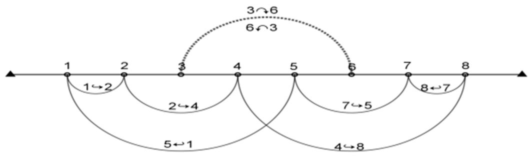
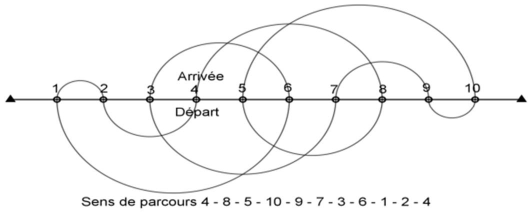
Rédaction possible pour « La raison du plus fort »

Déplacement d'un agneau



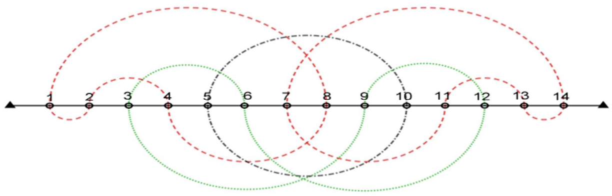
1. *a.* et ***b.*** Comme le montre la figure ci-contre, les positions occupées par l'agneau parti de 4 sont successivement 8, 7, 5, 1, 2 et 4, etc. tandis que l'agneau partant de 3 occupe ad libitum les places 6 et 3.
c. Le parcours au départ de la position 4 est fermé, toutes les positions 4, 8, 7, 5, 1, 2 sont revisitées en 6 mouvements. Au départ de la position 3, on répète les positions 6 et 3. Tout point de départ est donc retrouvé.

Un agneau en orbite



2. *a.* La figure ci-contre illustre le fait que l'orbite de 2 est {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 9, 10}.
b. Tous les entiers compris entre 1 et 10 ont la même orbite.

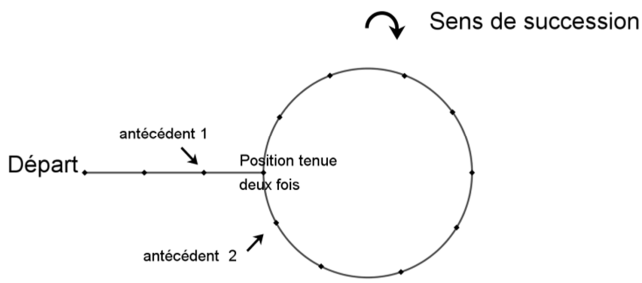
3. Dans le cas $n = 7$



La figure de gauche montre 4 orbites distinctes, et une symétrie par rapport à la médiatrice du segment (qui représente le chemin). $\Omega_1 = \{1, 2, 4, 8\}, \Omega_2 = \{3, 6, 12, 9\}, \Omega_3 = \{5, 10\}$ et $\Omega_4 = \{7, 14, 13, 11\}$.

4. Le chemin a pour longueur $2n + 1$. Supposons qu'un agneau occupe à un certain instant la position p. Si $p \leq n$, il double la distance qui le sépare du loup le plus proche, Loup 1, et va en $2p$. Si $p > n$, il double la distance qui le sépare du loup le plus proche, Loup 2, et va en $p - (2n + 1 - p) = 2p - 2n - 1$. La séparation entre les deux situations est repérée par la parité. Conclusion : un agneau occupant une position k paire, disons $k = 2p$, vient de la position p. Un agneau occupant une position impaire, disons $k = 2p + 1$, vient de la position $n + p + 1$.

5. C'est le théorème de la poêle à frire (dessin en regard). Supposons un agneau partant de la position k. Son parcours contient nécessairement une position visitée deux fois (ce parcours occupe au plus $2n$ cases et comporte plus de $2n$ étapes). D'après ce qui précède, cette position visitée deux fois ne peut l'être qu'après une visite de son **seul** antécédent, qui est donc lui aussi visité deux fois. Si on représente ce parcours avec une boucle, le raisonnement précédent fait entrer l'antécédent 1 dans la boucle en l'identifiant à l'antécédent 2, et ainsi de suite jusqu'au k de départ. Donc le point de départ est dans la boucle.



6. *a.* La suppression de la condition « nb = 0 » interdit au Tant Que de démarrer (le démarrage étant soumis au seul « positionCourante ≠ k », alors que le contenu de positionCourante est précisément k).
b. La partie grisée du tableau ci-contre donne le complément à réaliser pour l'algorithme.

```
nb ← 0
positionCourante ← k
Tant Que ((positionCourante ≠ k) ou (nb = 0))  Faire
        Si k < n
          positionCourante ← 2k
        sinon
          positionCourante ← 2k – 2n – 1
        nb ← nb + 1
Afficher nb
```

Et à plusieurs ? Moutons de Panurge…

7. Lors de ces déplacements collectifs, chaque agneau décrit une ou plusieurs fois son orbite. Si les agneaux se déplacent un nombre de fois égal au produit des cardinaux (nombres d'éléments) des orbites, chacun aura retrouvé sa place initiale. On peut faire mieux, se limiter au nombre d'orbites et non à $2n$ (nombre d'agneaux), ou même au plus petit multiple commun de ces cardinaux. Sauf que le nombre d'orbites n'est pas directement connu quand on connaît n.

Rédaction possible pour « Dés magiques »

Dé D_a \ Dé D_b	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

1. Le tableau ci-contre donne les combinaisons possibles lors du jet de deux dés tétraédriques et les sommes obtenues. Il y a 16 cases, dont trois portant le total de 6. La probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{3}{16}$.

2. On fait de même pour l'ensemble des résultats possibles :

Total	2	3	4	5	6	7	8
Probabilité	1/16	1/8	3/16	1/4	3/16	1/8	1/16

Le développement proposé donne : $P(x) = 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 1x^8$ (contrairement aux habitudes, on a fait apparaître le coefficient 1, pour le rendre plus visible). Les exposants de la variable qui figurent dans l'expression développée sont des sommes d'exposants figurant dans chacun des facteurs initiaux (il se trouve qu'ici ce sont les mêmes facteurs, mais le résultat est général). Le coefficient de x^s dans le comptabilise les produits des coefficients des x^a du premier facteur et des x^b du second facteur pour lesquels $a + b = s$. On ne « voit » pas ces produits de coefficients dans l'exemple traité, car ils sont tous égaux à 1…

Dé D_1 \ Dé D_2	1	4	4	4
1	2	5	5	5
1	2	5	5	5
2	3	6	6	6
5	6	9	9	9

3. On reprend le tableau réalisé plus haut avec les nouvelles données. Selon ce tableau, quatre jets (sur 16 possibles) conduisent à un total de 6. La probabilité d'obtenir 6 est donc $\frac{1}{4}$.

4. Les tableaux attachés aux (nouveaux) dés D_a et D_b sont :
$t_a = [1, 2, 2, 3]$ et $t_b = [1, 3, 3, 5]$ et les quantités polynomiales
$A(x) = x + 2x^2 + x^3$ et $B(x) = x + 2x^3 + x^5$

5. L'algorithme proposé se propose d'évaluer le coefficient des x^k dans le produit $x^p B(x)$. On aura le coefficient de x^k dans le produit $A(x)B(x)$ en faisant varier p de 1 à n. Les modifications apportées sont surlignées en gris.

```
Coef←0
Pour p allant de 1 à n
   Pour j allant de 1 à n
      Si p + t_b[j]= k alors
            Coef←Coef+1
      Fin Si
   Fin Pour
Fin Pour
Renvoyer Coef
```

6. ***a.*** $P(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4)^2$ est une quantité polynomiale associée aux tableaux identiques [1, 2, 3, 4]. On souhaite, avec les tableaux t_a et t_b, obtenir la même loi de probabilité, donc on souhaite que les quantités polynomiales $A(x)$ et $B(x)$ aient pour produit $P(x)$.
b. On a, pour tout x : $x + x^2 + x^3 + x^4 = x(1 + x + x^2 + x^3) = x(1 + x)(1 + x^2)$
c. Chacun des dés doit posséder au moins une face « 1 », seul moyen d'assurer la possibilité d'obtenir 2 en jetant les deux dés. Les quantités polynomiales associées doivent donc posséder un premier terme « ax ». La somme des coefficients des quantités polynomiales doit être 4 (il y a quatre faces). On a donc $A(0) = B(0) = 0$ et $A(1) = B(1) = 4$

d. On « partage » les facteurs x, $(1 + x)$ et $(1 + x^2)$ entre A et B. Chacun des deux reçoit « x » pour obéir à la condition $A(0) = B(0) = 0$. Si on partage de la même manière $(1 + x)$ et $(1 + x^2)$, on retrouve les dés D_a et D_b du début, que précisément on voudrait éviter. La répartition $A(x) = x(1 + x)^2$ et $B(x) = x(1 + x^2)^2$ répond aux critères et conduit aux tableaux [1, 2, 2, 3] et [1, 3, 3, 5] que nous avons rencontrés question **4.**

7. On recherche, de même, des quantités polynomiales $S(x)$ et $T(x)$ dont le produit soit
$Q(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2$, qu'on peut aussi écrire $Q(x) = x^2(1 + x)^2(1 + x^2 + x^4)^2$
$Q(x) = x^2(1 + x)^2(1 - x + x^2)^2(1 + x + x^2)^2$ peut être écrit comme le produit de $S(x) = x(1 + x)(1 + x + x^2)$, c'est-à-dire $S(x) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4$
par $T(x) = x(1 + x)(1 - x + x^2)(1 + x^2 + x^4)$ c'est-à-dire $T(x) = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8$. La somme des coefficients est bien 6 de chaque côté (on a failli avoir peur du signe « −», mais il n'y en a pas dans l'écriture finale).
Le tableau ci-contre montre la répartition des totaux pour le jet des deux dés. Ci-dessous, un tableau comparant les lois de probabilités dés standards / dés nouvelle mode :

Dé 1 \ Dé 2	1	3	4	5	6	8
1	2	4	5	6	7	9
2	3	5	6	7	8	10
2	3	5	6	7	8	10
3	4	6	7	8	9	11
3	4	6	7	8	9	11
4	5	7	8	9	10	12

Total des deux dés	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'occurrences dés standards	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Nombre d'occurrences dés « magiques »	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Rédaction possible pour « Opération triangle »

Quelques résultats

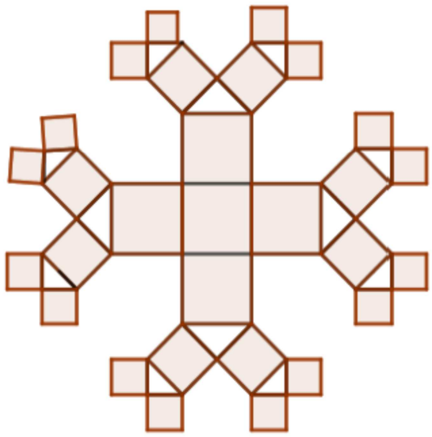
1. *a.* $1\Delta 0 = 0\Delta 1 = 2$ (on utilise la règle 2 puis la 1)
$1\Delta 1 = 0\Delta(1\Delta 0) = 0\Delta 2 = 3$ (on utilise la règle 3, le résultat précédent puis la règle 1)
b. $1\Delta 2 = 0\Delta(1\Delta 1) = 0\Delta 3 = 4$
c. Posons, pour tout , $u_n = 1\Delta n$. En appliquant la règle 3 :
$u_{n+1} = 1\Delta(n+1) = 0\Delta(1\Delta n) = 0\Delta u_n = u_n + 1$.
La suite des u_n débute à 0 et augmente d'une unité à chaque pas. C'est une suite arithmétique. On a, pour tout n,
$u_n = n + 2$

2.*a.* $2\Delta 0 = 1\Delta 1 = 3$ (en appliquant la règle 2 et un résultat précédent)
$2\Delta 1 = 1\Delta(2\Delta 0) = 1\Delta 3 = 5$ (en appliquant la règle 3 et le résultat de la question **1.**)
$2\Delta 2 = 1\Delta(2\Delta 1) = 1\Delta 5 = 7$
b. Posons, pour tout n, $v_n = 2\Delta n$ et calculons : $v_{n+1} = 2\Delta(n+1) = 1\Delta(2\Delta n) = 1\Delta v_n = v_n + 2$
La suite des v_n débute à 3 et augmente de deux unités à chaque pas. C'est une suite arithmétique. On a, pour tout n,
$v_n = 2n + 3$.

3.*a.* $3\Delta 0 = 2\Delta 1 = 5$
$3\Delta 1 = 2\Delta(3\Delta 0) = 2\Delta 5 = 13$
$3\Delta 2 = 2\Delta(3\Delta 1) = 2\Delta 13 = 29$
c. Posons cette fois $w_n = 3\Delta n$. On a : $w_{n+1} = 3\Delta(n+1) = 2\Delta(3\Delta n) = 2\Delta w_n = 2w_n + 3$
De $w_{n+1} = 2w_n + 3$, on déduit, pour tout n, $w_{n+1} + 3 = 2(w_n + 3)$
La suite de terme général $w_n + 3$ est une suite géométrique de raison 2. Son premier terme est 8. L'expression de ce terme général est donc : $w_n + 3 = 2^n\,(w_0 + 3)$,
Ce qui donne, pour tout n : $w_n = 8 \times 2^n - 3 = 2^{n+3} - 3$

Illustration

4. L'artiste place dans son motif $3\Delta 0$, puis $3\Delta 1$ carrés. Si on suit le mouvement, on peut placer 16 carrés nouveaux (la différence entre deux termes consécutifs de la suite des w_n est 2^{n+3}) en équilibre au bout des branches du motif. Cela donne le dessin ci-contre :



5. *a.* L'aire de la première figure est 5, à laquelle il convient d'ajouter 8 fois l'aire d'un petit carré pour obtenir l'aire de la seconde. Le côté de ces carrés est le côté d'un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse 1, c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ces carrés sont donc d'aire $\frac{1}{2}$. Il y en a 8. L'aire de la seconde figure est donc 5 + 4 = 9.
b. Chaque carré extrême donne naissance à deux carrés d'aire moitié, mais comme le nombre de carrés double, c'est cette aire (4, avons-nous dit pour la seconde figure) qui vient s'ajouter à l'aire de la figure précédente.
Conclusion : l'aire de la figure correspondant à $3\Delta n$ s'obtient en ajoutant $4(n-1)$ à l'aire initiale 5, elle est donc $5 + 4(n-1)$.