Pépinière académique de mathématiques
Stage des 19 et 20 octobre 2020

Collégiens masqués, protégés, éloignés

Alexis-Claude Clairaut, né en 1713, est le second d'une famille de 21 enfants. Son père, professeur de mathématiques, lui apprend à lire dans *Les éléments* d'Euclide. Il se montre d'une précocité telle qu'à l'âge de douze ans, il écrit un mémoire sur quatre courbes géométriques. À treize ans, il lit devant l'Académie des sciences un compte rendu des propriétés de quatre courbes qu'il avait découvertes. À seize ans seulement, il finit un traité intitulé *« Recherches sur les courbes à double courbure »* qui, lors de sa publication en 1731, entraîne son admission à l'Académie des sciences alors qu'il n'avait pas l'âge légal.

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le siège d'INRIA à Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée de la Vallée de Chevreuse de Gif sur Yvette, le lycée La Bruyère de Versailles et le lycée Hoche de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». **Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves, sur lesquels les établissements veillent. Cette année, il faudra en toute priorité respecter le protocole sanitaire.**

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Anne ALLARD, Joëlle DEAT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Anne MENANT, Pierre MICHALAK (IPR honoraire), Vincent PANTALONI, Évelyne ROUDNEFF, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christine WEILL

Les responsables des établissements d'accueil : Caroline TALLEC, Principale du collège Paul Fort, Bernard POIGT, Proviseur du lycée Camille Pissarro, Guy SEGUIN, Proviseur du lycée Hoche.

Les professeurs : Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Antoine BOUTROIS (Lycée René Cassin, GONESSE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Odile DELASSUS (Lycée Alfred Kastler, Thomas DUMAS (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Carine SIMONDET (Lycée Maurice Genevoix, MONTROUGE)

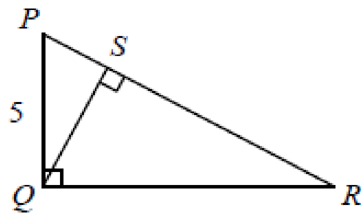
Et les professeurs qui accompagnent leurs élèves : Christian BERGE (Collège Notre Dame *Les* Oiseaux, VERNEUIL SUR SEINE), Florence FERRY (Collège Alain Fournier, ORSAY), François GAILLOT (Collège Auguste Renoir, ASNIERES SUR SEINE), Rémi MOURTERON (Collège Descartes à FONTENAY LE FLEURY), Rémi NIGUÈS (Collège Auguste Renoir à ASNIÈRES SUR SEINE), Hanane ROBERT (Collège Montaigne, CONGLANS SAINTE HONORINE).

Angles et distances

1. Hauteur d'un triangle rectangle

Dans la figure ci-contre, le triangle PQR est rectangle en Q et le point S est le pied de la hauteur issue du point Q.

On suppose que le triangle PQR a une aire égale à 30 et que $PQ = 5$. Déterminer la longueur du segment [QS].



Le triangle PQR a pour aire $30 = \frac{1}{2} \times PQ \times QR$, ce qui donne $QR = 12$.

L'application du théorème de Pythagore dans le triangle PQR donne alors $PR^2 = PQ^2 + QR^2 = 169$

Soit $PR = 13$.

L'aire du triangle PQR peut aussi s'écrire $30 = \frac{1}{2} \times PR \times QS$ d'où $QS = \frac{60}{13}$.

2. Justes milieux

Soit ABC un triangle. On note D le milieu du segment $[BC]$, E le milieu du segment $[AD]$, F le milieu du segment $[BE]$ et G le milieu du segment $[CF]$.

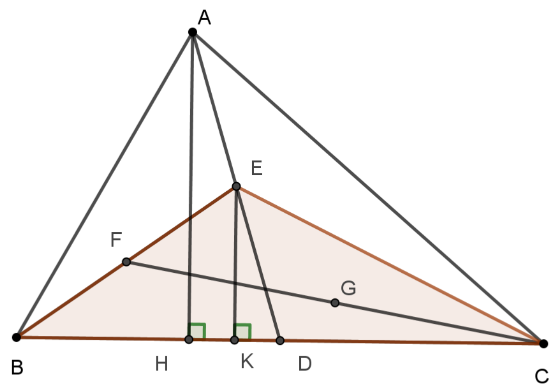
Sachant que l'aire du triangle ABC vaut 1, calculer l'aire du triangle EFG.

L'aire du triangle CEB vaut 1/2 de l'aire du triangle CAB car la base $[BC]$ est la même et la hauteur est divisée par 2. En effet, si H et K désignent respectivement les pieds des hauteurs issues de A et de E dans les triangles ABC et EBC, les droites (AH) et (EK) sont perpendiculaires à la même droite (BC) et donc parallèles. E étant le milieu de $[AD]$, le théorème des milieux permet d'affirmer que $AH = 2\,EK$.

De même l'aire du triangle CFB vaut 1/2 de l'aire de CEB car la base est la même et la hauteur est divisée par 2.

Donc l'aire du triangle CFB vaut 1/4 de l'aire du triangle CAB.

De même, l'aire du triangle FGE vaut 1/2 de l'aire du triangle FCE donc l'aire du triangle FGE vaut 1/8 de l'aire du triangle ABC soit 1/8.



3. Une paire de pairs, une paire d'impairs

Deux triangles isocèles ont chacun au moins un angle dont la mesure est de 70°. Dans le premier triangle, la mesure en degrés de chacun des deux angles restants est paire. Dans le second, la mesure en degrés de chacun des deux angles restants est impaire.

On note S la somme des mesures des angles égaux du premier triangle et T la somme des mesures des angles égaux du second triangle. Quelle est la valeur de $S + T$?

Pour chaque triangle on a deux possibilités :

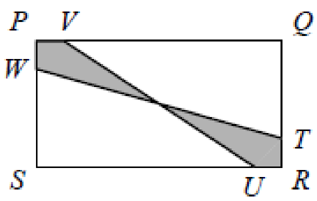
- Les deux angles de même mesure ont pour mesure 70° auquel cas l'angle au sommet a pour mesure 40°. On considère l'un des angles de mesure 70°. La mesure de chacun des angles restants vaut alors 70° et 40°, et chacune est bien paire.

La mesure 70° est celle de l'angle au sommet, auquel cas les angles de même mesure ont pour mesure 55°. La mesure de chacun des angles restants (autre que celui de 70°) vaut alors 55) et 55° et chacune est bien impaire.

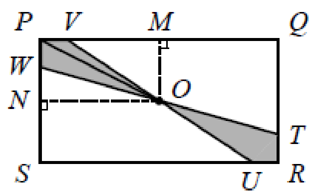
Le premier triangle est donc celui dont les deux angles à la base ont pour mesure 70° et le deuxième celui dont les deux angles à la base ont pour mesure 55°.

On peut donc affirmer que $S + T = (70° + 70°) + (55° + 55°) = 250°$.

4. Découpage dans un rectangle



Le rectangle PQRS a pour longueur 4 et pour largeur 2. Comme sur la figure ci-contre, on place sur le segment [PQ] le point V et sur le segment [PS] le point W, de sorte que $PV = PW = a$, où a est un nombre positif inférieur à 1. Quelle est la valeur de a pour laquelle l'aire de la région ombrée est-elle égale à 1 ?



Soit M et N les projetés orthogonaux de O respectivement sur (PQ) et (PS). M et N sont les milieux respectifs de $[PQ]$ et $[PS]$,

donc $PM = 2 = ON$ et $PN = 1 = OM$ car $OMPN$ est un rectangle (trois angles droits).

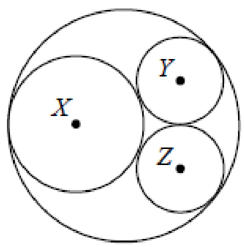
Le triangle PVO a pour base $[PV]$ et pour hauteur $[OM]$ donc son aire est égale à $\frac{1}{2}a$.

Le triangle PVO a pour base $[PV]$ et pour hauteur $[OM]$ donc son aire est égale à $\frac{1}{2}a$.

De même l'aire du triangle PWO est égale à a et le quadrilatère $PWOV$ a une aire égale à $\frac{3}{2}a$ comme le quadrilatère $RTOU$.

La région ombrée a donc une aire égale à $3a$. L'aire du rectangle $PQRS$ vaut 8 et 8 fois l'aire de l'aire ombrée. D'où $a = \frac{1}{3}$.

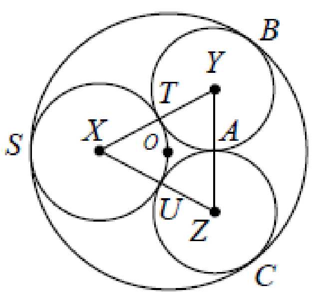
5. Un grand, un moyen, deux petits



Dans la figure ci-contre, le cercle de centre X est tangent au grand cercle et passe par le centre O de ce dernier.

Chacun des cercles de centres Y et Z est tangent aux trois autres cercles et ces deux cercles ont même rayon noté r. On suppose que le rayon du cercle de centre X vaut 1.

Déterminer r.



On note respectivement S, T et U les points de tangence du cercle de centre X avec le grand cercle et les cercles de centres Y et Z. On note A le point de contact des cercles de centres Y et Z. On note respectivement B et C les points de contact des cercles de centres Y et Z avec le grand cercle.

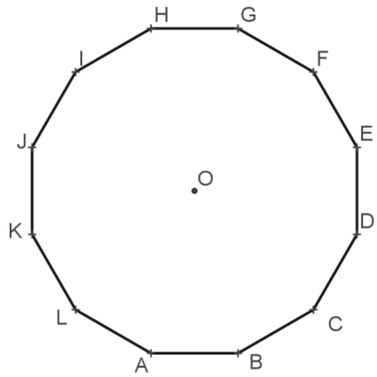
Les cercles de centres X, Y et Z étant tangents entre eux, les points T, U et A appartiennent respectivement aux segments $[XY]$, $[XZ]$ et $[YZ]$.
On en déduit $XY = 1 + r = XZ$ et le triangle XYZ est isocèle en X
De plus $YA = ZA = YB = ZC = r$
D'autre part les segments $[XS]$ et $[OS]$, rayons respectifs du grand cercle et du cercle de centre X qui sont tangents en S, sont perpendiculaires à la tangente commune des deux cercles en S. On a donc $X \in [OS]$ et $OX = XS = 1$, $OS = 2$.
Un raisonnement analogue donne $Y \in [OB]$ et $OY = OB - YB = 2 - r$. De même $OZ = 2 - r$.
De plus, les rayons $[YA]$ et [ZA] sont perpendiculaires à la tangente commune aux cercles de centres Y et Z au point de tangence A donc les points Y, A et Z sont alignés et la droite (YZ) est perpendiculaire à cette tangente en A et, comme $YA = ZA = r$, A est le milieu de $[YZ]$.
Enfin, les triangles XYZ et OYZ sont isocèles respectivement en X et en O donc les deux droites (XA) et (OA) sont confondues (médiatrice de $[YZ]$).
Dans les triangles XYA et OYA rectangles en A, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$OA = \sqrt{OY^2 - YA^2} = \sqrt{(2-r)^2 - r^2} = \sqrt{4-4r}$$

et $XA^2 + YA^2 = XY^2$ soit $(XO + OA)^2 + YA^2 = XY^2$, ce qui donne une fois les développements effectués, $\sqrt{4-4r} = 3r - 2$ soit, en élevant au carré, $8r = 9r^2$. La solution qu'on garde est $r = \frac{8}{9}$.

6. Groupez-vous par trois

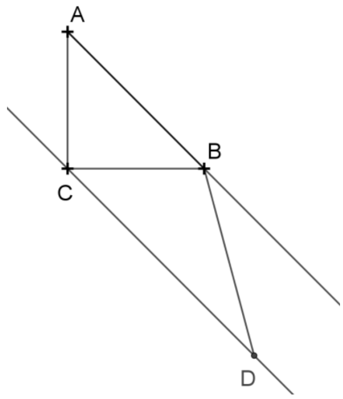
On considère un dodécagone régulier ABCDEFGHIJKL ; on choisit un sous-ensemble de l'ensemble de ses sommets et on se pose deux questions :
1. Parmi les sommets choisis, y en a-t-il trois qui soient les sommets d'un triangle rectangle ?
2. Parmi les sommets choisis, y en a-t-il trois qui définissent un angle obtus ?
Quels sont les nombres de sommets maximaux à choisir pour les réponses aux deux questions soient non ?



Les sommets du dodécagone sont tous situés sur un cercle de centre O. Trois d'entre eux sont les sommets d'un triangle rectangle seulement si deux d'entre eux sont les extrémités d'un diamètre. On peut au maximum choisir six sommets dont deux ne soient pas diamétralement opposés.
Si on choisit quatre sommets formant un rectangle, la condition « pas d'angle obtus » est respectée. En revanche, si l'ensemble choisi contient cinq points qui forment donc un pentagone, ce pentagone a un angle obtus (la moyenne des mesures est 108°). Donc le maximum est 4.

7. Angle inconnu

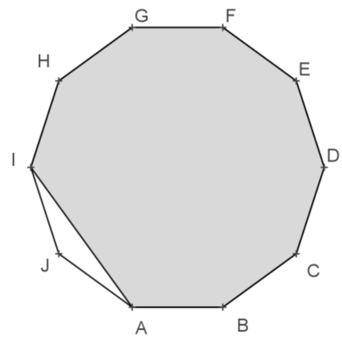
Par le sommet C du triangle rectangle isocèle ABC, rectangle en C, on trace la parallèle à (AB). Sur cette droite, le point D est tel que BA = BD et situé dans le demi-plan de frontière (CB) ne contenant pas A. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{CBD}$?



Considérons les projetés orthogonaux E et F des points C et D respectivement sur la droite (AB). Les segments [CE] et [DF] ont même longueur (« écart » entre des parallèles), cette longueur est la hauteur du triangle rectangle isocèle ABC, elle est donc égale à AB/2, ou encore à BD/2.
Dans le triangle BDF, rectangle en F, un côté a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse. C'est un « demi triangle équilatéral ». L'angle $\widehat{DBF}$ mesure donc 30°.
Cela conduit à la mesure de $\widehat{CBD}$: 105°.

8. Encore un angle inconnu

On transforme le décagone régulier ABCDEFGHIJ en un ennéagone (pas régulier…) ABCDEFGHI en « supprimant » le sommet J. Quelle est la mesure du plus petit angle (ils sont deux) de cet ennéagone ?



Les angles intérieurs d'un polygone régulier à n côtés mesurent chacun, en degrés, $180\frac{n-2}{n}$. Les angles d'un décagone régulier mesurent donc 144°.
Le triangle AIJ isocèle de sommet principal J a donc des angles à la base mesurant $\frac{180-144}{2} = 18°$. L'angle $\widehat{HIA}$ mesure donc $144 - 18 = 126°$

Calcul littéral et équations

1. L'algorithme de Karatsuba (le calcul littéral est bien utile en informatique)

Pour effectuer le produit de deux nombres de deux chiffres dans le système décimal, il est en général nécessaire de connaître quatre produits de nombres de deux chiffres, car :

$$(10a+b)(10c+d) = 100ab + 10(ad+bc) + bd$$

Plusieurs dispositions pratiques des calculs ont été proposées au cours de l'histoire, par exemple *la multiplication par jalousies*, dont voici un exemple :

	1	**4**	**9**	
	/ 3	1 / 2	2 / 7	**3**
	/ 5	2 / 0	4 / 5	**5**
	/	/	/	**7**

Les nombres à multiplier sont écrits, l'un sur la première ligne, l'autre sur la dernière colonne. Les produits chiffre à chiffre sont écrits dans les cases centrales, séparées chacune en deux parties selon la deuxième diagonale. On termine en calculant les sommes diagonale par diagonale en commençant par la case du bas à droite (et sans oublier les retenues). C'est au fond très voisin de la technique acquise en primaire. Avec cette technique, chaque chiffre du multiplicande a été multiplié par chaque chiffre du multiplicateur.

Quand on conçoit un ordinateur, il faut lui « apprendre » les produits élémentaires, et effectuer une multiplication est beaucoup plus coûteux en temps de calcul qu'une addition ou un déplacement de virgule.

Anatoli Alexeïevitch Karatsuba, mathématicien et informaticien russe, 1937-2008, propose, en 1960, d'écrire :

$$(10a+b)(10c+d) = 100ac + 10\big(ac+bd-(a-b)(c-d)\big) + bd$$

Il n'y a plus que trois produits : ac, bd et $(a-b)(c-d)$. À 23 ans, il réduit ainsi à rien le dogme des quatre produits émis par Andreï Nicolaïevitch Kolmogorov (Immense mathématicien russe, 1903-1987).

Si on doit effectuer le produit de « grands » nombres de même taille, en utilisant la même technique, on obtient :

$$(10^n a + b)(10^n c + d) = \cdots$$

Cette technique est appelée « diviser pour régner » : Supposons qu'on doive effectuer le produit de deux nombres de huit chiffres. Chacun d'eux peut être écrit $10^4 a + b$, où a et b sont des nombres de quatre chiffres. Combien de produits de nombres s'écrivant avec un seul chiffre devra-t-on effectuer au lieu des 64 prévus par Kolmogorov ?

	1	**4**	**9**	
	/ 3	1 / 2	2 / 7	**3**
/	/ 5	2 / 0	4 / 5	**5**
5 / 1	/ 7	2 / 8	6 / 3	**7**
3 / 2	**1** / 1	**9** /	**3** /	

Un avantage de cette disposition : une place est prévue pour la retenue, qui a ainsi moins de chances de se perdre.

$$149 \times 357 = 53193$$

$$(10^n a + b)(10^n c + d) = 10^{2n} ac + 10^n\big(ac+bd-(a-b)(c-d)\big) + bd$$

Dans le cas $n = 4$, on a dans un premier temps trois produits de nombres de quatre chiffres, puis pour chacun trois produits de nombres de deux chiffres et pour chacun de ces derniers trois produits de nombres à un seul chiffre, soit 27 produits. L'économie de calcul est considérable (on dit que l'algorithme est en $n \log n$, au lieu de la procédure habituelle en n^2)

2. Défense de calculer a et b

Deux nombres a et b sont tels que $a+b=1$ et $a^2+b^2=2$. Combien vaut a^5+b^5?

Écrire un algorithme fournissant a^n+b^n pour toute valeur donnée de n.

Comme $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, on établit d'abord $ab = -\frac{1}{2}$

Ensuite $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = a^3+b^3+3ab(a+b)$, d'où il vient $a^3+b^3 = 1+\frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

Enfin $a^5+b^5 = (a^3+b^3)(a^2+b^2) - a^2b^2(a+b) = 5 - \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$

1
2
2,5
3,5
4,75
6,5
8,875
12,125
16,5625
22,625

Pour n assez grand, on peut écrire $a^{n+1}+b^{n+1}=(a^n+b^n)(a+b)-ab(a^{n-1}+b^{n-1})$, ou encore : $a^{n+1}+b^{n+1}=(a^n+b^n)+\frac{1}{2}(a^{n-1}+b^{n-1})$. Le tableur suffit pour programmer les premiers résultats.
Pour ceux qui auraient voulu résoudre l'équation d'inconnue (a,b), de $a+b=1$ et $ab=-\frac{1}{2}$, on tire $2a^2-2a-1=0$, ou encore $\left(a\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{3}{2}$, etc.+

3. Le paramètre est l'inconnue
On développe et on réordonne $f(x)=(3+2x+x^2)(1+mx+m^2x^2)$. On trouve que le coefficient du terme x^2 est égal à 1. Quelles sont les valeurs possible de m ?

En développant, le coefficient de x^2est $1+2m+3m^2$. Les réels m qui conviennent sont ceux qui vérifient $2m+3m^2=0$ à savoir 0 et $-\frac{2}{3}$.

4. On peut quand même dire quelque chose
Soit x et y deux nombres réels vérifiant les équations suivantes :
$x^2+3xy+y^2=909$ (1)
et $3x^2+xy+3y^2=1\,287$ (2)
Quelles sont les valeurs de $x+y$?

En additionnant membre à membre les deux équations, on obient $x^2+xy+y^2=549$ (3).
En retranchant membre à membre l'équation (3) à l'équation (1), on obtient $xy=180$ (4)
En retranchant membre à membre l'équation (4) à l'équation (1), on obtient $(x+y)^2=27^2$.
On en déduit que les valeurs de $x+y$ sont 27 ou -27.

5. Une équation en nombres entiers
Soit a et b deux nombres entiers strictement positifs tels que $\frac{20}{19}=1+\frac{1}{1+\frac{a}{b}}$.
Quelle est la plus petite valeur que peut prendre la somme $a+b$?

L'égalité donnée s'écrit aussi $\frac{1}{1+\frac{a}{b}}=\frac{1}{19}$ c'est-à-dire $\frac{a}{b}=18$. Comme a et b sont des entiers posirifs, la plus petite valeur de $a+b$ cherchée est celle pour laquelle a et b sont les plus petits soit respectivement 18 et 1, à savoir 19.

6. Encore une autre façon de compter…
Ma grand-mère et moi fêtons nos anniversaires le même jour. Il y a cinq ans, elle avait cinq fois mon âge. Cette année, elle a quatre fois mon âge. Dans combien d'années aura-t-elle seulement trois fois mon âge ?

Appelons m et p les âges respectifs de la grand-mère et du petit-fils aujourd'hui. Les conditions données par l'énoncé s'écrivent : $\begin{cases} m-5=5(p-5) \\ m=4p \end{cases}$. On aboutit à une équation d'inconnue p : $4p-5=5p-25$, qui conduit à $p=20$, puis $m=80$.
L'équation $80+x=3(20+x)$ a pour solution 10. Longue vie à tous les deux. Ils ne peuvent peut-être pas espérer que l'une aura un jour le double de l'âge de l'autre…

7. Mauvais développement
En classe, le professeur a demandé d'écrire le développement de l'expression $(a+2b-3)^2$. J'ai écrit : $(a+2b-3)^2=a^2+4b^2-9$. « C'est incorrect », dit le professeur. « Prends une valeur pour a et une valeur pour b et compare ». Ce que je fais, mais justement il n'y a pas de différence entre les deux résultats.
1. Quels nombres ai-je substitué à a et b pour obtenir l'égalité ?
2. Quels sont les nombres permettant cette supercherie ?

Effectuons un développement correct. On parvient à $a^2+4b^2+4ab-6a-12b+9=a^2+4b^2-9$, ce qui s'écrit encore $2ab-3a-6b+9=0$
…ou encore $2b(a-3)-3(a-3)=0$
…ou encore $(a-3)(2b-3)=0$
J'ai pu remplacer a par 3, par exemple, et b par n'importe quel nombre, ou b par $\frac{3}{2}$ et a par n'importe quel nombre.

Arithmétique

1. Le système de numération d'Avižiénis

Algirdas Antanas Avižienis, mathématicien et informaticien Lituanien né en 1932, alors à l'université de l'Illinois, propose en 1961 un système de numération utilisant des *chiffres signés.* Par exemple, en base 10, les chiffres sont $0, 1, \bar{1}, 2, \bar{2}, 3, \bar{3}, 4, \bar{4}, 5, \bar{5}$. Le nombre habituellement écrit 728 s'écrit dans ce système $1\,\bar{3}3\bar{2}$ (car $8 = 10 - 2, 7 = 10 - 3$). Le nombre habituellement écrit 683 s'écrit, lui : $1\,\bar{3}\bar{2}3$. Leur somme peut être calculée sans transfert de retenue, c'est $1\,411$ (résultat qui peut évidemment être obtenu directement). Le système d'Avižienis est parfois utilisé dans les processeurs des ordinateurs, car les nombres ainsi écrits tiennent moins de place. Le système (qui s'étend aux bases autres que 10) a une faiblesse : il est *redondant* (l'écriture des nombres n'est pas unique : $135 = 14\bar{5}$).

Le mathématicien français Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) proposait déjà ce système – pour la base dix – devant l'Académie des sciences en 1840. Mais Avižienis n'en a été averti qu'en 2010.

1. Comment écrire l'opposé du nombre $1\bar{2}\,\bar{3}4\bar{5}$?
2. Calculer la somme $4\bar{5}\,32\bar{2} + 1\bar{2}\,\bar{3}4\bar{5}$ puis la différence $4\bar{5}\,32\bar{2} - 1\bar{2}\,\bar{3}4\bar{5}$

1. On peut naturellement, comme d'habitude, placer le signe « – » devant le nombre, mais on peut aussi changer le signe de tous les chiffres. On peut par exemple vérifier que $1\bar{2}\,\bar{3}4\bar{5} + \bar{1}23\bar{4}5 = 0$ (mais il faut comprendre la signification du premier chiffre signé négativement).

2. Posons ces opérations en tableau :

	$\bar{1}$			$\bar{1}$	
	4	$\bar{5}$	**3**	**2**	$\bar{2}$
+	**1**	$\bar{2}$	$\bar{3}$	**4**	$\bar{5}$
	---	---	---	---	---
	4	**3**	**0**	**5**	**3**

2. Le Club des cinq

La liste 11, 20, 31, 51, 82 est un exemple d'une liste de cinq entiers strictement positifs rangés dans l'ordre croissant et dont on obtient le troisième entier en additionnant le premier et le deuxième entier, le quatrième en additionnant le deuxième et le troisième entier, et le cinquième en additionnant le troisième et le quatrième entier.

Combien de telles listes de cinq entiers strictement positifs ont 124 comme cinquième entier ?

Si on note a et b les deux premiers entiers de cette liste, les suivants sont $a + b, a + 2b$ et $2a + 3b$.

On veut donc $2a + 3b = 124$ (1)

Ceci implique, puisque a et b sont positifs, $b \leq 42$.

De plus, les 5 nombres étant rangés dans l'ordre croissant, on a $a < b$, ce qui entraine, en s'appuyant sur l'égalité (1), $5b > 124$ d'où $b > 24$.

$3b$ est nécessairement pair car valant $124 - 2a$.

Or si b est impair, il existe un entier k tel que $b = 2k + 1$ et alors $3b = 6k + 3 = 2(3k + 1) + 1$ donc $3b$ est impair.

On en déduit que b est nécessairement pair.

Les valeurs de b possibles sont donc 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40.

On constate les valeurs de a qui conviennent sont respectivement 23, 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2.

Les 8 listes solutions sont : (2, 40, 42, 82, 124) ; (5,38, 43, 81, 124) ; (8, 36, 44, 80, 124) ; (11, 34, 45, 79, 124) ; (14, 32, 46, 78, 124) ; (17, 30, 47, 77,124) ; (20, 28, 48, 76, 124) ; (23, 26, 49, 75, 124).

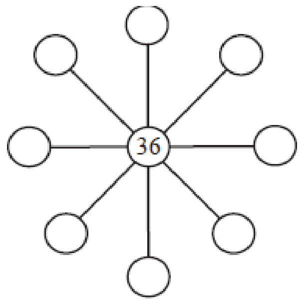
3. Un nombre à déterminer

Déterminer tous les nombres premiers de quatre chiffres distincts ayant les trois propriétés suivantes :
(1) le nombre formé des deux premiers chiffres et le nombre formé des deux derniers chiffres sont premiers ;
(2) la somme des deux premiers chiffres vaut 10 et la somme des deux derniers chiffres vaut 10 ;
(3) le chiffre des unités et le chiffre des dizaines sont premiers.

Soit $\underline{abcd}$ un nombre à 4 chiffres distincts (a, b, c et d sont des entiers compris entre 0 et 9).
D'après la propriété (2), le nombre $\underline{cd}$ doit appartenir à l'ensemble $\{19, 28, 37, 46, 64, 73, 82, 91\}$.
La propriété (3) nous impose le fait que c et d valent 2,3,5 ou 7.
La propriété (1) nous impose le fait $\underline{cd}$ est premier.
En combinant les trois propriétés, on trouve comme seules possibilités pour $\underline{cd}$: 37 et 73.
Le raisonnement est le même pour le nombre $\underline{ab}$ pour lequel la propriété (3) n'intervient pas, ce qui donne comme valeurs possibles de $\underline{ab}$ 19, 37 ou 73.
Ainsi, on obtient 6 nombres possibles :
1937, 1973, 3737, 3773, 7337 et 7373.
Mais au final, le nombre à 4 chiffres doit aussi être premier et à 4 chiffres distincts donc il ne reste que 1973.

4. Diviseurs de 2 592

Dans la figure ci-contre, on veut écrire un nombre entier positif dans chacun des huit cercles vides de manière que sur chaque ligne droite, le produit des trois entiers soit égal à 2 592.
Si les entiers situés chacun dans un des neuf cercles sont distincts deux à deux, quelle est la plus grande somme possible de ces neufs entiers ?



Si on note x et y les deux entiers du pourtour situé sur une même ligne de centre 36, alors $x \times 36 \times y = 2\,592$
Soit $xy = 72$. Les diviseurs de 72 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8 et les quotients de 72 par ces nombres.
On peut par symétrie du problème se limiter au cas où $x < y$. On considère donc les couples (1,72), (2,36), (3,24), (4,18), (6,12) et (8,9) auxquels sont associées les valeurs 73, 38, 27, 22, 18, 17 pour la somme $x + y$.
Pour compléter tous les cercles, on doit choisir quatre couples deux à deux distincts parmi ceux cités ci-dessus, hormis celui contenant déjà 36 et cela afin que la somme totale soit la plus grande possible. On choisit donc les 4 couples dont la somme $x + y$ est la plus grande.
La somme la plus grande est donc $73 + 27 + 22 + 18 + 36$ soit 176.

5. Un peu de logique

À propos d'un certain nombre entier, on fait sept affirmations :
a) le nombre est inférieur à 23 ;
b) Le nombre est inférieur à 25 ;
c) Le nombre est inférieur à 27 ;
d) Le nombre est inférieur à 29 ;
e) Le nombre est pair ;
f) Le nombre est multiple de 3 ;
g) Le nombre est multiple de 5.
Parmi ces sept affirmations, quatre sont vraies et trois fausses.
Quel est le plus grand nombre entier répondant à ces exigences ?

Si l'affirmation *a)* est vraie, les trois affirmations suivantes le sont également, et il reste à chercher parmi les nombres entiers inférieurs à 23 les nombres impairs qui ne sont ni multiples de 3 ni multiples de 5. Les candidats sont : 1, 7, 11, 13, 17, 19. Nous gardons 19.
Si l'affirmation *a)* est fausse :
- si l'affirmation *b)* est vraie, *c)* et *d)* le sont également et une seule des trois dernières l'est. Les nombres pairs non multiples de 3 et non multiples de 5 candidats sont : 2, 4, 8, 14, 16, 22. Nous gardons 22.
Les multiples de 3 impairs et non multiples de 5 sont :
… etc. On continue en déroulant la logique. Mais la méthode du catalogue est assez facile à mettre en œuvre ici :
Première observation : une au moins des quatre premières affirmations est vraie.
On peut donc se limiter à chercher parmi les entiers inférieurs à 29, en commençant par 29. Le premier nombre à vérifier les conditions données par l'énoncé est le bon :

	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
Inférieur à 23							v	v	v	v	V							
Inférieur à 25					v	v	v	v	v	v	V							
Inférieur à 27			v	v	v	v	v	v	v	v	V							
Inférieur à 29	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	V							
pair		v		v		v		v		v								
Multiple de 3			v			v			v									
Multiple de 5					v					v								

Si « inférieur » est compris comme « inférieur ou égal », alors 25 convient, si c'est « inférieur strict », on ira jusqu'à 19.

6. Enfin, Erdös vint

En 1932, le mathématicien hongrois et globe-trotter Paul Erdös (il a alors 19 ans !) donne une démonstration du théorème de Joseph Bertrand (mathématicien français 1822-1900) : « Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, il existe un nombre premier p tel que $n < p \leq 2n$ », dont la première preuve avait été donnée par Pafnouti Lvovitch Thébychev (mathématicien russe (1821-1894).

Pour marcher sur les traces d'Erdös, compléter la suite ci-dessous de sorte que chaque nombre y apparaissant soit premier et inférieur au double du précédent, ce qui donnera une vérification du théorème de Joseph Bertrand pour $n < 4\,000$. Ce n'est pas une démonstration, seulement une petite idée…

2	3	5	7	13									4 001

Expliquer pourquoi cette liste peut s'arrêter à 4 001.

2	3	5	7	13	23	43	83	163	317	631	1 259	2 503	4 001

Chaque nombre de la suite est le plus grand premier inférieur au double du précédent. On attendrait 5 003, mais 4 001 suffit, comme nombre premier compris entre 4 000 et 8 000.

7. Encore des nombres premiers

On forme, avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et 9 utilisés chacun une fois quatre nombres premiers s'écrivant avec deux chiffres dans la système décimal.

1. Donner un exemple d'une telle réalisation.
2. Quelles sont les sommes possibles de quatre tels nombres ?

1. Les nombres premiers s'écrivant avec deux chiffres distincts et distincts de 8 dans le système décimal sont :

13	**23**	31	**41**	**53**	**61**	71	83	97
17	**29**	37	**43**	**59**	**67**	73	89	
19			**47**			79		

Dans les suites cherchées, les chiffres 2, 4, 6 et 5 ne peuvent être chiffres des unités. Les quatre nombres seront donc choisis dans les cases entourées en gras, un seul par colonne. Cela laisse comme possibilités :
23 – 41 – 59 – 67 , 23 – 47 – 59 – 61, 29 – 41 – 53 – 67, 29 – 47 – 53 – 61
2. Les chiffres des dizaines sont nécessairement 2, 4, 5 et 6 et ceux des unités 1, 3, 7 et 9. La somme est donc 190.

8. Équation en nombres entiers

Les entiers a, b, c et d vérifient les hypothèses suivantes :
Il existe un entier n tel que $a + n = b - n = cn = \frac{d}{n}$. On appelle x la valeur commune de $a + n, b - n$, etc.
On suppose que $a + b + c + d = 100$.
Quels sont les entiers a, b, c, d ?

On peut écrire $a + b + c + d = 2x + \frac{x}{n} + xn = \frac{x}{n}(2n + 1 + n^2) = \frac{(n+1)^2 x}{n}$
Il s'ensuit que $100n = (n + 1)^2 x$

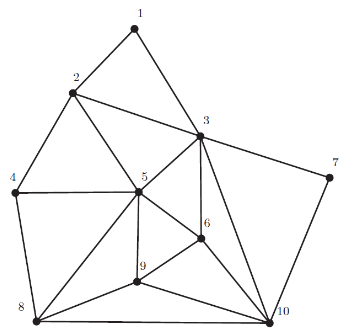
De $cn = x$, on déduit $c(n+1)^2 = 100$.
100 est donc un multiple de c et c doit être un carré. Examinons les possibilités :

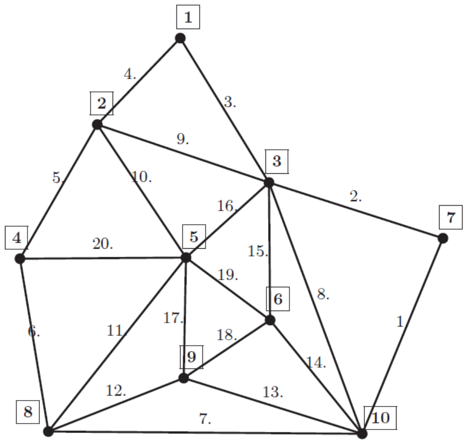
1. $c = 1$ conduit à $n = 9$, $d = 81$, $a = 0$, $b = 18$
2. $c = 4$ conduit à $n = 4$, $d = 64$, $a = 12$, $b = 20$
3. $c = 25$ conduit à $n = 1$, $d = 25$, $a = 24$, $b = 26$
4. $c = 100$ donne $n = 0$, ne convient pas à cause du quotient.

Dénombrement, probabilités et algorithmes

1. Into the wild (en mémoire de Leonhard Euler)

La figure ci-contre montre le réseau des allées traversant un passif forestier. Les intersections sont numérotées de 1 à 10. Partant du point 10, Léonard parcourt chaque allée une seule fois. Où peut-il aboutir ? Donner la suite des intersections par lesquelles il est passé.





Leonhard Euler (mathématicien suisse, 1707-1776) inventa, en quelque sorte, la théorie des graphes en résolvant le problème dit « des ponts de Königsberg). Un des premiers théorèmes sur les graphes affirme qu'on ne peut avoir parcouru complètement un graphe (au sens de cet exercice) que si le nombre de sommets où aboutissent des arêtes en nombre impair est pair. Dans le cas qui nous occupe, le départ s'effectuant du 10, l'arrivée se fera en 4. Une solution possible est indiquée sur la figure ci-contre à gauche.

2. Escape game

Le code d'un cadenas est un nombre à quatre chiffres (de 0 à 9, le nombre pouvant commencer par 0). Mathieu a oublié le code mais il se rappelle que ce nombre est inférieur ou égal à 2020 et que ses quatre chiffres sont tous différents.

Combien de codes doit-il essayer pour être certain que le cadenas s'ouvre ?

On a 7 codes du type 2 - - - (ou plus précisément 201 -) et on a $2 \times 9 \times 8 \times 7$ codes avec 0 ou 1 comme chiffre des milliers, ce qui donne 1 016 codes.

3. Sport collectif

Quatre équipes participent à un tournoi où chaque équipe joue un seul match contre chacune des trois autres équipes. À la fin de chaque match, soit les équipes ont fait match nul, soit une équipe a gagné tandis que l'autre a perdu. On attribue aux équipes 3 points pour une victoire, 0 point pour une défaite et 1 point pour un match nul.

Soit S la somme des points des quatre équipes à la fin du tournoi. Parmi les valeurs 11, 13, 15, 16 et 17 quelle est celle que la somme S ne peut pas prendre ?

Soit W, X, Y, et Z les quatre équipes qui participent au tournoi. Il y a au total 6 matchs :
W contre X, W contre Y, W contre Z, X contre Y, X contre Z, Y contre Z
À la fin de chaque match, soit une équipe obtient 3 points pour une victoire et l'autre 0 point pour une défaite (soit un total de de 3 points), soit chaque équipe obtient 1 point pour un match nul (soit un total de 2 points)).
Puisqu'il y eut un total de 6 matchs, alors théoriquement le nombre maximal de points pouvant être attribués est $6 \times 3 = 18$ tandis que le nombre minimal de points pouvant être attribués est $6 \times 2 = 12$.
En particulier, cela signifie qu'il n'est pas possible que le nombre total de points soit égal à 11.
On peut montrer que chacune des possibilités de pointage, de 12 à 18 points, est possible.

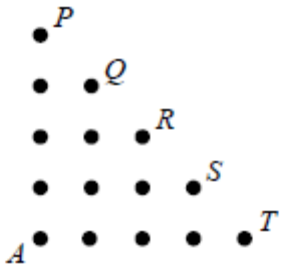
4. Marche au hasard

Dans la grille ci-contre, Jeanne commence au point A et lance une pièce de monnaie équilibrée afin de déterminer la direction dans laquelle elle va se déplacer.

Si la pièce tombe du côté face, elle monte d'un point.

Si la pièce tombe du côté pile, elle se déplace d'un point vers la droite.

Quelle est la probabilité qu'après quatre lancers, Jeanne soit située sur le point R?



On peut déjà remarquer qu'après quatre lancers Jeanne sera située sur l'un des points P, Q, R, S ou T.
Après chaque lancer de la pièce, Jeanne se déplace soit d'un point vers le haut soit d'un point vers la droite. Puisque Jeanne peut se déplacer dans deux directions différentes à chacun des quatre lancers de la pièce, il y a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ chemins différents qui peuvent la mener à l'un des points P, Q, R, S ou T : si l'on désigne par H un déplacement vers le haut et par D un déplacement vers la droite, on peut représenter les 16 chemins possibles de la manière suivante :
HHHH,HHHD,HHDH,HHDD,HDHH,HDHD,HDDH,HDDD,DHHH,DHHD,DHDH,DHDD,DDHH,DDHD,DDDH,DDDD.
Pour chaque lancer, la pièce étant équilibrée, la probabilité de D est la même que celle de H et les 16 chemins différents sont aussi équiprobables.
Il reste donc à déterminer le nombre de chemins permettant d'atteindre R après quatre lancers. Ces chemins sont ceux qui contiennent deux déplacements D et deux déplacements H. On en compte 6.
La probabilité cherchée est donc $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

5. Cube travesti

Un cube a six faces. Chaque face porte quelques points. Les six faces respectives du cube portent 2, 3, 4, 5, 6 et 7 points. Harry choisit un point au hasard et décide de l'effacer, chaque point ayant les mêmes chances d'être choisi par Harry. À la suite d'un lancer, chaque face du cube a les mêmes chances d'être la face supérieure. On lance le cube, quelle est la probabilité que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points ?

Si Harry efface un point d'une face qui porte un nombre pair de points, cette face portera alors un nombre impair de points. Si Harry efface un point d'une face qui porte un nombre impair de points, cette face portera alors un nombre pair de points.
Au départ, 3 faces portaient un nombre pair de points tandis que 3 faces portaient un nombre impair de points.
Si Harry efface un point d'une face qui porte un nombre pair de points, alors 4 faces porteront un nombre impair de points et 2 faces porteront un nombre pair de points. Dans ce cas, après un lancer, la probabilité que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points est égale à $\frac{4}{6}$, soit $\frac{2}{3}$.
Si Harry efface un point d'une face qui porte un nombre impair de points, alors 2 faces porteront un nombre impair de points et 4 faces porteront un nombre pair de points. Dans ce cas, après un lancer, la probabilité que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points est égale à $\frac{2}{6}$ soit $\frac{1}{3}$.
Puisque les 6 faces du cube portent un total de 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27 points, alors la probabilité que Harry efface un point de la face à 2 points est égale à $\frac{2}{27}$.
De même, la probabilité qu'il efface un point de la face à 3 points est égale à $\frac{3}{27}$ et ainsi de suite.
Donc, la probabilité que Harry efface un point de la face à 2 points puis que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points à la suite d'un lancer est $\frac{2}{27} \times \frac{2}{3}$ (puisque 4 faces portent un nombre impair de points et 2 faces portent un nombre pair de points).
De même, la probabilité que Harry efface un point de la face à 3 points puis que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points à la suite d'un lancer est égale à $\frac{3}{27} \times \frac{1}{3}$.
On continue de la même façon pour obtenir la probabilité que la face supérieure du cube porte un nombre impair de points à la suite d'un lancer après que Harry ait effacé un point :

$$\frac{2}{27}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{27}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{27}\times\frac{2}{3}+\frac{5}{27}\times\frac{1}{3}+\frac{6}{27}\times\frac{2}{3}+\frac{7}{27}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{12}{27}+\frac{1}{3}\times\frac{15}{27}=\frac{13}{27}$$

6. Généreux distributeur automatique

Une machine fonctionne de la manière suivante :

Si on introduit un jeton bleu, la machine renvoie 5 jetons rouges ; si on introduit un jeton rouge, la machine renvoie 5 jetons bleus.

1. On dispose d'un (un seul) jeton bleu. Est-il possible, en un nombre fini de manœuvres, d'obtenir un nombre de jetons bleus égal au double du nombre de jetons rouges?
2. Même question en commençant avec deux jetons bleus (et rien d'autre) ?
3. On dispose d'un (un seul) jeton bleu. Est-il possible d'obtenir un nombre de jetons bleus égal au nombre de jetons rouges ?
4. Même question en commençant avec deux jetons bleus.

Faisons quelques essais pour pénétrer le problème :

Action	**Effectif bleu**	**Effectif rouge**		**Action**	**Effectif bleu**	**Effectif rouge**
	1				2	
Bleu	0	5		Bleu	1	5
Rouge	5	4		Rouge	6	4
Bleu	4	9		Bleu	5	9
Rouge	9	8		Rouge	10	8
Rouge	14	7		Rouge	15	7
				Rouge	20	6
				Rouge	25	5
				Rouge	30	4
				Bleu	29	9
				Bleu	28	14

On considère n manœuvres de ce jeu lors desquelles on a introduit k fois un jeton bleu et $n-k$ fois un jeton rouge, n et k étant des entiers positifs tels que $k \leq n$

1. Si on commence avec un seul jeton bleu

Le nombre de jetons bleus est donc $1-k+5(n-k) \;=\; 5n-6k+1$

Le nombre de jeton rouge est $5k-(n-k)=6k-n$

On cherche à résoudre l'équation $5n-6k+1=2(6k-n)$ ou $18k-7n=1$

On recherche des multiples de 18 et 7 dont la différence est égale à 1, $36=18\times 2$ et $35=7\times 5$ conviennent, ce qui correspond à 5 manœuvres comportant 2 introductions de jetons bleus donc 3 de jetons rouges. Dit comme cela, il semble que l'ordre des introductions n'ait pas d'incidence. Le seul interdit est de placer dans la machine un jeton d'une couleur qu'on n'a pas ou qu'on n'a plus.

2. On peut s'imaginer garder un des jetons bleus et faire comme si on partait avec un seul… deux fois. Il suffit de répéter les manœuvres précédentes c'est-à-dire d'effectuer 10 manœuvres dont 4 consistent à introduire un jeton bleu et 6 un jeton rouge.

3. Cela conduit à l'équation $5n-6k+1=6k-n$ soit $12k-6n=1$ soit $6(k-n)=1$

Le membre de gauche est un multiple de 6, il ne peut être égal à 1.

On en déduit que le problème n'admet pas de solution.

4. On aboutit à l'équation $12k-6n=2$

Le membre de gauche est un multiple de 6, il ne peut être égal à 2.

On en déduit que le problème n'admet pas de solution.

7. Superstition

Un nombre entier, écrit dans le système décimal, est dit « malchanceux » si les chiffres utilisés pour l'écrire ne peuvent être que 1 ou 3 et si la somme de ses chiffres est 13. Combien y a-t-il de nombres *malchanceux ?*

Raisonnons selon le nombre de chiffres utilisés :

13 chiffres	11 chiffres	9 chiffres	7 chiffres	5 chiffres
Treize « 1 »	Dix « 1 » et un « 3 »	Sept « 1 » et deux « 3 »	Quatre « 1 » et trois « 3 »	Un « 1 » et quatre « 3 »
Une seule possibilité	*11 possibilités*	*9 possibilités pour un des « 3 », 8 pour le second mais les rôles sont interchangeables*	*7 possibilités pour le premier « 3 », 6 pour le deuxième, cela fait 21 et il reste 5 places pour le troisième, cela fait 105 mais il y a aussi interchangeabilité*	*5 possibilités*
		36 possibilités	*35 possibilités*	
1	11	36	35	5

Au total, 88 nombres malchanceux.

8. La Nature est bonne, par définition…

Le mathématicien italien Vito Volterra (1860-1940) et le mathématicien des États-Unis Alfred James Lotka ont formulé, indépendamment, et 1925 et 1926, les équations de prédation qui constituent ce qu'on appelle le « modèle proie-prédateur ».

Sur une île particulièrement isolée cohabitent deux espèces animales : des lapins, dont le nombre double à chaque printemps, et des renards, dont le nombre double à chaque automne, et qui mangent chacun un lapin entre le printemps et l'automne. Quand un renard n'a pu manger un lapin, il meurt.

C'est l'hiver. Il y a sur l'île 24 lapins et deux renards.

1. Combien y aura-t-il de lapins et de renards sur l'île dans exactement deux ans ?
2. Dans dix ans ?
3. Allons-nous vers l'extinction des deux espèces sur l'île ?

1. En un an, le nombre de renards double tant qu'il reste supérieur à celui des lapins. Dans un an, il y aura 4 renards. Deux de ces renards auront mangé chacun un lapin, dont l'effectif passera donc à $48 - 2 = 46$. L'année suivante, chacun des quatre renards mange un lapin. L'effectif des lapins passe à $92 - 4 = 88$ et celui des renards à 8.

Induction : Si on appelle a_n le nombre de lapins l'année n et b_n le nombre de renards, tant qu'il reste assez de lapins pour nourrir les renards, on peut écrire $a_{n+1} = 2a_n - b_n$ et $b_{n+1} = 2b_n$. La multiplication exponentielle des renards permet d'écrire (pour n assez petit) $b_n = 2^{n+1}$ et donc $a_{n+1} = 2a_n - 2^{n+1}$.

Appliquons cette égalité aux premiers rangs : $a_1 = 2a_0 - 2$, puis $a_2 = 2a_1 - 4$.

2. Un tableur est utilisé pour répondre aux questions suivantes. Il montre que les populations ont d'abord cru… pour leur malheur.

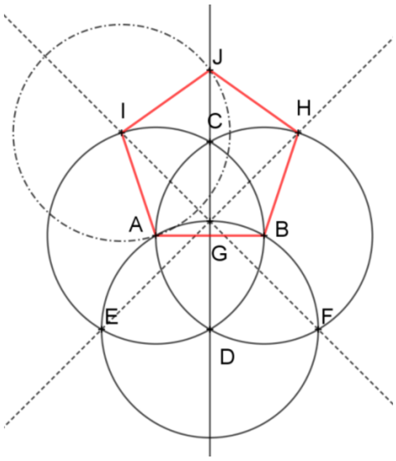
Année	Lapins	Renards	5	608	64	…	…	…
0	24	2	6	1152	128	20	3948544	2146304
1	46	4	7	2176	256	21	5750784	4292608
2	88	8	8	4096	512	22	7208960	8585216
3	168	16	9	7680	1 024	23	5832704	17170432
4	320	32	10	14336	2 096	24	-5505024	34340864

Constructions, aires et volumes

Constructions, aires et volumes

1. Un pentagone régulier

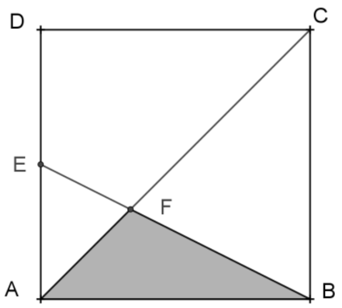
Albrecht Dürer, peintre, graveur et mathématicien allemand (1471-1528) donne, dans l'ouvrage « Unterweysung der Messung », une construction d'un pentagone régulier :



« *À l'aide d'un compas à ouverture constante, décris deux cercles sécants tels que l'un passe par le centre de l'autre. Joins les deux centres* A *et* B *par une ligne droite. Ce sera la longueur d'un côté du pentagone. Les points d'intersection des deux cercles, désigne-les en haut par* C *et en bas par* D *et trace une ligne droite* (CD). *Prends alors le compas à ouverture constante et trace le cercle de centre* D *passant par* A *et* B. *Ce cercle coupe les deux premiers respectivement en* E *et* F *et la droite* (CD) *en* G. *Les droites* (FG) *et* (EG) *coupent les deux premiers cercles en* I *et* H *respectivement. Le point* J, *intersection (deuxième) du cercle de centre* I *passant par* A *avec la droite* (CD) *est le dernier sommet du pentagone.*

Ce pentagone a effectivement tous ses côtés de la même longueur, mais est-il bien inscriptible dans un cercle ?

L'égalité des longueurs des segments [AB], [AI], [BH], [IJ] et [JH] est acquise par construction (les cercles de centres A, B et I ont le même rayon et la droite (CD) est un axe de symétrie de la figure).



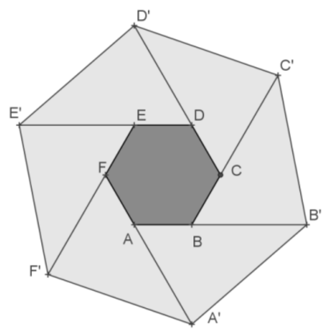
2. Encore un carreau cassé !

Le carré ci-contre a pour côté 108. Le point E est le milieu de [AD] et le point F l'intersection des droites (EB) et (AC). Quelle est l'aire du triangle AFB ?

Appelons H le projeté orthogonal de F sur (AB) et h la longueur FH. Les triangles BHF et BAE sont en situation de Thalès, ce qui fait que $\frac{FH}{EA} = \frac{BH}{BA}$. En remarquant que FH = HA, on écrit cette dernière égalité $\frac{h}{54} = \frac{108-h}{108}$, ce qui conduit à $h = 36$. L'aire du triangle grisé est donc $18 \times 108 = 1\,944$.

3. D'hexagone en hexagone

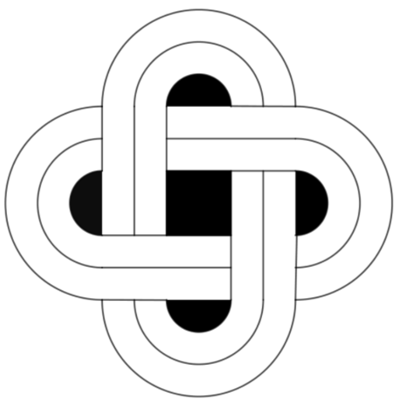
Dans la figure ci-contre, chaque côté de l'hexagone régulier ABCDEF a été prolongé de deux fois sa longueur, pour obtenir un nouvel hexagone régulier A'B'C'D'E'F'. Quel est le rapport des aires de ces hexagones ?



Le triangle DED', par exemple, a un angle de 60° et les côtés de cet angle sont le double l'un de l'autre. Il s'agit donc d'un « demi triangle équilatéral ». Le segment [D'E] a donc pour longueur $a\sqrt{3}$, si on désigne par a le côté de l'hexagone initial (ou le rayon du cercle circonscrit). L'aire du triangle DD'E' est donc $a\sqrt{3} \times \frac{3a}{2}$. … C'est-à-dire exactement l'aire de l'hexagone initial. Le rapport des deux aires est 7

4. Nœud de Salomon

Des mosaïques romaines, par exemple à Clermont-Ferrand et Dax, utilisent le motif ci-contre, dit « nœud de Salomon ». Ici, la largeur des boucles blanches est la moitié du côté du carré central et elles s'achèvent par des demi-cercles. Quel est le rapport de l'aire de la surface « blanche » à l'aire de la surface « noire » ?

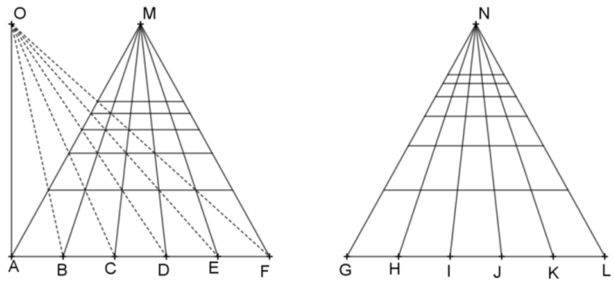


Appelons c le côté du carré. On distingue dans la figure :

1. Quatre demi-disques noirs de rayon $\frac{c}{2}$. Leur aire totale est $2\pi\frac{c^2}{4} = \pi\frac{c^2}{2}$.
2. Un carré noir d'aire c^2.
3. Un carré de côté $3c$, d'aire $9c^2$ et quatre demi-cercles de rayon $3\frac{c}{2}$, d'aire totale $2\pi\frac{9c^2}{4} = \frac{9c^2}{2}\pi$, dans lesquels se dessinent les parties noires.

L'aire noire est donc $c^2 + \pi\frac{c^2}{2} = c^2\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$ et la blanche $9c^2\left(1+\frac{\pi}{2}\right) - \pi\frac{c^2}{2} - c^2 = 8c^2\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$. Leur rapport est donc 8 indépendant du côté du carré.

5. Renaissance man



La construction légitime La construction par homothéties

Écrivain, philosophe, peintre, mathématicien (cryptanalyste), théoricien de la peinture (*de Pictura, 1436*) et de la sculpture (*de Statua, 1464*), réputé pour la qualité de sa conversation et ses capacités physiques, Leon-Battista Alberti (1404-1472) critique, dans *de Pictura*, les habitudes des peintres qui figurent un carrelage plan en réduisant l'écart d'une horizontale à l'autre d'un facteur $\frac{2}{3}$, technique à laquelle il oppose la *construction légitime* fondée sur l'alignement des diagonales.

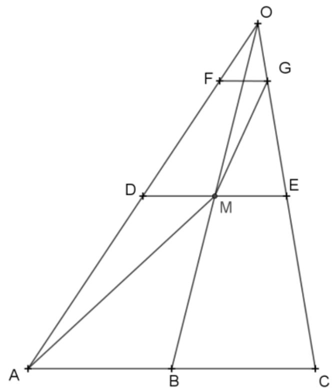
On peut en effet douter que la somme des hauteurs des carrés soit égale à la hauteur de l'ensemble.

1. À l'aide de la figure ci-contre, montrer qu'en effet le rapport $\frac{2}{3}$ ne garantit pas cet alignement.

2. Supposons que les « carrés » de la première ligne aient pour hauteur 1. Le « carrés » des lignes suivantes ont alors pour hauteur $\frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3$, etc.

Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x, on a : $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (les premiers exemples suffiront…) En déduire que la hauteur h de l'ensemble comportant n lignes devrait vérifier

$$1 - \frac{h}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

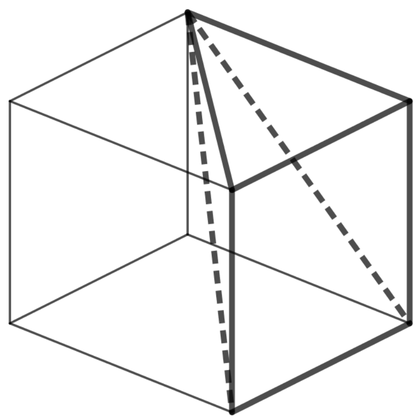


1. Soit N le point d'intersection de (GM) et (AB). Les triangles GME et GNC sont en situation de Thalès. Ce qui impose que $CN = \frac{3}{2}EM$. Si on veut que $N = A$, il est nécessaire que $CA = \frac{3}{2}EM$.

6. Détermination du volume de la sphère

Perdues, retrouvées, partiellement effacées (le *palimpseste d'Archimède*), reperdues, il reste peu de pièces authentiques des œuvres d'Archimède (vers −287 – vers −212).

a. Détermination du volume d'un cône



1. Tout cube peut être décomposé en trois pyramides de volumes identiques. Montrer cette égalité à l'aide de la figure ci-contre.

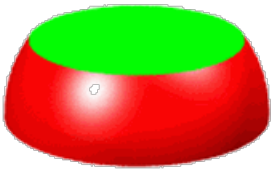
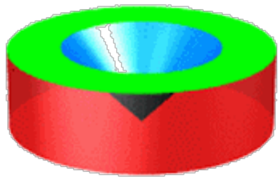
2. Deux solides de même « base » plane et de même hauteur ont même volume. Ce résultat s'inspire du résultat plan : deux triangles de même « base » et de même « hauteur » (il faut bien choisir les rôles) ont la même aire. Le procédé consiste à considérer des « coupes » horizontales des solides sera repris par Bonaventura Cavalieri (mathématicien italien, 1598-1647) comme « méthode des indivisibles ».

3. Il s'ensuit la formule $V = \frac{1}{3}Bh$ donnant le volume d'une pyramide.

4. On « identifie » le cône à une pyramide…

b. Comparaison des volumes d'une sphère et d'un cône de même rayon et de hauteur le diamètre de la sphère.

La demi-boule de rayon R et le cylindre creusé par le cône sont coupés par un plan horizontal situé à la hauteur x. On étudie l'aire des surfaces intersections de chacun des objets avec le plan.

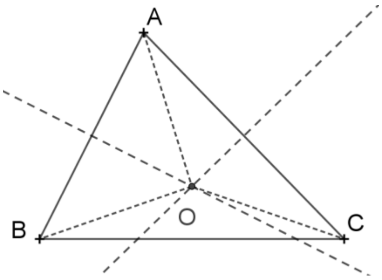
			

Images X. Hubaut U.L.B.

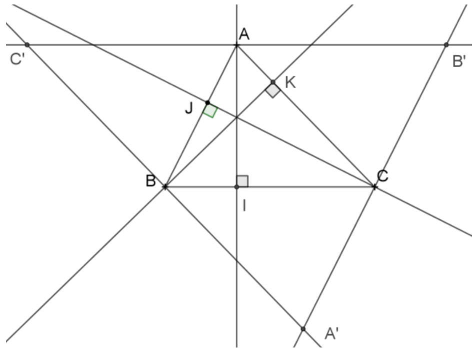
1. Calculer l’aire du disque de gauche
2. Calculer l’aire de la couronne de droite
3. Conclure que le volume de la demi-sphère est la différence entre le volume du cylindre et celui du cône. Conclure.

Annexe : droites remarquables du triangle

Médiatrices

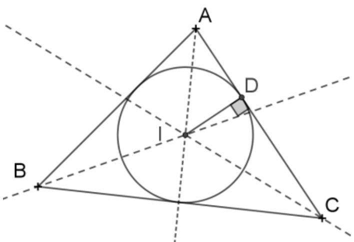


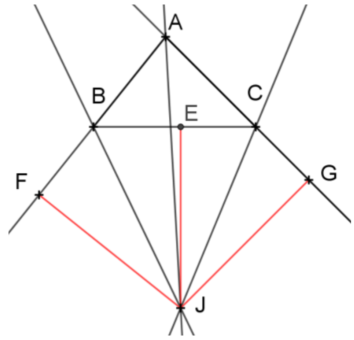
Hauteurs



Deux **médiatrices** de côtés d'un triangle sont nécessairement sécantes. L'égalité des distances de leur point d'intersection O aux sommets du triangle montre que ce point appartient à la troisième. Le cercle de centre O passant par A passe aussi par B et C. On l'appelle ***cercle circonscrit au triangle*** *ABC.* Les **hauteurs** du triangle ABC sont perpendiculaires aux parallèles menées respectivement par A, B et C aux côtés du triangle. Par construction, ABA'C, BCB'A et CAC'B sont des parallélogrammes, et donc les hauteurs de ABC sont les médiatrices de A'B'C'. Elles sont concourantes. Les point de concours est appelé ***orthocentre du triangle*** *ABC.*

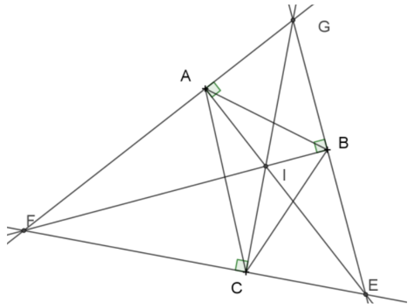
Bissectrices





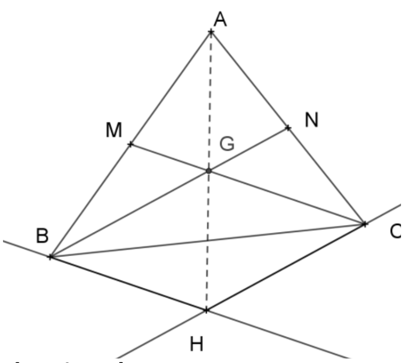
On peut utiliser pour les **bissectrices** un argument semblable à celui utilisé pour les médiatrices : tout point de la bissectrice d'un angle étant équidistant des côtés de l'angle (propriété caractéristique), le point d'intersection de deux bissectrices appartient à la troisième. Ce point noté ici I est équidistant des côtés du triangle ABC : le cercle centré en I et tangent à un des côtés (donc aux autres) est appelé ***cercle inscrit dans le triangle ABC****.* Le même raisonnement vaut pour deux bissectrices extérieures et une bissectrice intérieure : le point J est équidistant lui aussi des côtés du triangle. Le cercle de centre J passant par son projeté E sur (BC) passe aussi par ses autres projetés F et G. C'est le ***cercle exinscrit dans l'angle A du triangle ABC****.*

Bissectrices pour toi, hauteurs pour moi



Deux bissectrices extérieures du triangle ABC sont sécantes en un point par lequel passe la bissectrice intérieure du troisième angle. Les hauteurs du triangle EFG sont donc les bissectrices intérieures du triangle ABC. Le triangle ABC, dont les sommets sont les pieds des hauteurs de EFG, est appelé ***triangle orthique du triangle EFG***.

Changement radical avec les médianes



Menons par C la parallèle à la médiane issue de B et par B la parallèle à la médiane issue de C. Ces deux droites sont sécantes en H (il faudrait montrer qu'il est impossible que deux médianes d'un triangle soient parallèles…). Pour le triangle AHC, la droite (BN), parallèle à un côté passant par le milieu d'un autre, est une « droite des milieux ». Même chose pour le triangle ABH et la droite (CM). Les droites (CM) et (BN) passent donc par le milieu G du segment [AH]. Comme le quadrilatère BHCG est un parallélogramme (on l'a construit avec des parallèles… mais on ne savait pas que le sommet opposé à H appartient à la droite (AH)), ses diagonales ont même milieu, et donc (AG) passe par le milieu de [BC] : les médianes sont concourantes. Leur point de concours est appelé ***centre de gravité du triangle ABC.***

À méditer : les stratégies différentes utilisées pour ces démonstrations illustrent le fait que la notion de milieu a plus à voir avec le parallélisme et les intersections de droites qu'avec les distances. C'est une notion *affine.*