieu a fait le nombre entier, le reste est l'œuvre des hommes »

L. Kronecker (1823 -1891)

On a mis quelques siècles à étendre l'idée de collection *ou d'*effectif *à laquelle on a associé le nombre. Cette idée n'a pas totalement disparu :*

Compter des objets, des animaux ou des personnes en **japonais** est assez spécifique, probablement hérité des classificateurs en chinois, que l'on retrouve également dans les compteurs en coréen. En effet, il est nécessaire d'intercaler entre le nombre et l'objet du comptage un suffixe, dépendant de la nature de cet objet. Parfois, la prononciation du nombre peut même en être affectée. (Wikipedia)

Le zéro reste ambigu (voir les énoncés de problèmes), les nombres négatifs étaient appelés « fausses racines » par d'Alembert (on y reviendra).

Définir, classer, inventer

*Dans l'*Encyclopédie (1765) :

- NOMBRE, sert vulgairement *dans l'Arithmétique* d'une collection ou assemblage d'unités ou de choses de la même espèce.
- M. Newton définit plus précisément le *nombre*, non pas une multitude d'unités, comme Euclide, mais le rapport abstrait d'une quantité à une autre de la même espèce, que l'on prend pour l'unité ; d'après cette idée, il divise les *nombres* en trois espèces, savoir, *nombres entiers*, c'est-à dire, qui contiennent l'unité ou certain nombre de fois exactement & sans reste, comme 2, 3, 4, *&c. nombres rompus* ou fractions & *nombres sourds* ou incommensurables.

Écriture décimale pour tous?

Les nombres entiers disposent d’une écriture décimale de longueur finie.

Les nombres rationnels peuvent aussi être représentés : leur écriture décimale est illimitée *périodique,* comme $\frac{1}{7} = 0{,}142857\overline{142857}\ldots$

Comment le sait-on? Par l’algorithme d’Euclide.

Les premiers nombres irrationnels identifiés s’expriment comme résultats de sommes ou produits de racines d’entiers : les *surds numbers* des Britanniques. Mais…

Toute suite décimale illimitée non périodique définit un nombre (évidemment irrationnel). Par exemple 0,12345678910111213141516… (nombre de Champernowne). Evidemment il y en a une infinité.

Rappel : 0,999999…= 1. Les suites infinies de 9 sont interdites.

Nombres et équations

Dans l'*Encyclopédie,* d'Alembert réduit toute équation (par *l'évanouissement* et *l'abaissement*) à une équation prenant la forme de l'égalisation à 0 de la valeur prise par un certain polynôme à coefficients entiers en la variable x.

$$ax^n + bx^{n-1} + \cdots + rx + s = 0$$

Il indique qu'on peut de débarrasser des *fausses racines* (négatives ou imaginaires) en réécrivant le problème posé ou en lui déniant tout intérêt. Il affirme (*Théorème de d'Alembert*) qu'une telle équation a nécessairement n racines. Ce point de vue (ce n'était donc pas une démonstration) est redressé par Gauss (1799) et ça continue… Chut! Pas en troisième!

On pourrait poser une autre question : quels sont les nombres susceptibles d'être solutions d'une telle équation?

On peut les appeler nombres

NON, tous les nombres réels (c'est comme ça qu'on appelle les nombres susceptibles d'une écriture décimale illimité) ne sont pas solutions d'équations polynômiales à coefficients entiers : ceux qui ne le sont pas sont dits *transcendants*. Le plus célèbre d'entre eux est π.

On pourra appeler nombres les éléments d'ensembles contenant l'ensemble des nombres réels et en prolongeant les opérations. Le plus à portée est l'ensemble des nombres complexes (on l'a entrevu à propos des racines *imaginaires*).

Mais, M'sieur! Et les pourcentages? LES POURCENTAGES NE SONT PAS DES NOMBRES!