## *Rédaction possible pour « Géométrie de l'à-peu-près »*

**Mesures d'angles à peu près**

**1.** ***a.*** Un triangle rectangle en A possède un angle de 90°, donc de mesure appartenant à [75°, 105°]. Il est donc *à peu près rectangle*. Un triangle isocèle de sommet principal A possède deux angles de même mesure, donc dont les mesures diffèrent de moins de 15°. Il est donc *à peu près isocèle*.

***b.*** Si un triangle ne peut avoir deux angles droits, il peut avoir deux angles de mesure appartenant à [75°, 105°] (exemple : 95, 75, 10)

Si tous ses angles sont de plus aigus, les mesures de deux de ses angles sont comprises entre 75° et 90° et donc diffèrent de moins de 15°. Dans ce cas, il est *à peu près isocèle.*

**2.** Le plus grand des angles d'un triangle acutangle non *à peu près rectangle* mesure strictement moins de 75°, l'angle « moyen » strictement moins de 60° (pour éviter qu'il soit *à peu près isocèle*) et le plus petit strictement moins de 45° (pour la même raison). Cela fait une somme strictement inférieure à 180°. La réponse est donc non.

**3.** Ci-contre, un programme qui fait ce travail.

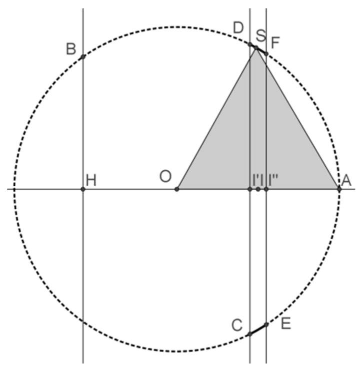
**Entrer** les mesures de A, B et C<br>
**Si** |A – B| <= 15<br>
  **Imprimer** « Triangle *à peu près isocèle* en C »<br>
**Sinon si** |A – C|<=15<br>
  **Imprimer** « Triangle *à peu près isocèle* en B »<br>
**Sinon si** |B – C|<=15<br>
  **Imprimer** « Triangle *à peu près isocèle* en A »<br>
**Sinon**<br>
  **Imprimer** « Triangle non *à peu près isocèle* »

**Mesures de longueurs à peu près**

**4.** ***a.*** Considérons un triangle rectangle d'hypoténuse 1. Les longueurs $a$ et $b$ des côtés de l'angle droit vérifient $a^2 + b^2 = 1$ , et le plus petit des deux, mettons $a$ , vérifie $2a^2 \leq 1$. Donc $a < 0{,}8$. Le triangle ne peut donc être *à peu près équilatéral.*

***b.*** Si les mesures des trois côtés d'un triangle sont inférieures à 0,1, il est *à peu près équilatéral…* et il peut être rectangle si l'égalité de Pythagore est vérifiée. C'est le cas par exemple avec des côtés de longueurs 0,05, 0,04 et 0,03.

**5.** ***a.*** Les points *à peu près égaux* à I et situés sur la droite (OA) sont les points du segment [I'I''], de milieu I et de longueur 0,2. Les points du cercle correspondant sont situés sur deux arcs déterminés sur le cercle par les droites perpendiculaires à (OA) passant par I' et I''. Ces arcs sont les arcs DF et CE du cercle. L'angle $\widehat{\mathrm{AOF}}$ est déterminé par son cosinus $\frac{1{,}1}{2}$ et l'angle $\widehat{\mathrm{AOD}}$ par son cosinus $\frac{0{,}9}{2}$.



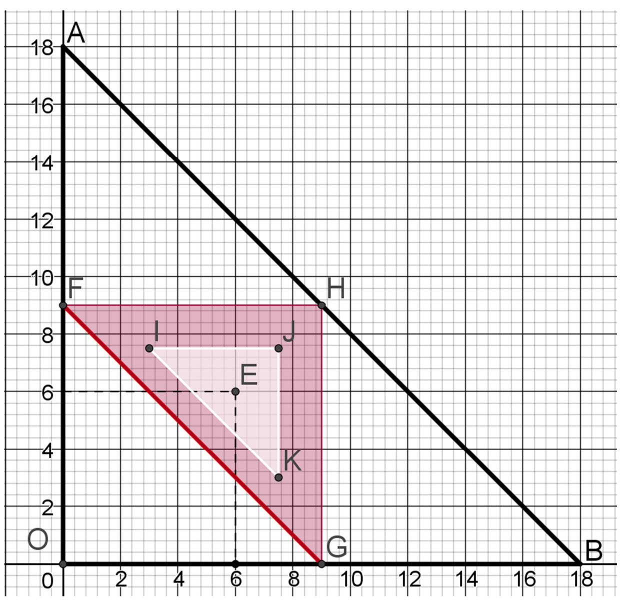

Les mesures de ces angles sont donc, en degrés décimaux, arrondis au dix-millième, 56,633 et 63,2563. Leur différence est 6,6233. Il y a deux arcs qui composent cet ensemble, sa longueur est donc $2 \times \frac{2\times 6{,}6233\times\pi}{180} \cong 0{,}46$, valeur arrondie au centième.

***b.*** Les côtés [AO] et [OD] du triangle AOD ont la même longueur, 2. La longueur FI'' est donnée par le théorème de Pythagore : $\mathrm{FI''}^2 = 4 - 1{,}1^2$. Dans le triangle rectangle AFI'', on a donc $\mathrm{AF}^2 = 0{,}9^2 + 4 - 1{,}1^2 = 3{,}6$ et donc $\mathrm{AF} < 1{,}9$.

Le triangle OFA n'est pas *à peu près équilatéral.*

(La figure ci-contre n'est pas exacte, mais l'échelle est respectée)

**Une statistique sur la population des triangles**




**6.** ***a.*** Le domaine $\mathcal{T}$ est l'intérieur du triangle ABO.

***b.*** Le point $E$ a pour coordonnées 6 et 6.

***c.*** Les triangles rectangles sont représentés par les côtés du triangle FHG privé de leurs extrémités.

**7.** ***a.*** Les triangles acutangles sont représentés par l'intérieur du triangle FGH.

***b.*** Le triangle FGH a pour aire le quart de l'aire de $\mathcal{T}$. La proportion des triangles acutangles dans l'ensemble des triangles serait un quart (selon ce critère, attention aux paradoxes, on travaille sur l'infini).

**8.** Pour représenter les triangles *à peu près rectangles*, on prélève dans l'ensemble des triangles acutangles ceux dont tous les angles ont une mesure inférieure à 75°, représentés par l'intérieur du triangle IJK. Les côtés de ce triangle (rectangle isocèle) ont pour longueur la moitié de ceux de FGH. Son aire est donc le quart de celle de FGH. Il reste trois quarts d'un quart, donc trois seizième pour les triangles acutangles *à peu près rectangles* dans l'ensemble des triangles.

## *Rédaction possible pour « Ensembles arithmétiques »*

**1.** ***a.*** $S_1$ est un EA, car chaque fois qu'on considère deux éléments, le troisième complète l'ensemble $S_1$ et 1 est la moyenne arithmétique de 0 et 2. Pour $S_2$, 0 et 3 n'ont pas de complément ad hoc, pour $S_3$ ce sont 1 et 4. Les triplets $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right),\left(\frac{1}{2},2,\frac{7}{2}\right),\left(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}\right)$ sont constitués de deux éléments de $S_4$ et de leur moyenne arithmétique. Chaque élément de $S_4$ y figure accompagné des quatre autres.

***b.*** Si un ensemble a deux éléments $a$ et $b$, il faudrait pour qu'il soit arithmétique que $\frac{a+a}{2}=b$ ou $\frac{a+b}{2}=a$ deux égalités qui conduisent à $a=b$, mais l'ensemble a deux éléments. Les singletons sont, quant à eux, des EA, puisque pour chaque couple d'éléments de $S$ est de la forme $(a,a)$ et que $c=a$ convient.

***c.*** L'ensemble $\left\{0,\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},2\right\}$ convient. En effet, les triplets $\left(0,\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right),(0,1,2),\left(\frac{2}{3},1,\frac{4}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},2\right)$ font tous apparaître deux nombre et leur moyenne, et chacun y figure accompagné des quatre autres.

**2.** ***a.*** Si $a$ est la moyenne de $b$ et $c$, alors $a=\frac{b+c}{2}$ et donc $c=2a-b$. Par symétrie, on doit aussi essayer $d=2b-a$.

***b.*** Conformément à la question précédente, on doit à chaque étape se demander si (S[i]+S[j])/2 ou 2*S[i]−S[j], ou 2*S[j]−S[i] appartiennent à S. Dès qu'on a prouvé qu'aucun des trois n'appartient à S, on peut conclure. Cela fait au maximum $3n^2$ opérations (la fonction Appartient (r,S) dissimule les comparaisons du résultat de chaque calcul à la liste des éléments de S). Ci-contre, les ajouts à réaliser (sur fond grisé).

```
fonction TesterEA(S=[S[1],..,S[n]] , n)
  Resultat ← Vrai
  Pour i de 1 à n
      Pour j de 1 à n
           Si not (Appartient ((S[i]+S[j])/2,S)
                  or
                  Appartient ((2*S[i]−S[j]),S)
                  or
                  Appartient ((2*S[j]−S[i]),S))
                Resultat← Faux
  Renvoyer(Resultat)
```

***c.*** Avec ce programme, on essaie le couple (j,i) et le couple (i,j). On essaie aussi les couples (i,i). De plus, on ne s'échappe des boucles qu'après avoir tout testé, quand le premier Faux fait tout échouer. D'où les aménagements ci-après.

**3.** On peut commencer par vérifier que les $\frac{2(a-m)}{M-m}$ sont en effectif $n$ et compris entre 0 et 2. En effet, si $a$ et $b$ ont la même image $\frac{2(a-m)}{M-m}$, ils sont égaux. Qu'ils soient compris entre 0 et 2 provient du fait que $0\leq a-m\leq M-m$. On peut ensuite vérifier que 0, 1 et 2 sont éléments de $S'$. Il suffit pour cela de donner à $a$ les valeurs $m,\frac{M+m}{2}$ et $M$. $\frac{M+m}{2}$ est en effet un élément de $S$, car $m$ et $M$ne peuvent être ni l'un ni l'autre la moyenne de deux éléments de $S$. Pour vérifier la propriété donnée dans la définition, on prend deux éléments de $S'$ (ce qui revient à prendre les deux éléments de $S$ dont ils sont les images), $\frac{2(a-m)}{M-m}$ et $\frac{2(b-m)}{M-m}$, leur moyenne arithmétique $\frac{2\left(\frac{a+b}{2}-m\right)}{M-m}$, le symétrique de $\frac{2(b-m)}{M-m}$ par rapport à $\frac{2(a-m)}{M-m}$ et le symétrique de $\frac{2(a-m)}{M-m}$ par rapport à $\frac{2(b-m)}{M-m}$, qui sont $\frac{2(2a-b-m)}{M-m}$ et $\frac{2(2b-a-m)}{M-m}$. Comme $S$ est un EA, un des trois nombres $\frac{a+b}{2}$, $2a-b$ et $2b-a$ appartient à $S$, donc une de leurs trois images à $S'$.

```
fonction TesterViteEA(S=[S[1],..,S[n]] , n)
  Resultat ← Vrai
  Pour i de 1 à n-1
      Pour j de i+1 à n
           Si not (Appartient ((S[i]+S[j])/2,S)
                  or
                  Appartient ((2*S[i]−S[j]),S)
                  or
                  Appartient ((2*S[j]−S[i]),S))
                Resultat← Faux
                Renvoyer (Resultat)
  Renvoyer(Resultat)
```

**4.** Si $x$ est élément de $S$ tel que $0<x<1$, alors $x-(2-x)=2x-2$ n'appartient pas à $S$. $2+(2-x)=4-x$ n'appartient pas à $S$. La seule possibilité pour compléter la paire $\{x,2\}$ est donc $\frac{x+2}{2}$.

Si $1<x<2$, alors $0-x$ n'appartient pas à $S$ et $2x$ non plus. La seule possibilité pour compléter la paire $\{0,x\}$ est $\frac{x}{2}$.

Remarquons que si $S$ contient 0 et 2, il contient aussi 1, seule possibilité pour compléter la paire $\{0,2\}$. L'ensemble $S$ a donc trois éléments au moins et on vient de voir que s'il en possède un quatrième, il en a au moins un cinquième.

Nous n'avons raisonné que sur des ensembles contenus dans [0, 2], mais la question **3.** nous a permis de ramener le problème à de tels ensembles. Il n'y a donc pas d'EA à 4 éléments.

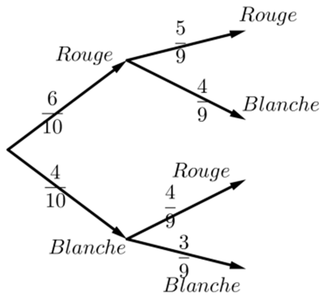
**5.** ***a.*** On suppose qu'il existe dans $S$ un élément $a_1$ tel que $0<a_1<\frac{2}{3}$. La question **4.** Nous a permis de montrer que $\frac{a_1+2}{2}$ appartient à $S$. Or, $1<\frac{a_1+2}{2}<2$. La question **4.** conduit à $\frac{a_1+2}{4}\in S$, mais ce dernier nombre est strictement inférieur à $\frac{2}{3}$ et strictement supérieur à $a_1$. Donc, si $S$ contient un élément inférieur à $\frac{2}{3}$, il en contient un plus grand et aussi inférieur à $\frac{2}{3}$. Il en contient ainsi 3, 4, etc. une infinité, mais l'hypothèse précise que $S$ est un ensemble à $n$ éléments. D'onc $S$ ne contient aucun nombre inférieur à $\frac{2}{3}$.

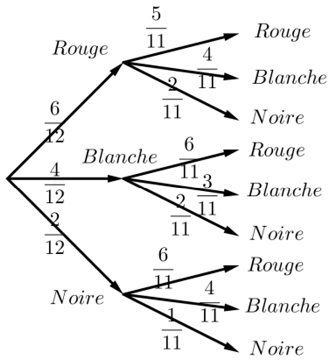
***b.*** Si $S$ contient un nombre $a$ strictement compris entre $\frac{2}{3}$ et 1, d'après la question **4.** le nombre $\frac{a+2}{2}$ appartient à $S$ et est supérieur à 1. La question **4.** Intervient encore : $\frac{a+2}{4}$ appartient à $S$ et ce nombre est supérieur à $\frac{2}{3}$ et inférieur à 1. La comparaison entre $a$ et $\frac{a+2}{4}$ donne : $a-\frac{a+2}{4}=\frac{3a-2}{4}$ et comme $a>\frac{2}{3}$ on conclut que $\frac{a+2}{4}<a$. Donc, si l'intervalle $\left]\frac{2}{3},1\right[$ contient un élément de $S$, il en contient un autre plus petit. On termine le raisonnement comme au ***a.***

***c.*** On déduit de ce qui précède que si $S$ contient un élément de ]0, 1[, cet élément ne peut être que $\frac{2}{3}$. L'ensemble $S$ contient alors $\frac{4}{3}$ (moyenne entre 2 et $\frac{2}{3}$). S'il contenait un autre élément que $\frac{4}{3}$ entre 1 et 2, alors d'après la question **3.**, il contiendrait sa moitié,

comprise entre 0 et 1, qui ne peut être que $\frac{2}{3}$. On a dit que la réduction à [0,2] ne diminuait pas la généralité du problème, donc 5 est un maximum pour le nombre d'éléments de $S$.
**6.** En dehors de 0 et 1, pour lesquels la propriété n'a guère d'intérêt, seuls 3 et 5 sont des effectifs convenables pour un EA.

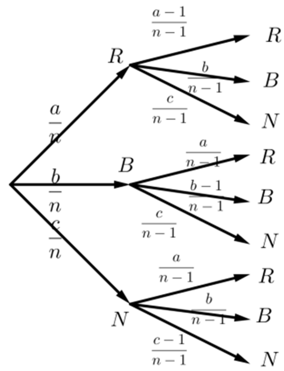
## *Rédaction possible pour « Boules de même couleur »*




**1.** ***a.*** et ***b.*** Les deux graphes ci-contre permettent de faire les comptes :
Lorsque l'urne contient 4 boules blanches et 6 rouges,
$P(G) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{7}{15}$
Lorsque l'urne contient 4 boules blanches, 6 rouges et 2 noires, l'événement $G$ (ce n'est pas le même que ci-dessus…) a pour probabilité :
$$P(G) = \frac{6}{12} \times \frac{5}{11} + \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} + \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{3}$$

**2.** ***a.*** On peut reprendre le premier graphe en remplaçant 4 par $x$ et 10 par $(6 + x)$. On obtient la probabilité de $G$ (c'est encore un autre $G$) :
$P(G) = \frac{6}{(6+x)} \times \frac{5}{(5+x)} + \frac{x}{(6+x)} \times \frac{x-1}{(5+x)}$
***b.*** L'équation $P(G) = \frac{1}{2}$ s'écrit $2x(x-1) + 60 = (x+6)(x+5)$, ou encore $x^2 - 13x + 30 = 0$, c'est-à-dire $(x-3)(x-10) = 0$ Le jeu est donc équitable si l'urne contient au départ 3 boules blanches ou 10 boules blanches.
***Remarque en passant :*** *on pourrait s'étonner que dans la réponse à cette question ne figure pas le cas d'égalité entre l'effectif des boules blanches et des boules rouges. Le cas d'égalité, effectif* $n$ *boules de chaque couleur (*$n \geq 2$*, quand même), conduit à* $P(G) = \frac{n-1}{2n-1}$*, quantité légèrement inférieure à* $\frac{1}{2}$*.*
**3.** ***a.*** L'urne contient $a$ boules rouges et $b$ boules blanches. La probabilité de l'événement $G$ (encore un autre $G$) s'écrit :
$P(G) = \frac{a}{a+b} \times \frac{a-1}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \times \frac{b-1}{a+b-1} = \frac{a^2+b^2-a-b}{(a+b)(a+b-1)}$.
$P(G) = \frac{1}{2}$ lorsque $2a^2 + 2b^2 - 2a - 2b = a^2 + b^2 + 2ab - a - b$, ce qui s'écrit encore $a^2 + b^2 - 2ab = a + b$ , c'est-à-dire finalement $(a-b)^2 = n$.
***b.*** On cherche donc des entiers $a, b$ et $p$ vérifiant : $\begin{cases} a + b = p^2 \\ a - b = p \end{cases}$. On obtiendrait donc, sous réserve d'existence, $a = \frac{p^2+p}{2}$ et $b = \frac{p^2-p}{2}$. L'équation $p^2 + p - 2a = 0$ doit posséder des solutions entières supérieures à 2. Comme ses solutions positives éventuelles s'écrivent $= \frac{\sqrt{8a+1}}{2} - \frac{1}{2}$, une condition nécessaire est que $8a + 1$ soit le carré d'un entier impair. En posant $8a + 1 = (2m+1)^2$, on obtient $p = m$ et $a = \frac{p(p+1)}{2}$ . On doit donc chercher $a$ parmi les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, etc. Et comme $= a - p$ , si on pose $8a + 1 = (2p+1)^2$, il vient $b = \frac{p(p+1)}{2} - p = \frac{(p-1)p}{2}$. $a$ et $b$ sont donc deux nombres triangulaires successifs. Les couples $(a, b)$ sont, le premier, (3, 1) (possible si on admet qu'il peut n'y avoir qu'une seule boule d'une des deux couleurs…), puis (6, 3), (10, 6), (15, 10), (21, 15), (28, 21), etc.




**4.** ***a.*** Le graphe est analogue à celui de la question **1.** Dans le cas de trois couleurs. La probabilité $P(G)$ se calcule de la même façon. $P(G) = \frac{a}{n} \times \frac{a-1}{n-1} + \frac{b}{n} \times \frac{b-1}{n-1} + \frac{c}{n} \times \frac{c-1}{n-1}$
(on a posé $a + b + c = n$). $P(G) = \frac{a^2+b^2+c^2-n}{n(n-1)}$
On suppose ici que $n = 13$. Une condition nécessaire pour que le jeu soit équitable s'écrit $2(a^2 + b^2 + c^2) = 13^2 + 13$, soit $a^2 + b^2 + c^2 = 91$
***Remarque :*** *cette condition est nécessaire, mais on n'a pas vérifié l'existence* ***d'entiers*** $a, b, c$ *dont la somme soit 13 et la somme des carrés 91.*
De $\begin{cases} a + b + c = 13 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 91 \end{cases}$ on déduit $a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) = 78$. Les nombres entiers positifs figurant dans cette somme sont à choisir parmi 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72 (0 correspond au cas où une couleur est représentée par une seule boule, cas évoqué plus haut). La seule possibilité est {0, 6, 72}, qui correspond à $(a, b, c) = (1, 3, 9)$ aux permutations près.
***b.*** Si le triplet $(x, y, z)$ conduit à une situation d'équité, alors $\frac{x^2+y^2+z^2-x-y-z}{(x+y+z)(x+y+z-1)} = \frac{1}{2}$ . Cette condition s'écrit :
$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 2y - 2z = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx - x - y - z$ ou encore :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - x - y - z = 0$. Comme $x^2 + y^2 - 2xy = x + y$ (le tirage à deux couleurs d'effectifs $x$ et $y$ est «équitable), on obtient $z^2 - 2zx - 2yz - z = 0$. On écarte le cas $z = 0$ (il y a vraiment trois couleurs) et on obtient $z = 2x + 2y + 1$.
***c.*** On complète les couples fournissant un jeu équitable à deux couleurs par le troisième effectif, les premiers triplets obtenus sont : (3, 1, 11), (6, 3, 19), (10, 6, 33), etc. Attention, cette fois les permutations ne conduisent pas à d'autres solutions, car, par exemple, le couple (33,6) ne fait pas partie de ceux qui donnent une partie équitable à deux couleurs.

**5.** La formule donnant $P(G)$ pour trois couleurs peut être étendue à $m$ couleurs avec les effectifs 1, 3, 9, … $3^{m-1}$. Pour cela, il faut d'abord calculer l'effectif total : $1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{m-1} = \frac{3^m-1}{2}$. Au numérateur du quotient donnant $P(G)$ on trouve :
$N = 3 \times 2 + 9 \times 8 + \cdots + 3^{m-2} \times (3^{m-2} - 1) + 3^{m-1} \times (3^{m-1} - 1)$, qui peut aussi s'écrire :
$N = 3^2 + 3^4 + \cdots + 3^{2m-2} - 3^0 - 3^1 - 3^2 - \cdots - 3^{m-1}$ (on retrouve la somme des carrés moins la somme).
$$N = \frac{1 - 3^{2m}}{1 - 3^2} - \frac{3^m - 1}{2} = \frac{(3^m - 1) \times 3 \times (3^{m-1})}{8}$$
Le produit $\frac{3^m-1}{2} \times \left(\frac{3^m-1}{2} - 1\right)$ s'écrit aussi $\frac{3^m-1}{2} \times 3 \times \frac{3^{m-1}-1}{2}$ et on voit que leur quotient $P(G) = \frac{1}{2}$
Tous les jeux respectant cette distribution sont équitables.