Nombres

Exercice 1

Déterminer tous les entiers N strictement positifs dont l'écriture décimale est $N = \overline{8abc}$ où a, b et c sont tels que :

- L'entier dont l'écriture décimale est $\overline{8a}$ est un multiple de 3 ;
- L'entier dont l'écriture décimale est $\overline{8ab}$ est un multiple de 4 ;
- L'entier N est un multiple de 5.

$\overline{8a}$ est un multiple de 3 signifie que 3 divise la somme des chiffres de $\overline{8a}$ c'est-à-dire $8 + a$. Les seules valeurs possibles de a sont don

c 1, 4 et 7 (puisque $0 \leq a \leq 9$) et le nombre $\overline{8a}$ vaut 81, 84 ou 87.

De même $\overline{8ab}$ est un multiple de 4 signifie que $10a + b$ est un multiple de 4.

- Si $\overline{8a} = 81$, alors $10a + b$ est un multiple de 4 si et seulement si $10 + b$ est un multiple de 4 soit $\overline{8ab} = 812$ ou $\overline{8ab} = 816$.
- Si $\overline{8a} = 84$, alors $10a + b$ est un multiple de 4 si et seulement si $40 + b$ est un multiple de 4 soit $\overline{8ab} = 840$ ou $\overline{8ab} = 844$ ou $\overline{8ab} = 848$.
- Si $\overline{8a} = 87$, alors $10a + b$ est un multiple de 4 si et seulement si $70 + b$ est un multiple de 4 soit $\overline{8ab} = 872$ ou $\overline{8ab} = 876$.

Enfin N est un multiple de 5 signifie que c vaut 0 ou 5.

Il y a donc 14 valeurs solutions pour l'entier N :

$8\,120, 8\,125, 8\,160, 8\,165, 8\,400, 8405, 8\,440, 8\,445, 8\,480, 8\,485, 8\,720, 8\,725, 8760, 8765$

Exercice 2

Déterminer le nombre de triplets de trois entiers strictement positifs (a, b, c) tels que :

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+1}{\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+1} = 11 \text{ et } a + 2b + c \leq 40.$$

$\frac{\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+1}{\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+1} = \frac{abc\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+1\right)}{abc\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+1\right)} = \frac{a^2c+a^2b+abc}{b^2c+b^2a+abc} = \frac{a(ac+ab+bc)}{b(bc+ba+ac)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+1}{\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+1} = 11$ équivaut donc à $\frac{a}{b} = 11$ soit $a = 11b$.

$a + 2b + c \leq 40$ s'écrit alors $13b + c \leq 40$. Puisque b et c sont des entiers strictement positifs, b ne peut prendre que les valeurs 1, 2 ou 3.

Si $b = 3$, l'inégalité $13b + c \leq 40$ s'écrit $c \leq 1$. Il n'y a dans ce cas qu'un triplet solution, le triplet (11,1,1).

Si $b = 2$, l'inégalité $13b + c \leq 40$ s'écrit $c \leq 14$. Il y a dans ce cas 14 valeurs possibles pour c et 14 triplets solutions.

Si $b = 1$, l'inégalité $13b + c \leq 40$ s'écrit $c \leq 27$. Il y a dans ce cas 27 valeurs possibles pour c et 27 triplets solutions.

Au total, il y a 42 triplets solutions.

Exercice 3

Soit a, b, c et N quatre entiers positifs vérifiant :

$N = 5a + 3b + 5c$, $N = 4a + 5b + 4c$ et N est un nombre compris entre 131 et 150

Déterminer la somme $a + b + c$.

On a $N = 5a + 3b + 5c$ (1) et $N = 4a + 5b + 4c$ (2)

On multiple chaque membre de l'équation (1) par 4 et on obtient l'équation $4N = 20a + 12b + 20c$

On multiple chaque membre de l'équation (2) par 5 et on obtient l'équation $5N = 20a + 25b + 20c$.

En retanchant l'une des équations à l'autre, on en déduit $N = 13b$.

On cherche donc les entiers positifs N multiple de 13 et compris entre 131 et 150. Il n'y en a qu'un $N = 13 \times 11 = 143$ d'où $b = 11$.

L'équation (1) s'écrit alors $143 = 5a + 33 + 5c$ soit $a + c = \frac{110}{5} = 22$.

On en déduit que $a + b + c = 33$.

Exercice 4

Soit p, q, r et s quatre entiers naturels. On pose $a = 3^p, b = 3^q, c = 3^r, d = 3^s$.

Déterminer la plus petite valeur de $p+q+r+s$ telle que $a^2+b^3+c^5=d^7$.

L'égalité $a^2+b^3+c^5=d^7$ s'écrit aussi $3^{2p}+3^{3q}+3^{5r}=3^{7s}$.
En mettant, dans le membre de gauche la plus petite puissance de 3, par exemple 3^{2p}, cette égalité devient :
$3^{2p}(1+3^{3q-2p}+3^{5r-2p})=3^{7s-2p}$.
Ceci ne sera vérifié que si le facteur $1+3^{3q-2p}+3^{5r-2p}$ est une puissance de 3, ce qui n'est possible que si $3^{3q-2p}=1$ et $3^{5r-2p}=1$ c'est-à-dire $3q-2p=0$ et $5r-2p=0$ soit $2p=3q=5r$, nombre nécessairement multiple de 2, 3 et 5 donc de 30. Il existe donc un entier k tel que $2p=3q=5r=30k$.
Alors $3^{30k}+3^{30k}+3^{30k}=3^{7s}$ soit $7s=30k+1$.
On cherche donc les plus petits entiers k et s tels que $7s=30k+1$.
La plus petite valeur de k telle que $30k+1$ soit un multiple de 7 est $k=3$ et alors $s=13$.
On en tire $2p=90$ soit $p=45$, $3q=90$ soit $q=30$ et $5r=90$ soit $r=18$.
La plus petite valeur de $p+q+r+s$ est donc $45+30+18+13=106$.
(on peut vérifier qu'en prenant une autre plus petite puissance de 3, on a toujours $2p=3q=5r$)

Exercice 5

Déterminer les entiers naturels n tels que $N=\frac{2n^2-10n-4}{n^2-4n+3}$ existe et soit un entier.
On remarque déjà que :
$n^2-4n+3=n^2-4n+4-1=(n-2)^2-1=(n-2-1)(n-2+1)=(n-3)(n-1)$
N existe donc si et seulement si $n\neq 1$ et $n\neq 3$. Dans la suite, on suppose ces deux conditions vérifiées.
D'autre part $2n^2-10n-4=2(n^2-4n+3)-2n-10$
On peut donc écrire $N=2-\frac{2n+10}{n^2-4n+3}$ et N sera un entier si et seulement si $\frac{2n+10}{n^2-4n+3}$ est un entier. Pour cela, il faut déjà que $|n^2-4n+3|\leq|2n+10|$ (1).

- Si $n<-5$, alors $(n-3)(n-1)>0$ (produit de deux nombres négatifs) et $2n+10<0$ donc (1) s'écrit $n^2-4n+3\leq -2n-10$ soit $n^2-2n+13\leq 0$ soit $(n-1)^2+12\leq 0$ ce qui est impossible.
- Si $n=-5$, alors $(n-3)(n-1)>0$ (toujours produit de deux nombres négatifs) et $2n+10=0$ donc N est un entier.
- Si $n>-5$, la seule valeur entière qui rende négatif le produit $(n-3)(n-1)$ est la valeur 2, valeur pour laquelle on a $\frac{2n+10}{n^2-4n+3}=-14$ qui est un entier.

Pour les autres valeurs de n telles que $n>-5$, (1) s'écrit $n^2-4n+3\leq 2n+10$ soit $n^2-6n-7\leq 0$ soit $(n-3)^2-16\leq 0$ soit $(n-3-4)(n-3+4)\leq 0$ c'est-à-dire $(n-7)(n+1)\leq 0$
ce qui équivaut à $-1\leq n\leq 7$.
On regarde donc pour chaque valeur de n telles que $-1\leq n\leq 7, n\neq 1, n\neq 2, n\neq 3$ si $\frac{2n+10}{n^2-4n+3}$ est un entier :

n	-1	0	4	5	6	7
$\frac{2n+10}{n^2-4n+3}$	1	$\frac{10}{3}$	6	$\frac{5}{2}$	$\frac{22}{15}$	1

Au final les seules valeurs de n pour lesquelles N est un entier sont $-5, 0, 2, 4, 7$.

Exercice 6

Pour tout réel x distinct de 0 et de 1, on définit successivement les nombres :
$a_1=\frac{1}{1-x}, a_2=\frac{1}{1-a_1}$ et, pour tout entier $n\geq 2$, $a_n=\frac{1}{1-a_{n-1}}$.
Calculer a_2, a_3, a_4 puis $a_{2\,022}$ en fonction de x.

$a_2=\frac{1}{1-a_1}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}}=\frac{1-x}{-x}=\frac{x-1}{x}$
$a_3=\frac{1}{1-a_2}=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=\frac{1}{\frac{x-(x-1)}{x}}=\frac{x}{1}=x$
$a_4=\frac{1}{1-a_3}=\frac{1}{1-x}=a_1$
On en déduit que $a_5=a_2, a_6=a_3, \ldots$.
On peut plus généralement en déduire que si k est un entier $a_{3k}=x, a_{3k+1}=\frac{1}{1-x}, a_{3k+2}=\frac{x-1}{x}$.
En particulier, comme $2\,022=3\times 674$, $a_{2\,022}=x$.

Fonctions et équations

Exercice 1
Déterminer les polynômes P tels que, pour tout réel x, $P(x)-P(x-2)=(2x-1)^2$ (1)

On remarque déjà que les polynômes $x\mapsto P(x)$ et $x\mapsto P(x-2)$ ont le même degré n et qu'ils ont le même terme de plus haut degré. Le degré du polynôme $x\mapsto P(x)-P(x-2)$ est donc égal à $n-1$. D'après (1), le degré du polynôme P est donc égal à 3.
Posons donc $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Alors
$P(x-2)=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d=a(x^3-6x^2+12x-8)+b(x^2-4x+4)+c(x-2)+d$
Soit $P(x-2)=\ ax^3+(-6a+b)x^2+(12a-4b+c)x+(-8a+4b-2c+d)$
Donc $P(x)-\ P(x-2)=0x^3+6ax^2+(-12a+4b)x+(8a-4b+2c)$.
D'autre part $(2x-1)^2=4x^2-4x+1$
L'égalité (1) est donc vérifiée pour tout réel x si et seulement si les deux polynômes ont les mêmes coefficients, c'est-à-dire

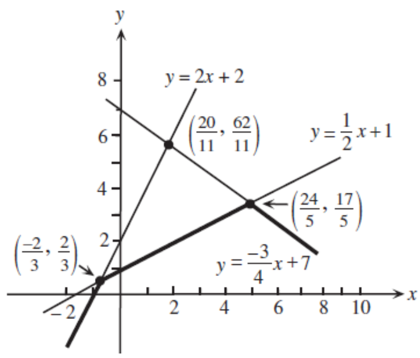
$\begin{cases} 6a=4 \\ -12a+4b=-4 \\ 8a-4b+2c=1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ 4b=4 \\ 2c=1-8a+4b \end{cases}$ soit $\begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=1 \\ c=-\frac{1}{6} \end{cases}$

Les polynômes solutions de l'exercice ont donc définis par $P(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2-\frac{1}{6}x+d$ où d est un réel quelconque.

Exercice 2
Résoudre dans **R** le système d'équations $\begin{cases} x^2+x^2y^2+x^2y^4=525 \\ x+xy+xy^2=35 \end{cases}$.

$x^2+x^2y^2+x^2y^4=(x+xy^2)^2-x^2y^2=(x+xy^2+xy)(x+xy^2-xy)$
Le système donné s'écrit donc $\begin{cases} 35(x+xy^2-xy)=525 \\ x+xy+xy^2=35 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x+xy^2-xy=15 \\ x+xy+xy^2=35 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2xy=20 \\ x-xy+xy^2=15 \end{cases}$
(en soustrayant la première équation à la deuxième).
On se ramène donc au système $\begin{cases} x=\frac{10}{y} \\ \frac{10}{y}-10+10y=15 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=\frac{10}{y} \\ 10y^2-25y+10=0 \end{cases}$.
La deuxième équation s'écrit aussi $y^2-\frac{5}{2}y+1=0$.
Or $y^2-\frac{5}{2}y+1=\left(y-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{16}=\left(y-\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right)\left(y-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)=(y-2)\left(y-\frac{1}{2}\right)$.
Le système donné a donc deux solutions : $(5,2)$ et $\left(\frac{1}{2},20\right)$.

Exercice 3
Quelle est le maximum de la fonction f définie sur **R** par, pour tout réel x, $f(x)$ est le minimum des trois nombres $2x+2,\frac{1}{2}x+1,-\frac{3}{4}x+7$.
On considère les droites d_1,d_2,d_3 d'équations respectives $y=2x+2$, $y=\frac{1}{2}x+1, y=-\frac{3}{4}x+7$.
Les coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d_2 sont la solution du système $\begin{cases} y=2x+2 \\ y=\frac{1}{2}x+1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$.
On obtient de même les deux autres points d'intersection, de coordonnées $\left(\frac{20}{11},\frac{62}{11}\right)$ et $\left(\frac{24}{5},\frac{17}{5}\right)$.



Pour chaque valeur de x, $f(x)$ est donc la plus petite ordonnée des trois points des droites d_1, d_2, d_3 d'abscisse x.
La courbe représentative de f correspond donc aux parties en gras de ces trois droites
Le maximum de la fonction f est donc la plus grande ordonnée des points de cette représentation graphique, c'est-à-dire $\frac{17}{5}$.

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le point Q de coordonnées $(3, -2)$ et la droite D d'équation $y = 5x + 3$. A tout point P de la droite D, on associe le milieu M du segment [PQ].

Quel est l'ensemble décrit par le point M lorsque le point P décrit la droite D ?

Le point P décrit la droite D. Il a donc pour coordonnées $(a, 5a + 3)$ où a décrit l'ensemble des réels.

Le milieu M du segment [PQ] a alors pour coordonnées $\left(\frac{3+a}{2}, \frac{5a+3-2}{2}\right)$. On a donc $x_M = \frac{3+a}{2}$ soit $a = 2x_M - 3$ et donc $y_M = \frac{5(2x_M-3)+1}{2} = 5x_M - 7$.

On en déduit que le point M appartient à la droite D' d'équation $y = 5x - 7$.

Réciproquement, soit N(x_N, y_N) un point de D'. On a donc $y_N = 5x_N - 7$. Montrons que le point P(x_P, y_P) tel que N soit le milieu de [PQ] c'est-à-dire tel que $\begin{cases} x_N = \frac{x_P+3}{2} \\ y_N = \frac{y_P-2}{2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_P = 2x_N - 3 \\ y_P = 2y_N + 2 \end{cases}$ est un point de D.

On a $5x_P + 3 = 5(2x_N - 3) + 3 = 10x_N - 12 = 10x_N - 14 + 2 = 2(5x_N - 7) + 2 = 2y_N + 2 = y_P$ donc P est bien un point de la droite D.

On peut maintenant affirmer que lorsque P décrit D, le point M décrit la droite D' d'équation $y = 5x - 7$.

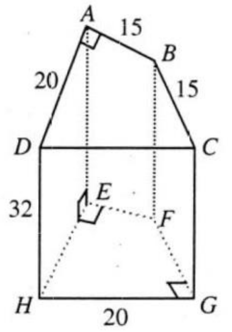
Exercice 5

Déterminer les trois réels a, b et c tels que : $\begin{cases} a + b = 3 \\ ac + b = 18 \\ bc + a = 6 \end{cases}$.

On peut commencer par additionner la deuxième et la troisième équation, ce qui donne $ac + b + bc + a = 24$
Soit $24 = a + b + c(a + b) = (a + b)(1 + c)$.
En tenant compte de la première équation, on en tire $1 + c = 8$ soit $c = 7$.
On se ramène alors à résoudre les système $\begin{cases} 7a + b = 18 \\ a + 7b = 6 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} 7a + b = 18 \\ -7a - 49b = -42 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 7a + b = 18 \\ -48b = -24 \end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{5}{2} \end{cases}$ et on vérifie que le triplet $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 7\right)$ est bien solution du triplet initial.

Aires et distances

Exercice 1



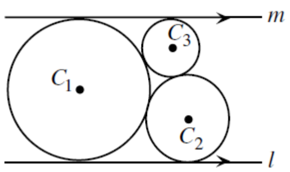
On considère un prisme droit $ABCDEFGH$ comme sur la figure ci-contre.
On suppose de plus que les angles $\widehat{DAC}$, $\widehat{HEF}$ et $\widehat{FGH}$ sont des angles droits et que $AE = 32$.
1. Démontrer que les diagonales du quadrilatère $EFGH$ sont perpendiculaires.
2. Calculer la distance AG.

Le prisme $ABCDEFGH$ est droit donc :
les faces $ABCD$ et $EFGH$ sont superposables
et les droites (AE), (BF), (CG) et (DH) sont perpendiculaires

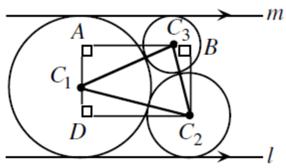
- aux plans contenant ces faces (donc à toute droite de ces plans).

1. Les faces $ABCD$ et $EFGH$ sont superposables donc $EF = FG = 15$ et le triangle EFG est isocèle en F. Si I est le milieu de [FG] alors (FI) est la hauteur issue de F dans le triangle EFG.
De même, $HE = AB = 20 = HG$ donc le triangle EHG est isocèle en H. On en déduit que la droite (HI) est aussi la hauteur issue de H dans EHG.
Les droites (HI) et (FI) sont donc confondues et la droite (HF) est perpendiculaires à la droite (EG).
2. D'après le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle FGH rectangle en G, $FH^2 = FG^2 + GH^2$ soit $FH^2 = 225 + 400 = 625$ d'où $FH = 25$.
De plus, les triangles FIG et FGH sont rectangles et ont en commun les angles $\widehat{IFG}$ et $\widehat{HFG}$. Ils sont donc semblables.
On peut donc écrire $\frac{IG}{FG} = \frac{GH}{FH}$ soit $IG = \frac{GH \times FG}{FH} = \frac{20\times 15}{25} = 12$. On en déduit que $EG = 24$.
La droite (AE) est perpendiculaire au plan (EFG) donc à la droite (EG). Dans le triangle AEG rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore, $AG^2 = AE^2 + EG^2 = 32^2 + 24^2 = 1\,600$ d'où $AG = 40$.

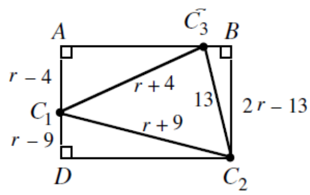
Exercice 2



On considère (voir figure ci-contre) deux cercles Γ_1 et Γ_2, de centres respectifs C_1 et C_2, et tangents extérieurement et admettant la droite l comme tangente commune.
La droite m est parallèle à la droite l et tangente commune aux cercles Γ_1 et Γ_3 de centres C_1 et C_3. Les trois cercles sont tangents deux à deux.
On suppose que le rayon de Γ_2 vaut 9 et celui de Γ_3 vaut 4.
Déterminer le rayon du cercle de centre Γ_1.



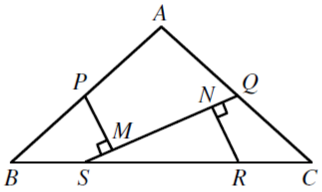
Comme les cercles sont deux à deux tangents, chaque segment joignant deux centres a pour longueur la somme des rayons.
Soit r le rayon du cercle Γ_1. Alors $C_1C_2 = r + 9$, $C_1C_3 = r + 4$ et $C_2C_3 = 13$.
De plus, si d'une part on trace les droites parallèles aux droites m et l passant l'une par C_2 l'autre par C_3 d'autre part les droites perpendiculaires à l et passant l'une par C_1 l'autre par C_2, on obtient un rectangle ABC_2D.



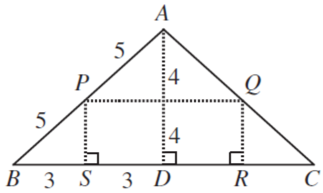
On peut alors exprimer en fonction de r certaines longueurs :
C_1D est égal au rayon du cercle Γ_1 moins le rayon du cercle Γ_2 soit $C_1D = r - 9$
De même $C_1A = r - 4$ et $BC_2 = AD = (r - 9) + (r - 4) = 2r - 13$
Dans le triangle AC_1C_3 rectangle en A, on a donc
$AC_3{}^2 = C_1C_3{}^2 - AC_1{}^2 = (r+4)^2 - (r-4)^2 = 16r$
D'où $AC_3 = 4\sqrt{r}$.
De même, en se plaçant dans le triangle C_1DC_2 rectangle en D, on obtient $DC_2 = 6\sqrt{r}$.
D'où $BC_3 = AB - AC_3 = DC_2 - AC_3 = 2\sqrt{r}$.
Dans le triangle BC_2C_3 rectangle en B, on en tire la relation $\left(2\sqrt{r}\right)^2 + (2r - 13)^2 = 13^2$
soit $4r + 4r^2 - 52r + 169 = 169$ soit $4r(r - 12) = 0$. Comme $r \neq 0$ on obtient $r = 12$.

Exercice 3

On considère (voir figure ci-contre) un triangle ABC isocèle en A.
Sur le segment $[BC]$, on place les points S et R tels que les distances BS, SR et RC soient proportionnelles aux nombres 1, 2 et 1.
P et Q sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.
M et N sont les projetés orthogonaux respectifs de P et R sur (SQ).
On suppose que $AB = AC = 10$ et $BC = 12$.
Calculer la longueur MN.



Le triangle ABC est isocèle en A donc le milieu D de $[BC]$ est aussi le projeté orthogonal de A sur (BC). D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABD rectangle en D, $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 100 - 36 = 64$ donc $AD = 6$.

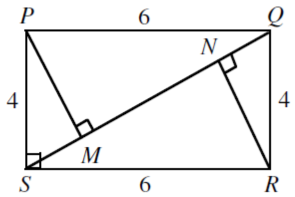


D'autre part, les triangles BSP et BDA ont l'angle en B en commun et sont tels que $\frac{BP}{BA} = \frac{1}{2} = \frac{BS}{BD}$ car BS, SR et RC sont proportionnelles aux nombres 1, 2 et 1 et D est le milieu de $[BC]$.

Les triangles sont donc semblables. Le triangle BPS est donc rectangle en S et $PS = \frac{1}{2}AD = 4$. De même, par symétrie, le triangle QRC est rectangle en R et $QR = 4$.

Le quadrilatère $PQRS$ est tel que : (PQ) est parallèle à (BC) donc à (SR) (droite des milieux dans ABC), (PS) est parallèle à (QR) (car perpendiculaires toutes les deux à (BC)). C'est donc un parallélogramme possédant un angle droit donc un rectangle.

Dans le triangle QRS rectangle en R, $SQ^2 = SR^2 + RQ^2 = 36 + 16 = 52$ donc $SQ = 2\sqrt{13}$.



Ce triangle a pour aire la moitié de celle du rectangle $PQRS$ qui vaut 24. On peut donc écrire $12 = \frac{1}{2}SQ \times NR = NR\sqrt{13}$ d'où $NR = \frac{12}{\sqrt{13}}$.

Dans le triangle RQN rectangle en N, on a donc
$NQ^2 = QR^2 - NR^2 = 16 - \frac{144}{13} = \frac{64}{13}$ d'où $NQ = \frac{8}{\sqrt{13}}$. Par symétrie on a alors $SM = \frac{8}{\sqrt{13}}$.

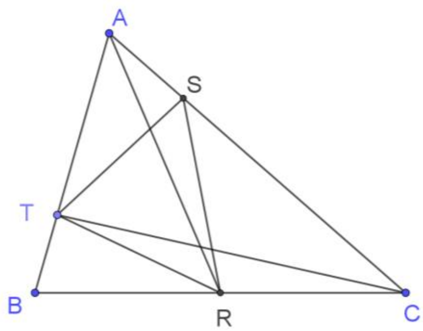
On en déduit que $MN = SQ - MS - NQ = 2\sqrt{13} - 2 \times \frac{8}{\sqrt{13}} = \frac{10}{\sqrt{13}}$.

Exercice 4

On considère un triangle ABC et trois points R, S et T situés respectivement sur [BC], [CA] et [AB] tels que BR = RC, CS = 3 SA et $\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{TB}} = \frac{p}{q}$ où p et q sont deux réels strictement positifs.

Déterminer le quotient $\frac{p}{q}$ si on suppose que l'aire du triangle RST est le double de l'aire du triangle TBR.

Notons $a = \mathrm{BR} = \mathrm{RC}$ et $b = \mathrm{AS}$. Alors $\mathrm{SC} = 3\mathrm{AS} = 3b$. De plus, comme $\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{TB}} = \frac{p}{q}$, il existe un réel strictment positif c tel que $\mathrm{AT} = pc$ et $\mathrm{TB} = qc$. Notons $\mathcal{A}$ l'aire du tiangle ABC.



Les triangles ABC et CRA ont la même hauteur issue de A et R est le milieu de [BC] donc $\mathcal{A}_{\mathrm{CRA}} = \frac{1}{2}\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathrm{ABR}}$

Les triangles CRS et CRA ont la même hauteur issue de R. Comme l'égalité $\mathrm{SC} = 3\mathrm{AS}$ peut aussi s'écrire $\mathrm{CS} = \frac{3}{4}\mathrm{CA}$, on en déduit que $\mathcal{A}_{\mathrm{CRS}} = \frac{3}{4}\mathcal{A}_{\mathrm{CRA}} = \frac{3}{8}\mathcal{A}$.

De même, de $\mathrm{AT} = pc$ et $\mathrm{TB} = qc$, on tire $AB = (p+q)c$ et $\mathrm{TB} = \frac{qc}{(p+q)c}AB = \frac{q}{p+q}AB$ d'où $\mathcal{A}_{\mathrm{TBR}} = \frac{q}{p+q}\mathcal{A}_{\mathrm{ABR}} = \frac{q}{2(p+q)}\mathcal{A}$.

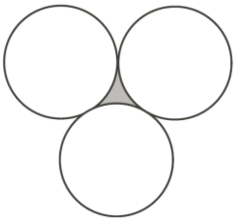
On démontrerait de même que $\mathcal{A}_{\mathrm{ATC}} = \frac{p}{p+q}\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_{\mathrm{ATS}} = \frac{p}{4(p+q)}\mathcal{A}$

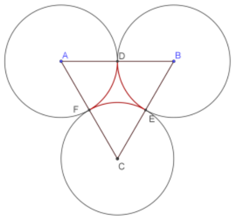
L'aire du triangle RST est le double de celle du triangle TBR, ce qui s'écrit :
$\mathcal{A} - \frac{3}{8}\mathcal{A} - \frac{q}{2(p+q)}\mathcal{A} - \frac{p}{4(p+q)}\mathcal{A} = \frac{2q}{2(p+q)}\mathcal{A}$ soit $\frac{5}{8} - \frac{2q+p}{4(p+q)} = \frac{2q}{2(p+q)}$ soit $5(p+q) - 2(2q+p) = 8q$

Soit $3p - 7q = 0$ c'est-à-dire $\frac{p}{q} = \frac{7}{3}$.

Exercice 5

On considère (voir sur la figure ci-contre) trois cercles identiques deux à deux tangents extérieurement. Ces trois cercles délimitent une surface grisée.
On suppose que le périmètre commun de ces cercles est égal à 36.
Calculer le périmètre du pourtour de la surface grisée.

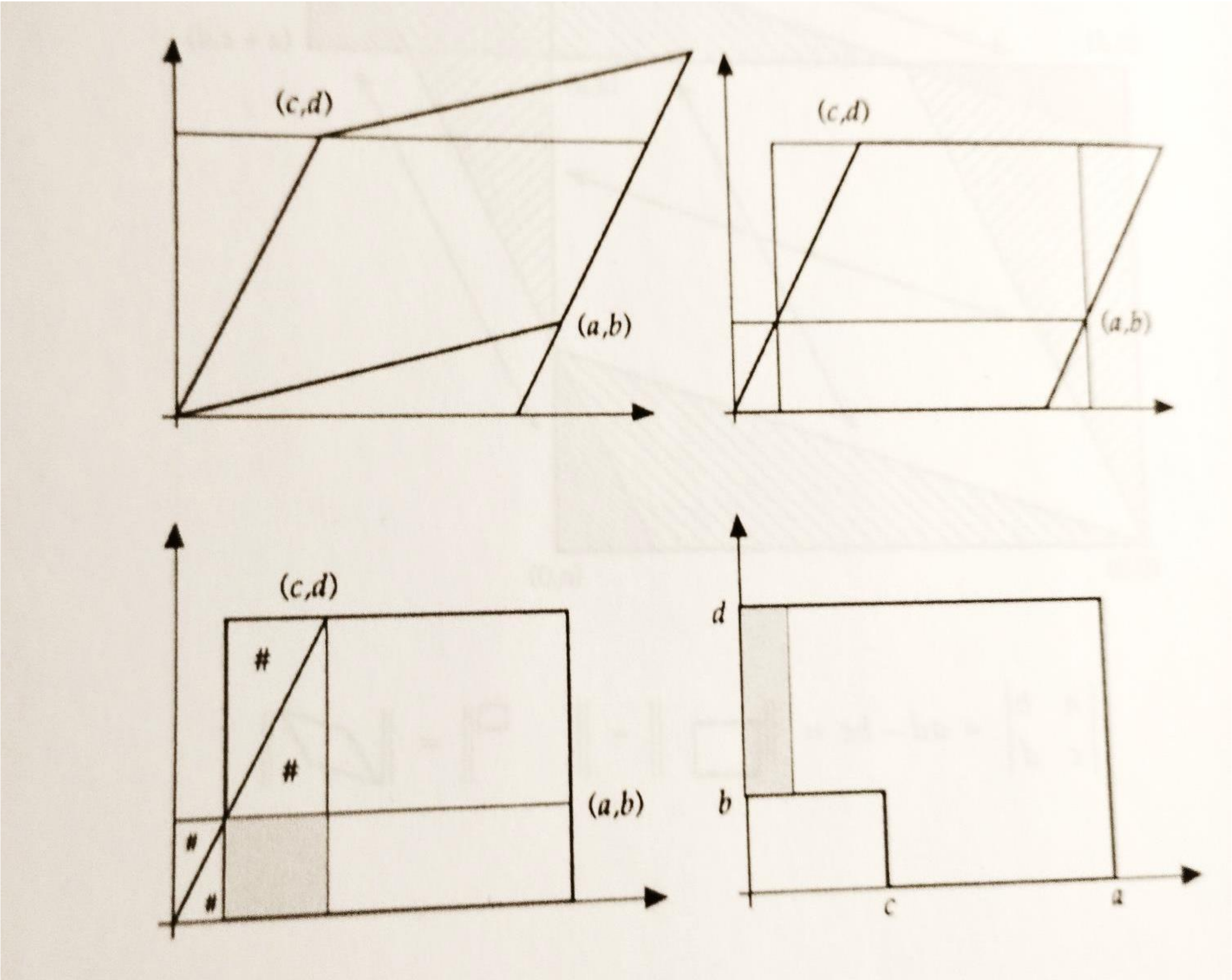




Le triangle dont les sommets sont les centres des trois cercles est un triangle équilatéral. En effet, avec les notations de la figure ci-contre, au point D la tangente commune aux deux cercles est perpendiculaire à la fois à (AD) et à (BD) donc $\mathrm{AB} = \mathrm{AD} + \mathrm{DB} = 2r$ si r est le rayon commun aux trois cercles. On démontre de même que $\mathrm{AC} = \mathrm{BC} = 2r$.
On a donc $\widehat{\mathrm{DAF}} = \widehat{\mathrm{FCE}} = \widehat{\mathrm{EBD}} = 60° = \frac{1}{6} \times 360°$ et les arcs délimitant la surface grisée ont pour longueur $\frac{1}{6} \times 36 = 6$. On en déduit que le périmètre cherché vaut $3 \times 6 = 18$.

Exercice 6

Le déterminant des vecteurs de coordonnées (a, b) et (c, d) peut être vu comme l'aire d'un parallélogramme.
La photo ci-dessous est extraite du livre « Preuves sans mots » de Roger B. Nielsen (Ed. Hermann 2013)



Dénombrement, probabilités

Exercice 1

On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Pour tout entier x compris entre 1 et 6, on suppose que la probabilité d'obtenir x est x fois celle d'obtenir le 1.

Lucie et maxime jouent à un jeu qui consiste à lancer chacun trois fois ce dé. Le total des points obtenus constitue leur score, le vainqueur étant celui qui a obtenu le plus grand score (en cas d'égalité des scores, il n'y a pas de vainqueur).

Au bout de deux lancers, Lucie a 8 points et Maxime en a 10.

Déterminer la, probabilité que Lucie soit victorieuse.

Soit p la probabilité d'obtenir le 1, alors la probabilité d'obtenir le 2, le 3, le 4, le 5, le 6 est respectivement égale à $2p, 3p, 4p, 5p\ 6p$. Comme la somme de ces probabilités vaut 1, on a :

$p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1$ soit $p = \frac{1}{21}$.

Après deux lancers, Lucie a 8 points et Maxime en a 10. Donc Lucie sera victorieuse si et seulement si le nombre qu'elle obtient au troisième lancer doit être 3 de plus que celui obtenu par Maxime à son troisième lancer.

Cela ne peut arriver que si Lucie obtient un 4, un 5 ou un 6.

1^er^ cas : Lucie obtient un 4 et est victorieuse, c'est-à-dire Maxime a obtenu un 1. La probabilité de cet événement est $\frac{4}{21} \times \frac{1}{21} = \frac{4}{441}$.

2^e^ cas : Lucie obtient un 5 et est victorieuse, c'est-à-dire Maxime a obtenu un 1 ou un 2. La probabilité de cet événement est $\frac{5}{21} \times \left(\frac{1+2}{21}\right) = \frac{15}{441}$.

3^e^ cas : Lucie obtient un 6 et est victorieuse, c'est-à-dire Maxime a obtenu un 1 ou un 2 ou un 3. La probabilité de cet événement est $\frac{6}{21} \times \left(\frac{1+2+3}{21}\right) = \frac{36}{441}$.

Au final, la probabilité est cherchée est la somme de ces trois probabilités soit $\frac{55}{441}$.

Exercice 2

Combien d'entiers peut-on exprimer comme la somme de trois entiers deux à deux distincts choisis dans l'ensemble $E = \{4, 7, 10, 13, \dots, 46\}$?

On remarque que E est en fait constitué des entiers s'écrivant $1 + 3k$ où k est un entier naturel prenant toutes les valeurs de 1 à 15.

Pour toute somme S entiers de l'ensemble E, il existe donc trois entiers deux à deux distincts k, l, m appartenant à $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$ tels que $S = 1 + 3k + 1 + 3l + 1 + 3m = 3 + 3(l + k + m)$.

La plus petite valeur prise par $l + k + m$ est $1 + 2 + 3 = 6$ et la plus grande valeur prise par $l + k + m$ est $13 + 14 + 15 = 42$

La somme S peut de plus prendre toutes les valeurs de 6 à 42 en remplaçant un des entiers par l'entier suivant pour augmenter de 1 une somme S.

Le nombre total de sommes de ce type est donc $42 - 5 = 37$.

Exercice 3

De combien de façons peut-on exprimer le nombre 75 comme somme d'au moins deux entiers strictement positifs consécutifs ?

On commence par remarquer que la moyenne M de k entiers consécutifs est le quotient par k de la somme de ces k entiers consécutifs. Autrement dit, la somme S de k entiers consécutifs est le produit de la moyenne M de ces entiers par leur nombre k.

On cherche donc k et M tels que $kM = 75$.

Comme $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 11 + 12 = 78$, on a nécessairement $k \leq 11$.

<u>1^er^ cas :</u> k est impair. Il existe alors un entier p tel que $k = 2p + 1$ et une somme de k entiers consécutifs s'écrit

$S = (a - p) + (a - (p - 1)) + \cdots + (a - 1) + a + (a + 1) + \cdots (a + (p - 1)) + (a + p)$

Soit $S = p \times 2a + a = (2p + 1)a = ka$. La moyenne associée vaut donc a (l'entier du milieu).

Le nombre k doit donc être un diviseur de 75 compris entre 1 et 11. Il n'y a donc que deux possibilités : $k = 3$ (et alors $M = 25$ et $S = 24 + 25 + 26$) ou $k = 5$ (et alors $M = 15$ et $S = 14 + 14 + 16$).

2e cas : k est pair. Il existe alors un entier p tel que $k = 2p$. Un raisonnement analogue à celui fait dans le premier cas permet d'affirmer que, dans ce cas, la moyenne M est celle des deux entiers consécutifs du milieu qu'on peut noter a et $a + 1$ d'où $M = \frac{1}{2}(a + a + 1) = \frac{2a+1}{2}$ et on veut que $2p \times \frac{2a+1}{2} = 75$ soit $p(2a + 1) = 75$.
L'entier $2a + 1$ est donc un diviseur impair de 75, ce qui donne trois possibilités :
$2a + 1 = 75$ soit $a = 37$ et $k = 2p = 2$ (et alors $S = 37 + 38$)
$2a + 1 = 25$ soit $a = 12$ et $k = 2p = 6$ (et alors $S = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$)
$2a + 1 = 15$ soit $a = 7$ et $k = 2p = 10$ (et alors $S = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$)
Il y a donc au total 5 façons d'exprimer 75 comme somme d'au moins Deux entiers strictement positifs consécutifs.

Exercice 4

Combien existe-t-il de sous-ensembles $\{a, b, c, d\}$ de l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ tels que et $a + b + c + d$ soit un multiple de 3 ?

Pour tout entier n, il existe un entier k tel que $n = 3k$ ou $n = 3k + 1$ ou $n = 3k - 1$.
D'autre part, un nombre entier est divisible par si et seulement si on lui ajoute (ou on lui retranche) un multiple de 3.
On peut donc remplacer l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ par la « liste » $L = \{0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1\}$.
On cherche alors quatre nombres dans L de façon que leur somme soit un multiple de 3.

1er cas : on prend les quatre 0 de L. La seule possibilité est de choisir les nombres 0, 3, 6 et 9 dans E.

2e cas : on prend trois 0 dans L. Que le quatrième nombre dans L soit 1 ou -1, la somme des quatre nombres ne pourra pas être un multiple de 3.

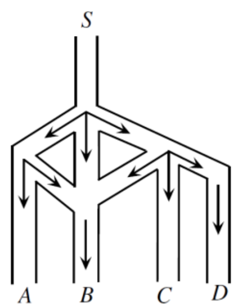
3e cas : on prend deux 0. La somme des quatre nombres sera alors un multiple de 3 uniquement si on choisit en plus dans L un 1 et -1. On choisit donc deux 0 parmi les quatre de L c'est-à-dire deux nombres dans $\{0, 3, 6, 9\}$ (ce qui donne 6 possibilités), puis un 1 dans L c'est-à-dire un nombre dans $\{1, 4, 7\}$ (ce qui donne 3 possibilités) et un nombre -1 dans L c'est-à-dire un nombre dans $\{2, 5, 8\}$ (ce qui donne 3 possibilités).
Ce cas donne au total $6 \times 3 \times 3 = 54$ possibilités.

4e cas : on prend un seul 0. La somme des quatre nombres sera alors un multiple de 3 uniquement si on choisit en plus dans L trois 1 ou trois -1. Il y a quatre façons de choisir un 0 dans L, c'est-à-dire un nombre dans $\{0, 3, 6, 9\}$. Pour chaque choix, il n'y a qu'une seule façon de choisir trois 1 dans L (les trois nombres 1, 4 et 7 de E) et il n'y a qu'une seule façon de choisir trois -1 dans L (les trois nombres 2, 5 et 8 de E)
Ce cas donne au total $4 + 4 = 8$ possibilités.

5e cas : on ne prend aucun 0. La somme des quatre nombres sera alors un multiple de 3 uniquement si on choisit dans L deux 1 et deux -1. On reprend le raisonnement du 3e cas pour obtenir $3 \times 3 = 9$ possibilités dans ce cas.
Au total, il y a donc $1 + 54 + 8 + 9 = 72$ sous-ensembles $\{a, b, c, d\}$ de l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ tels que et $a + b + c + d$ soit un multiple de 3.

Exercice 5

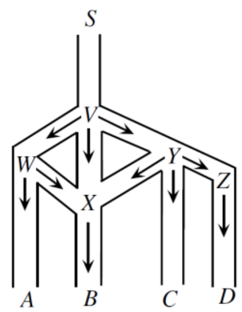
Un hamster est placé dans un labyrinthe au point S de la figure ci-contre. Il peut seulement se diriger dans le sens des flèches.
A chaque bifurcation, les chemins proposés ont la même probabilité d'être empruntés.
Quelle est la probabilité que le hamster aboutisse au point B ?



En nommant chaque bifurcation comme sur la figure ci-contre, on constate que pour aller de S à B le hamster doit passer par V et trois chemins possibles (S-V-W-X-B, S-V-X-B, S-V-Y-X-B). Il a donc en V trois directions possibles (W, X et Y), chacune de probabilité $\frac{1}{3}$.

S'il passe par W, il a deux directions possibles (A et X), chacune de probabilité $\frac{1}{2}$ et

la seule qui convient est X puis une seule direction possible. La probabilité de ce chemin est donc $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$.
On procède de même pour les deux autres chemins. Le chemin S-V-X-B a pour probabilité vaut $\frac{1}{3}$ et la probabilité du chemin S-V-Y-X-B vaut $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$.



La probabilité que le hamster atteigne B est donc $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{18}$.

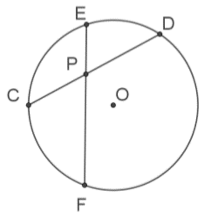
Exercice 6

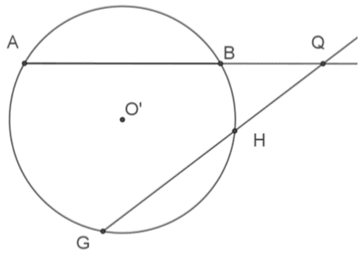
Lors d'une session d'examens se déroulant sur deux jours. Le premier jour, les N élèves sont répartis dans S salles ($S \neq 0$) et on suppose que les effectifs de ces S salles sont deux à deux distincts et tous supérieurs ou égaux à 3.
Le deuxième jour, sont exclus de l'examen les tricheurs détectés le premier jour. Tous les autres élèves présents le premier jour passent le deuxième examen. Ils sont répartis dans un certain nombre non nul de salles et on suppose à nouveau que effectifs de ces salles sont deux à deux distincts et tous supérieurs ou égaux à 3.
De plus, deux élèves ayant passé le premier examen dans la même salle ne se sont jamais ensemble dans la même salle pour le deuxième examen.
a. On suppose que $N = 12$ et $S = 3$. Déterminer le nombre de tricheurs.
b. Dans le cas général, montrer qu'il y a au moins $2S + 3$ tricheurs.

On note T le nombre de tricheurs et S' le nombre de salles utilisées le deuxième jour.
On remarque déjà que $N \geq 3 + 4 + \cdots + (S + 1) + (S + 2)$ car on a réparti N élèves dans S salles d'effectifs tous distincts et au moins égaux à 3.
Comme, d'après les conditions de répartition du premier jour, le nombre N d'élèves est supérieur ou égal à $3 + 4 + \cdots + (S + 1) + (S + 2)$
et comme $[3 + 4 + \cdots + (S + 1) + (S + 2)] + [(S + 2) + (S + 1) + \cdots + 4 + 3] = S(S + 5)$,
on en déduit que $N \geq \frac{S(S+5)}{2}$.
D'autre part, le second jour, chaque salle contient au maximum S élèves (on ne peut reprendre qu'un élève au maximum par salle). Comme chaque salle comprend un nombre d'élèves supérieur ou égal à 3 et que ces nombres doivent être distincts deux à deux, on utilise au maximum $S - 2$ salles. De plus $S \geq 3$ sinon il serait impossible d'avoir au minimum 3 élèves dans chaque salle le second jour.
Le nombre $N - T$ d'élèves passant le deuxième examen est donc majoré par $+(S - 1) \ldots + 4 + 3$.
Un calcul analogue au précédent aboutit à $S + (S - 1) \ldots + 4 + 3 = \frac{(S-2)(S+3)}{2}$
et on a donc $N - T \leq \frac{(S-2)(S+3)}{2}$
a. Si $N = 12$ et $S = 3$, alors une seule salle est utilisée le deuxième jour (au maximum $S - 2$ salles). Cette salle contenant maximum 3 élèves (1 élève au plus de chaque salle), elle en contient exactement 3 et il y a donc 9 tricheurs.
b. Comme $N - T \leq \frac{(S-2)(S+3)}{2}$, on a $N - \frac{(S-2)(S+3)}{2} \leq T$ et, comme $N \geq \frac{S(S+5)}{2}$, on en tire $T \geq \frac{S(S+5)}{2} - \frac{(S-2)(S+3)}{2}$ soit, en développant, $T \geq 2S + 3$.

Macramé : histoires de cordes

Situation 1 : Deux cordes sécantes d'un même cercle

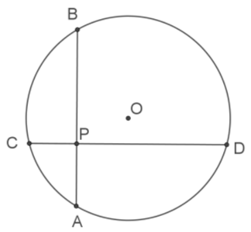




Les cordes [CD] et [EF] du cercle de centre O sont sécantes en P, point situé à l'intérieur du cercle de centre O, les droites supports des cordes [AB] et [GH] sont sécantes en Q, point extérieur au cercle de centre O'. Dans ces configurations : $\mathrm{PC.PD} = \mathrm{PE.PF}$ et $\mathrm{QB.QA} = \mathrm{QH.QG}$

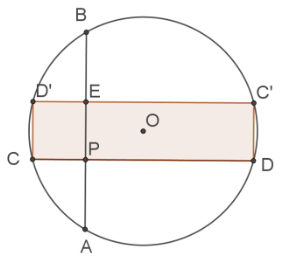
On peut obtenir ces résultats en considérant les triangles semblables PED et PCF (ou QBH et QGA) ou en revenant à la définition de la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Situation 2 : Deux cordes perpendiculaires

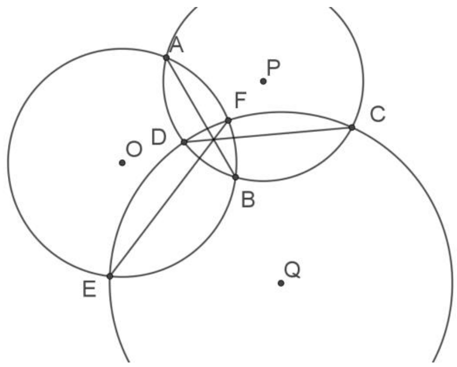


Le cercle de centre O a pour rayon R. Les cordes [AB] et [CD] sont sécantes en P et perpendiculaires. Montrer que $\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2 + \mathrm{PD}^2 = 4R^2$.

Le rectangle CDC'D' obtenu en utilisant les symétriques de C et D par rapport à O a pour côtés $\mathrm{DC} + \mathrm{PD}$ et $\mathrm{PB} - \mathrm{PA} = \mathrm{PE}$.
Le théorème de Pythagore appliqué au triangle CDD' rectangle en D donne $(PC + PD)^2 + (PB - PA)^2 = 4R^2$ et comme $\mathrm{PC.PD} = \mathrm{PA.PB}$ (exercice précédent) on obtient le résultat demandé.



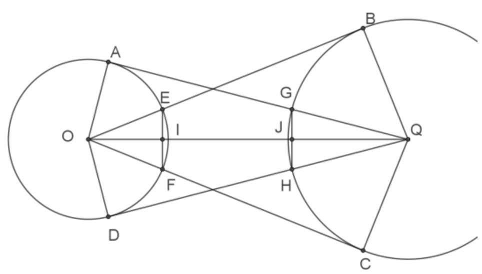
Situation 3 : Trois cordes pour trois cercles



Chacun des trois cercles de centres O, P, Q est sécant avec les deux autres en deux points. La corde [AB] est commune aux deux premiers, la corde [CD] au deuxième et au troisième et la corde [EF] est commune au troisième et au premier. Montrer que les supports de ces segments sont concourants.

Considérons les cordes [AB] et [CD], sécantes en P. Appelons G le point d'intersection de la droite (EP) avec le cercle de centre O et H le point d'intersection de cette même droite avec le cercle de centre Q. Des égalités vues dans les situations précédentes, on tire :
$\mathrm{PA.PB} = \mathrm{PC.PD} = \mathrm{PE.PG} = \mathrm{PE.PH}$. Par conséquent $\mathrm{PG} = \mathrm{PH}$ et les points G et H sont confondus… avec le point F, ce qui montre Bien que P est commun aux trois droites.

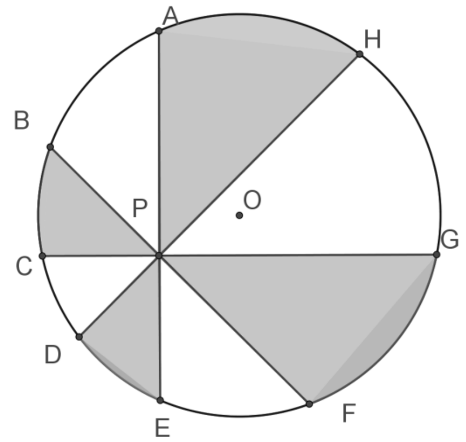
Situation 4 : Des cordes et des tangentes



Des points O et Q, on mène les tangentes aux cercles de centres Q et O. Ces tangentes déterminent sur le cercle de centre O la corde [EF] et sur le cercle de centre Q la corde [GH]. Montrer que ces cordes sont de même longueur.

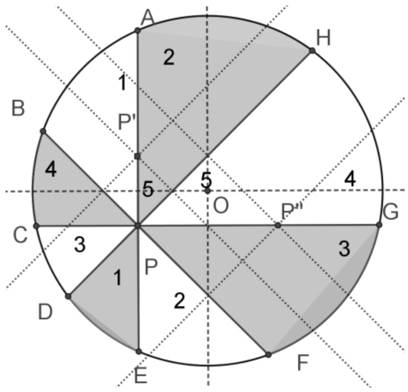
La figure étant symétrique par rapport à la ligne des centres, nous nous limitons à la comparaison des segments [EI} et [GJ]. On utilise le fait que les triangles OEI et OBQ sont semblables. Si on appelle R et R' les rayons des cercles et d la distance des centres, on obtient : $\frac{\mathrm{EI}}{R'} = \frac{R}{d}$, qui conduit à$\mathrm{EF} = 2\frac{RR'}{d}$… et naturellement on obtiendra le même résultat pour GH.
Cette propriété est présentée comme « théorème du globe oculaire »…

Situation 5 : Le théorème de la pizza



Un disque est divisé en huit régions par 4 cordes concourantes en un point P, chacune faisant avec ses voisines un angle de 45°. Montrer que les surfaces blanche et grisée ont la même aire. On pourra faire appel à un découpage adéquat de chacune des zones.

La figure ci-dessous montre comment utiliser des symétries par rapport à des droites perpendiculaires passant par O pour faire apparaître des points P’ et P’’ qui servent de repère pour trouver des « morceaux » correspondants. Le calcul intégral, joint à la propriété vue en situation 2, permet aussi d’obtenir le résultat, mais c’est évidemment moins élémentaire.



Pour les curieux, un découpage en couleurs :