Thème : Nombres

Exercice 1 Une série sans carré parfait

On donne deux entiers premiers, p et q, et on suppose que $p+q^2$ est un carré parfait. Montrer que la suite de terme général p^2+q^n ne contient aucun carré parfait.

On exploite l'hypothèse : supposons qu'il existe un entier positif a tel que $p+q^2=a^2$. On peut alors écrire $p=(a+q)(a-q)$, et comme p est premier, l'un des deux facteurs et 1 ou -1 et l'autre p ou $-p$. $a+q$ est positif et supérieur à $a-q$. Il ne reste que $a+q=p, a-q=1$. D'où $p=2q+1$.
Supposons que p^2+q^n soit un carré parfait. Posons $p^2+q^n=b^2$, ou encore $(p+b)(b-p)=q^n$. Comme q est premier, les diviseurs de q^n sont des puissances de q. Il existe des entiers i et j tels que $i<j$ et $b-p=q^i$ et $b+p=q^j$. En soustrayant membre à membre, on obtient $2p=q^i\left(q^{j-i}-1\right)$.
Si $i\neq 0$, on en déduit que q divise $2p$. Mais $2p=4q+2$, donc q divise 2, donc $q=2$ et $p=5$.
De $10=2^i\left(2^{j-i}-1\right)$, on déduit $i=1$ et $5=2^{j-i}-1$, ou encore $2^{j-i}=6$, impossible. Pas de solution de ce côté.
Si $i=0$, $2p=q^n-1$. Ou encore $4q+3=q^n$. D'où $q(q^{n-1}-4)=3$ et donc q divise 3. Doc $q=3$ et $q^{n-1}=5$. Il n'y a pas de solution ici non plus.

Exercice 2 On fait le produit, on prend son inverse, on somme tout…

Étant donné un entier naturel n, on considère l'ensemble $\{1,2,3,\ldots,n-1,n\}$ et les 2^n-1 parties non vides de cet ensemble. Pour chacune de ces parties, on fait le produit de ses éléments. On additionne enfin tous les inverses des produits obtenus.
Par exemple, pour $n=4$, il y a 15 parties non vides et les calculs proposés figurent dans le tableau suivant :

Eléments	1, 2, 3, 4	1, 2, 3	1, 2, 4	1, 3, 4	2, 3, 4	1, 2	1, 3	1, 4	2, 3	2, 4	3, 4	1	2	3	4
Produit	24	6	8	12	24	2	3	4	6	8	12	1	2	3	4
Inverse	1/24	4/24	3/24	2/24	1/24	12/24	8/24	6/24	4/24	3/24	2/24	24/24	12/24	8/24	6/24
Cumul	1/24	5/24	8/24	10/24	11/24	23/24	31/24	37/24	41/24	44/24	46/24	70/24	82/24	90/24	96/24

Dans cet exemple, on a trouvé que la somme des inverses des produits des éléments des parties non vides est égale au cardinal de l'ensemble. Ce résultat est-il général ?

<u>Première proposition de solution</u>
Cet exemple et une étude des cas $n=1, n=2, n=3$ incite à tenter une démonstration par récurrence.
Supposons donc que pour un certain entier n la propriété soit vraie. Les parties non vides de l'ensemble $\{1,2,3,\ldots,n-1,n,n+1\}$ se répartissent en trois catégories :
- Les parties non vides de $\{1,2,3,\ldots,n-1,n\}$;
- les parties unions d'une partie non vide de $\{1,2,3,\ldots,n-1,n\}$ et de $\{n+1\}$;
- la partie $\{n+1\}$.

La somme correspondant aux parties du premier type est n, celle correspondant aux parties du deuxième type est $\frac{1}{n+1}\times n$ (on a simplement mis $\frac{1}{n+1}$ en facteur), et la dernière « somme » est $\frac{1}{n+1}$. Le total est donc $n+1$. On peut donc conclure que le résultat est général.
<u>Deuxième proposition de solution</u>
Pour un ensemble dont les éléments sont $a,b,c,\ldots,l,m$ la somme des inverses des produits considérée peut être écrite $\frac{1}{a\times b\times c\times\ldots\times l\times m}+\frac{1}{b\times c\times\ldots\times l\times m}+\cdots+\frac{1}{a\times b}+\frac{1}{b\times c}+\cdots+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\cdots+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}$. Cette somme peut être incomplètement factorisée en $\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{b}+1\right)\left(\frac{1}{c}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{l}+1\right)\left(\frac{1}{m}+1\right)-1$. Une démonstration par récurrence serait peut-être utile ici aussi. Dans le problème qui nous concerne, on obtient un produit télescopique $\left(\frac{1+1}{1}\right)\left(\frac{1+2}{1+1}\right)\left(\frac{1+3}{2+1}\right)\left(\frac{1+4}{3+1}\right)\ldots\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)$ égal à $n+1$, duquel il convient d'ôter 1, comme dit plus haut…

Exercice 3 Un degré de plus que le voisin, c'est tout

On demande quels sont les entiers n pour lesquels il existe un polygone convexe à n côtés dont les mesures en degrés des angles sont des entiers consécutifs.

On raisonne par analyse - synthèse. On suppose qu'on a un entier n tel qu'un polygone comme celui étudié existe, on cherche des conditions sur n pour restreindre la recherche.
La somme des mesures en degré des angles d'un polygone convexe à n côtés est $S = (n-2) \times 180$. Si on appelle x la mesure en degrés du plus grand des angles, les autres forment une suite arithmétique de premier terme $x-(n-1)$ et la somme S s'écrit aussi $S = nx - \frac{n(n-1)}{2}$ (on a sommé les différences…)
Il vient donc $(n-2) \times 180 = nx - \frac{n(n-1)}{2}$. De $(180-x)n + \frac{n(n-1)}{2} = 360$, on déduit (pour limiter l'étude, dans un premier temps) que $n(n-1) \leq 720$, qui conduit à $n \leq 27$.
On a donc $3 \leq n \leq 27$. Il reste du travail…
1. Ou bien n est pair et $n(360-2x+n-1) = 720$. n est un diviseur de 720, mais pas de 360.

$$720 = 2 \times 360 = 3 \times 240 = 4 \times 180 = 5 \times 144 = 6 \times 120 = 8 \times 90 = 9 \times 80 = 10 \times 72 = 12 \times 60$$
$$= 15 \times 48 = 16 \times 45 = 18 \times 40 = 20 \times 36 = 24 \times 30$$
$$360 = 2 \times 180 = 3 \times 120 = 4 \times 90 = 5 \times 72 = 6 \times 60 = 8 \times 45 = 9 \times 40 = 10 \times 36 = 12 \times 30 = 15 \times 24$$
$$= 18 \times 20$$

Parmi les diviseurs inférieurs à 27, il n'y a que 16. De $360 - 2x + 16 - 1 = 45$, on déduit $x = 165$. Les 16 mesures en degrés des angles s'échelonnent de 150 à 165 (cela ne nous donne pas les longueurs des côtés…)
2. Ou bien n est impair et $n-1$ est donc pair. n est donc un diviseur impair de 360 compris entre 3 et 27. Les candidats sont : 3, 5, 9, 15. Les suites de mesures associées sont :
$(59, 60, 61), (106, 107, 108, 109, 110), (136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144),$
$(149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163)$
Solution bis :
Dire que les angles (internes) sont des entiers consécutifs revient à dire que les angles externes sont des entiers consécutifs. Or la somme des angles externes d'un polygone convexe vaut 360°.
Analyse : En notant a le plus petit angle externe ($a = 180 - x$ dans la 1re solution) on doit avoir :

$$n.a + \frac{n(n-1)}{2} = 360. \text{ (E1)}$$

- Pour n impair (i.e. (n-1)/2 entier) cela implique que n divise 360, et donc $n \in \{3,5,9,15,45\}$.
- Pour n pair, (E1) donne $n(2a+n-1) = 720$ et donc $(2a+n-1)$ est un diviseur impair de $720=16.3^2.5$ et donc $16|n$. Donc $n \in 16 \times \{3,5,9,15,45\}$.

En utilisant (E1) on a $n(n-1) < 720$, donc $(n-1)^2 < 720$, et donc $n < 27$. On a donc nécessairement :
$n \in \{3,5,9,15,16\}$ et on vérifie (synthèse) que ces valeurs donnent bien des solutions avec $a = \frac{360}{n} - \frac{(n-1)}{2}$.
Si on ne fait pas ainsi, à la fin on peut vérifier que les cas comme n=45 donnent des angles supérieurs à 180°.

Exercice 4 Racines

Quelle est la partie entière du nombre $N = \sqrt{2\,020 + \sqrt{2\,019 + \sqrt{\ldots + \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}}$?

On a, pour commencer : $N^2 > 2\,020 + \sqrt{2\,019}$, qui fournit $N > 45$.

Par ailleurs, on peut démontrer que, pour tout entier n, $\sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} \leq \sqrt{n} + 1$. Cette démonstration se fait par récurrence.
On en conclut, dans le cas $n = 2\,020$, $N \leq \sqrt{2\,020} + 1 \leq 46$
Finalement la partie entière de N est 46.

Exercice 5 Diviseurs positifs impairs d'un entier
Soit n un entier naturel et soit $k(n)$ le nombre de manières d'écrire n comme la somme d'un ou plusieurs entiers naturels consécutifs. Montrer que $k(n)$ est égal au nombre de diviseurs positifs impairs de n.

Dire que n est somme d'entiers consécutifs, c'est dire qu'il existe des entiers x et p tels que :

$$n = x + (x+1) + (x+2) + \cdots + (x+p-2) + (x+p-1) = px + \frac{p(p-1)}{2}$$

On a donc : $n = \frac{p}{2}(2x + p - 1)$ si p est pair, $n = p\left(x + \frac{p-1}{2}\right)$ si p est impair.
On a ainsi associé un diviseur impair de n ($2x + p - 1$ si p est pair, $x + \frac{p-1}{2}$ si p est impair) à chaque somme d'entiers consécutifs de somme n.
Reste à montrer que deux diviseurs impairs de n sont associés à deux sommes différentes.
Soit d un diviseur impair de n. D'après ce qui précède, s'il est associé à une somme d'entiers consécutifs en nombre impair, il existe des entiers x et p tels que $d = p$ et $x + \frac{p-1}{2} = \frac{n}{d}$ (on s'autorise exceptionnellement cette écriture d'un entier sous forme « fractionnaire », c'est dangereux). On a alors $x + \frac{d-1}{2} = \frac{n}{d}$, d'où $x = \frac{n}{d} - \frac{d-1}{2}$
Cette soustraction n'est possible que si $\frac{n}{d} > \frac{d-1}{2}$.
Si d est associé à une somme d'entiers consécutifs en nombre pair, il existe des entiers x et p tels que $2x + p - 1 = d$ et $\frac{n}{d} = \frac{p}{2}$. On a alors $2x + 2\frac{n}{d} - 1 = d$ et donc $2x = d + 1 - 2\frac{n}{d}$, ce qui cette fois exige que $\frac{d+1}{2} > \frac{n}{d}$.
Les deux conditions auxquelles nous avons abouties sont contradictoires, pour un diviseur impair de n. Une seule des deux peut être satisfaite, et l'est. Ce qui résout le problème.

Exercice 6 Encore des fractions égyptiennes
L'entier naturel n est tel qu'il existe exactement 101 couples d'entiers naturels (a, b) tels que
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n}$$
Montrer que n est un carré parfait.

La réduction au même dénominateur donne $an + bn - ab = 0$ et la factorisation forcée $(a - n)(b - n) = n^2$.
Les deux facteurs du premier membre sont positifs.
On réalise ainsi une bijection entre l'ensemble des diviseurs de n^2 et l'ensemble des couples cherchés.
Rappel : si le décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre s'écrit $N = p^\alpha q^\beta \dots r^\gamma s^\delta$, le nombre de diviseurs de N est $(\alpha + 1)(\beta + 1) \dots (\gamma + 1)(\delta + 1)$. Un nombre ayant un nombre premier de diviseurs est donc une puissance d'un nombre premier.
Il existe donc un nombre premier p tel que $n^2 = p^{100}$, et donc tel que $n = p^{50}$

Thème : Dénombrement, organisation, probabilités

Exercice 1 Ça monte ou ça descend

Quelle est la somme de tous les nombres dont l'écriture décimale est une suite strictement croissante ou strictement décroissante de chiffres ?

Commençons par remarquer que ces nombres s'écrivent dans le système décimal avec au plus 9 chiffres (cas croissant) ou 10 chiffres (cas décroissant), car le chiffre le plus à gauche ne peut être 0.

Une idée est de faire correspondre à chaque nombre a s'écrivant avec k chiffres en ordre croissant un nombre b dont les chiffres, en ordre décroissant, seraient les compléments à 9 des chiffres de a (cela ferait des sommes deux à deux ne s'écrivant qu'avec des 9). Appliquons cette idée de différentes façons :

- À tout nombre « décroissant » s'écrivant avec $k+1$ chiffres et dont le premier chiffre à gauche est un 9 on peut associer un nombre « croissant » de k chiffres tel que leur somme soit $999 \dots 99 = 10^{k+1} - 1$;
- À tout nombre « décroissant » s'écrivant avec k chiffres et dont le premier chiffre à gauche n'est pas 9, on peut associer un nombre « croissant » de k chiffres tel que leur somme soit $999 \dots 99 = 10^{k} - 1$;
- À tout nombre « décroissant » de k chiffres dont le chiffre des unités n'est pas 0, on peut associer un nombre « croissant » de k chiffres tel que leur somme s'écrive $111 \dots 110 = \frac{10}{9}(10^k - 1)$ *Ici on complète à 10, pas à 9*

Appelons D_k la somme des nombres décroissants s'écrivant avec k chiffres dont le plus à gauche n'est pas un 9, D'_k la somme des nombres décroissants s'écrivant avec $k+1$ chiffres dont le plus à gauche est un 9, D''_k la somme des décroissants s'écrivant avec k chiffres et dont le chiffre des unités n'est pas 0, et enfin C_k la somme des nombres « croissants » s'écrivant avec k chiffres. Observons que, pour k donné, il y a $\binom{9}{k}$ nombres « croissants » s'écrivant avec k chiffres. Les associations que nous venons de faire conduisent à :

$$C_k + D_k = \binom{9}{k}(10^k - 1), C_k + D'_k = \binom{9}{k}(10^{k+1} - 1) \text{ et } C_k + D''_k = \binom{9}{k}\frac{10}{9}(10^k - 1)$$

Comme, d'autre part, la somme de tous les décroissants est égale à la somme des décroissants débutant par un 9 et des décroissants ne débutant pas par un 9, et qu'elle est aussi égale à la somme des décroissants dont le chiffre des unités n'est pas 0 et de cette même somme multipliée par 10. Si on appelle C la somme des croissants et D la somme des décroissants :

$$2C + D = \sum_{k=0}^{9} C_k + D_k + \sum_{k=0}^{k=9} C_k + D'_k \text{, et } C + \frac{1}{11}D = \sum_{k=0}^{k=9} C_k + D''_k$$

L'application de la formule du binôme conduit à

$$\begin{cases} 2C + D = 11^{10} - 2^{10} \\ C + \dfrac{1}{11}D = \dfrac{10}{9}(11^9 - 2^9) \end{cases}$$

On cherche $C + D$, on trouve 25 617 209 040. Mais ce n'est pas tout-à-fait le résultat cherché, car les nombres s'écrivant avec un seul chiffre ont été comptés comme croissants et comme décroissants. Le résultat est donc :

25 617 208 995

Exercice 2 Sectarisme

Une secte, forte au départ de $2n$ membres, est minée par des questions de « pureté ». À chacune des réunions, un vote est organisé dans le but d'exclure tout membre ne réunissant pas en sa faveur la majorité ($p+1$ s'il reste $2p$ membres ou $2p+1$ membres) des votes des autres membres. Chacun – en dehors de celui qui est sur la sellette – doit s'exprimer par « oui » ou « non ». Les opinions de chacun sur les autres sont figées dans tout le processus.

Au bout de combien de temps la secte aura-t-elle perdu la moitié de ses membres ? En perdra-t-elle encore par la suite ?

Remarquons que si personne n'est exclu lors d'une réunion, le processus prend fin, personne ne sera plus exclu. On raisonne par récurrence à partir de $n = 2$. Si la secte compte 4 membres, au plus 1 est exclu après le premier vote, au plus 1 après le deuxième. Aucune exclusion n'est possible par la suite.

Faisons l'hypothèse que pour tout entier supérieur ou égal à 3 et inférieur à un certain n, sur lequel on ne fait aucune autre hypothèse, toute assemblée de $2n-2$ membres fonctionnant sur ce principe est réduite de moitié après $n-1$ votes.

Considérons une assemblée de $2n$ membres. Un premier vote est organisé. Si personne n'est exclu, personne ne le sera dans la suite. Si un nombre pair $2k$ de membres est exclu, il en reste un nombre pair $2(n-k)$, inférieur évidemment à $2n-2$, et on applique l'hypothèse de récurrence.

Considérons donc le cas où un nombre impair est exclu lors du premier vote. Il reste alors un nombre impair de membres :

- Si chacune des p séances suivantes conduit à l'exclusion d'un nombre pair de membres jusqu'au statu quo (plus personne n'est exclu), l'assemblée compte alors au maximum $2n-1-2p$ membres non exclus. De $2n-1-2p \geq 1$, on déduit $n-p \geq 1$ et donc le processus s'est arrêté en moins de n séances ;
- Si chacune des p séances suivantes se traduit par l'exclusion d'un nombre pair de membres avant qu'une dernière séance n'en exclue un nombre impair supérieur ou égal à 3, le nombre de membres conservés est alors au maximum $2n-1-2p-3 = 2(n-p-2)$. D'après l'hypothèse de récurrence, il faudra au plus $n-p-2$ séances pour achever le processus. Avec les $1+p+1$ séances déjà passées, cela fait au pire n séances à tenir ;
- Enfin, supposons qu'après l'exclusion d'un membre, p séances se concluent chacune par l'exclusion d'un nombre pair de membres et la dernière par l'exclusion d'un membre. Lors de cette séance, $2n-1-2p$ au maximum étaient présents. De nombre impair, $n-p$ au moins ont voté l'exclusion. Cette session étant la dernière, cela signifie que la confiance était établie envers les $n-p-1$ non exclus. Il n'y aura plus d'exclusions. Au total, il y en a eu $1+2p+1$ au minimum et il reste au moins 3 membres. Donc $1+2p+1 \leq 2n-3$, et $p+2 \leq n$.

La démonstration par récurrence est achevée (mieux vaut la relire pour être sûr).

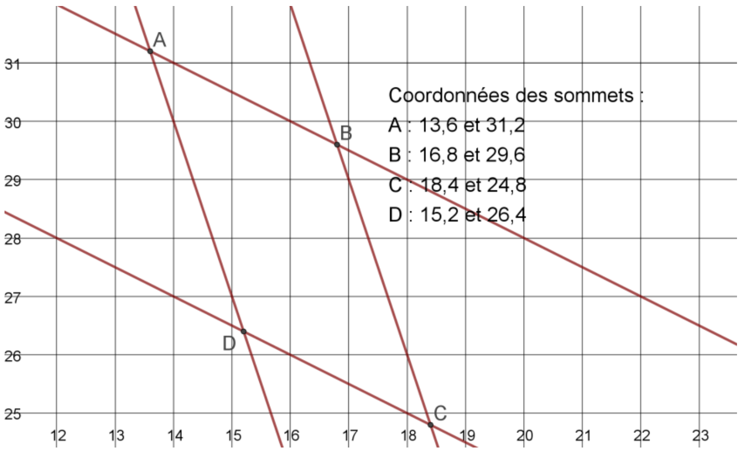
Exercice 3 Couperet et troncature

Mon boucher me fait toujours cadeau des centimes. Par exemple, j'ai pris 300 g de filet à 34,3 euros le kilo, 240 g de viande hachée à 8,6 euros le kilo, et 640 g de blanc de poulet à 12,99 euros le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.
Deux tickets d'anciens achats indiquent :
– 750g de côtelettes, 250g de rôti. Total : 18 euros ;
– 250g de côtelettes, 500g de rôti. Total : 17 euros.
Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti (on donnera toutes les solutions) ?

Notons x le prix du kilogramme de côtelettes et y celui du kilogramme de rôti. En notant $[.]$ la partie entière, les hypothèses indiquées par les tickets sont :

$$\begin{cases} [0{,}75x] + [0{,}25y] = 18 \\ [0{,}25x] + [0{,}5y] = 17 \end{cases}$$

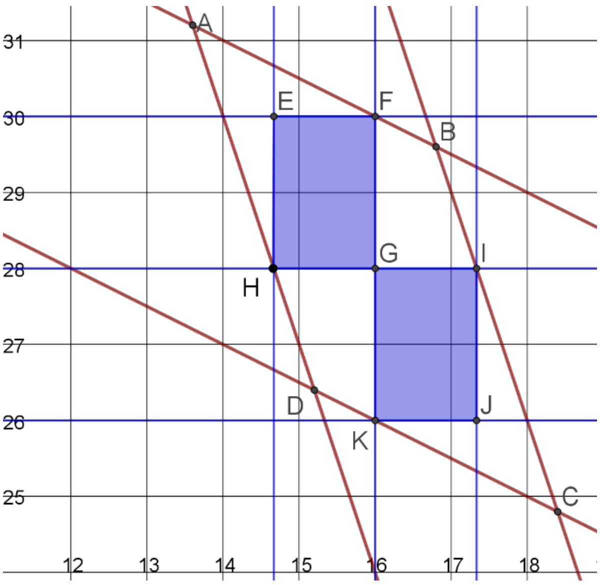
Ces hypothèses entraînent que : $\begin{cases} 18 \leq 0{,}75x + 0{,}25y < 20 \\ 17 \leq 0{,}25x + 0{,}5y < 19 \end{cases}$, ce que nous pouvons traduire graphiquement : sur le graphique suivant, le point de coordonnées (x, y) doit se situer à l'intérieur du parallélogramme défini par les droites d'équations $0{,}75x + 0{,}25y = 18$, $0{,}75x + 0{,}25y = 20$, $0{,}25x + 0{,}5y = 17$, $0{,}25x + 0{,}5y = 19$



Ces conditions sont nécessaires…
Pour le point D, par exemple :
$0{,}75 \times 15{,}2 + 0{,}25 \times 26{,}4 = 18$, évidemment, mais $[0{,}75 \times 15{,}2] = 11$ et $[0{,}25 \times 26{,}4] = 6$ et $11 + 6 \neq 18$.
Il faut donc regarder ce que donnent explicitement les sommes des parties entières pour des intervalles « inspirés » par les inégalités précédentes. On cherche donc à évaluer $[0{,}75x] + [0{,}25y]$ et $[0{,}25x] + [0{,}5y]$ pour x compris entre 13 et 19 et y entre 24 et 31.
On dresse un tableau :

x	12	$13+\frac{1}{3}$	$14+\frac{2}{3}$	16	$17+\frac{1}{3}$	$18+\frac{2}{3}$	19			
$[0{,}75x]$	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**				
$[0{,}25x]$	**3**			**4**						
y	24		26		28		30		31	
$[0{,}5y]$	**12**		**13**		**14**		**15**			
$[0{,}25y]$	**6**				**7**					

On obtient donc $[0{,}75x] + [0{,}25y] = 18$ pour $[0{,}75x] = 11$ et $[0{,}25y] = 7$ ou pour $[0{,}75x] = 12$ et $[0{,}25y] = 6$, et $[0{,}25x] + [0{,}5y] = 17$ pour $[0{,}25x] = 4$ et $[0{,}5y] = 13$ ou $[0{,}25x] = 3$ et $[0{,}5y] = 14$



Cette partie « utile » du parallélogramme est indiquée sur le figure ci-contre.

Plus généralement, ce qu'on vient de faire indique que la condition nécessaire et suffisante, portant sur les prix, qu'on peut obtenir, enferme les prix cherchés dans une réunion de produits d'intervalles (les rectangles) et qu'il est exceptionnel d'obtenir mieux.
Incidemment, tout ordinateur calcule sur des troncatures et des protocoles sont nécessaires pour éviter les erreurs dues à ces incertitudes (norme IEEE 754).

Exercice 4 Carrés pas forcément magiques
On considère dans cet exercice tous les tableaux carrés à 9 cases dans lesquelles sont placés dans un certain ordre tous les entiers de 1 à 9. Par exemple :

1	8	7
9	2	4
6	5	3

À un tel tableau on associe les produits des éléments de ses lignes (56, 72, 90 dans l'exemple ci-dessus) et les produits des éléments de ses colonnes (54, 80, 84 dans l'exemple ci-dessus).
1. *a.* Étant donné un tel tableau, montrer qu'il a au moins une ligne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 72.
b. Donner un tableau de ce type dont les trois lignes ont un produit de leurs éléments inférieur ou égal à 72.
2. Étant donné un tableau de ce type, montrer qu'il a au moins une ligne ou une colonne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 90.

1. *a.* Le produit de tous les nombres figurant dans le carré est $9! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$, qui peut aussi s'écrire $(3 \times 4 \times 6) \times (2 \times 5 \times 7) \times (8 \times 9) = 70 \times 72^2$. Si le produit des éléments de chaque ligne était inférieur ou égal à 71, on aurait $9! \leq 71^3$. Mais $71^3 = 357\,911$ et $70 \times 72^2 = 362\,880$. Ouf !
b. L'exemple est dans la réponse précédente : $3 \times 4 \times 6 = 72$, $2 \times 5 \times 7 = 70$ et $1 \times 8 \times 9 = 72$.
2. Observons l'ensemble des produits possibles de trois nombres entiers distincts compris entre 1 et 9 : la première ligne recense les produits de deux de ces nombres, les lignes suivantes les produits de trois distincts de ces nombres qui ne sont pas produits de deux.

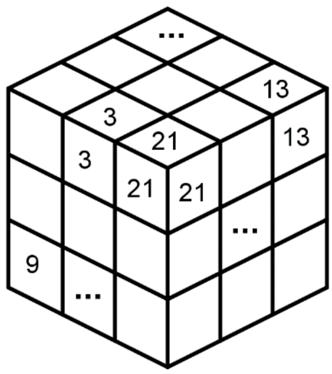
2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	18	20	21	24	27	28	30
32	35	36	40	42	45	48	54	56	63	72									
60	64	70	80	84	90	96	108	112	126	144									
105	120	135	162	168	189	216													
140	160	180	192	216	224	252	288												
210	240	270	280	315	360														
336	378	432																	
392	504																		

Appelons M le maximum des six produits (ligne ou colonne). Supposons que ce produit est obtenu sur la première ligne. Si $M < 90$, le tableau précédent donne les possibilités $84, 80, 72,$ etc.
Si la première ligne donne un produit égal à 84, elle contient le chiffre 7 (et 6 et 2 ou 3 et 4). Une autre ligne contient le chiffre 9, et pour correspondre à un produit inférieur à 90, ou bien 9 est associé à 8 et 1, et dans ce cas $84 \times 72 \times x = 70 \times 72^2$, ce qui donne $x = 60$.

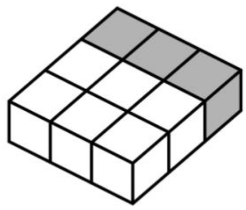
Ou bien 9 est associé à 6 et 1, et dans ce cas $84 \times 54 \times y = 70 \times 72^2$, ce qui donne $y = 80$
Les triplets composant les lignes sont donc, à l'ordre près : $(7, 2, 6)$, $(9, 8, 1)$ et $(5, 4, 3)$ ou $(7, 3, 4)$, $(6, 2, 5)$et$(9, 8, 1)$ ou encore $(7, 3, 4)$, $(8, 2, 5)$et $(9, 6, 1)$. Dans chacun de ces cas, la colonne où apparaît le chiffre 9 ne contient pas 1, si elle contien 2 et 3, une autre colonne a un produit supérieur à 90.

Si la première ligne donne le produit maximum égal à 80, elle est composée de $8, 5$ et 2. Si la ligne contenant 7 donne un produit égal à 63, il reste $3 \times 4 \times 6$ pour la dernière et, comme précédemment, 1 et 9 sont toujours sur la même ligne. Elle ne peut faire mieux, $7 \times 6 = 42$ et 2 est pris sur la ligne précédente.
Si la première ligne donne le produit maximum égal à 72, les autres produits sont 70 et 72 et on parvient à la même conclusion. Comme le maximum ne peut être inférieur à 72, c'est terminé.
L'exemple initial comporte une ligne de produit 90.

Exercice 5 Cube de cubes

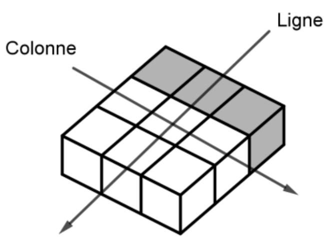


27 cubes élémentaires, numérotés de 1 à 27 aléatoirement, constituent un cube plus grand. La figure ci-contre donne un exemple (il ne faut pas prendre les nombres affichés comme des données). On calcule les sommes des numéros des trois petits cubes composant une même ligne (il y a 27 façons de le faire, longitudinalement à chacun des trois niveaux, transversalement à chacun des trois niveaux, verticalement pour chacune des neuf « piles »).
1. Montrer que, parmi les 27 sommes, il y a nécessairement un nombre pair de sommes impaires.
2. On considère une « tranche » du cube, horizontale ou verticale, et on suppose qu'une des 6 sommes correspondantes est paire (on a grisé les cubes correspondants sur la figure ci-contre, qui donne elle aussi un *exemple*) .



Montrer qu'il y en a nécessairement une autre. Peut-il y avoir 26 sommes impaires ?
3. Peut-il y avoir 24 sommes impaires ?

1. Chaque petit cube intervient dans 3 sommes. La somme des 27 sommes est donc $3 \times (1 + 2 + \cdots + 26 + 27) = 3 \times \frac{27 \times 28}{2} = 1\,134$. Cette somme est paire : elle contient donc un nombre pair de termes impairs.
2. Une somme paire est constituée de trois termes pairs ou de deux termes impairs et un terme pair. Dans le premier cas, il reste dans la « tranche » six cubes, dont trois portent des numéros impairs et sont associés aux cubes grisés pairs sur les lignes perpendiculaires à la ligne grisée mais alors … deux sont dans la même colonne, paire. Dans le second cas, les cubes associés à chaque cube grisé impair sur les lignes perpendiculaires à la ligne grisée doivent être deux pairs ou deux impairs et ceux associés au cube grisé pair doivent être de parités différences, mais alors il y a une colonne qui contient deux impairs et un pair ou trois pairs.

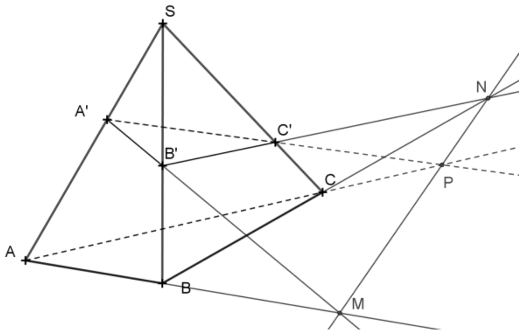


3. Oui, c'est possible. Mettre trois impairs dans chaque niveau, aux mêmes places. Reste à placer cinq cubes impairs (il y a 14 impairs entre 1 et 27), tous au même niveau, niveau où il ne reste plus qu'un cube pair.

Thème : Angles et distances, alignement et concours

Exercice 1 Le théorème de Desargues (pour la beauté de la chose)

Dans le plan, si deux triangles ABC et A'B'C' sont tels que les droites joignant les sommets homologues soient concourantes (ici en S), alors les supports des côtés homologues sont parallèles ou se coupent en des points alignés.

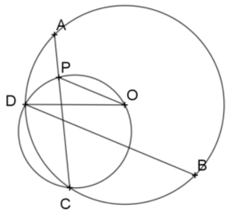


Ça se démontre (même en géométrie analytique, si on veut), mais l'idée de Desargues lui-même est de considérer que la figure ci-contre est la représentation plane d'une figure de l'espace : le tétraèdre SABC est coupé par un plan qui rencontre ses arêtes concourant en S en les points A', B' et C'. Les plans (ABC) et (A'B'C') ont une droite en commun : les points M, N, P sont les points d'intersection des plans (SAB), (SBC) et (SAC) avec cette droite.

Exercice 2 Cordes parallèles

On considère quatre points A, B, C et D situés dans cet ordre sur un cercle de centre O dont [AB] est un diamètre. Le cercle circonscrit au triangle DOC recoupe en P la droite (AC). Montrer que (PO) et (DB) sont parallèles

L'angle $\widehat{POD}$ intercepte l'arc $\widehat{PD}$ du cercle circonscrit au triangle DOC. Il a donc la même mesure que l'angle $\widehat{DCP}$. Mais cet angle $\widehat{DCP}$ intercepte l'arc $\widehat{DA}$ du cercle de centre O, lequel est aussi intercepté par l'angle $\widehat{ABD}$, qui a même mesure que l'angle $\widehat{DCP}$, attendu que le triangle DOB est isocèle de sommet principal O. Nous sommes donc dans la situation des angles alternes-internes et les droites (PO) et (DB) sont parallèles



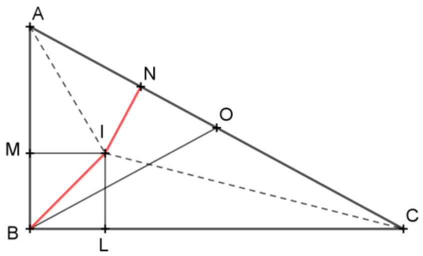
Exercice 3 Origine de l'inégalité

Le rayon R du cercle circonscrit à un triangle ABC et l'aire S de ce triangle satisfont l'inégalité $S \geq R^2$. Prouver que la mesure de chacun des angles du triangle est supérieure à 30° et inférieure ou égale à 90°.

Si on note classiquement a, b, c les longueurs des côtés du triangle et α, β, γ les mesures des angles opposés. On utilise la loi des sinus : $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$. L'aire du triangle s'écrit $S = \frac{1}{2}\, ab \sin \gamma$. Donc $S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$, qui conduit, d'après l'hypothèse, à $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \geq \frac{1}{2}$. Au plus un des trois angles à 1 pour sinus. Donc tous sont supérieurs à $\frac{1}{2}$ et leurs mesures supérieures à 30°. Peut-il y avoir un angle obtus ? S'il en était ainsi, on aurait par exemple $\alpha + \beta < 90$ et $\sin \alpha \sin \beta \geq \frac{1}{2}$. Mais $\sin \alpha \sin(90 - \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$, et comme $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$, le résultat ne peut être supérieur à $\frac{1}{2}$.

Exercice 4 Triangle rectangle

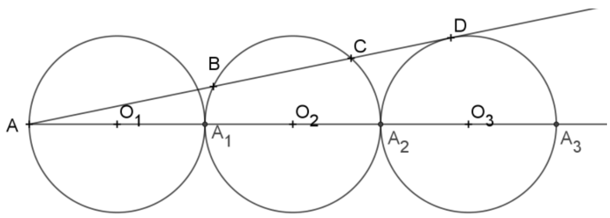
Montrer que le rayon R du cercle circonscrit à un triangle rectangle et le rayon r de son cercle inscrit satisfont $R \geq (1 + \sqrt{2})r$.



Sur la figure ci-contre, le point I est le centre du cercle inscrit dans le triangle, ce qui se traduit par le fait que ILBM est un carré de côté r.
Le point O est le centre du cercle circonscrit, c'est le milieu de l'hypoténuse [AC]. L'aire du triangle ABC peut être écrite de deux façons différentes :
$S = r^2 + 2Rr$ (aire du carré plus deux fois aire de CIA)
$S = \frac{1}{2} R^2 \sin \widehat{\mathrm{BOC}} + \frac{1}{2} R^2 \sin \widehat{\mathrm{BOA}}$ (somme des aires des triangles isocèles AOB et BOC).
Mais les deux sinus étant inférieurs à 1, on obtient $S \leq r^2 + 2Rr$, ce qui conduit au résultat.

Exercice 5 Alignement… de cercles

Sur la figure ci-contre, les points O_1, O_2, O_3 sont alignés sur une demi-droite d'origine A et sont les centres de trois cercles de même rayon R, le cercle de centre O_2 étant tangent aux deux autres.



Une demi-droite issue de A est tangente en D au cercle de centre O_3.
1. Montrer que [AD) coupe le cercle de centre O_2 en deux points B et C. Calculer la distance BC.
2. Les droites (A_1B) et (A_2C) se coupent en P, les droites (A_1C) et (A_2B) se coupent en Q. Quelle est l'orientation de la droite (PQ) ?
3. Plus généralement, on considère maintenant n cercles de même rayon R, de centres les O_i tous alignés et espacés régulièrement sur une demi-droite d'origine A. Une demi-droite d'origine A est tangente en D au cercle de centre O_n et coupe le cercle de centre O_i $(i \geq 2)$ en $B_i$et C_i.
Calculer la longueur B_iC_i.
4. On prend $R = 1$. Montrer que la longueur $L_{n,i} = B_iC_i$ est rationnelle si et seulement si il existe un entier naturel a tel que $n(n-1) - i(i-1) = 4a^2$

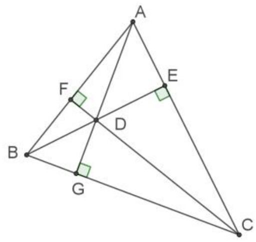
1. La distance de O_2 à la demi-droite [AD) est obtenue comme la distance entre O_2 et son projeté orthogonal H sur [AD). Cette distance est inférieure à O_3D, donc il y a bien deux points d'intersection.
D'après le théorème de Thalès, les droites (O_3D) et (O_2H) étant parallèles, $\frac{O_2H}{R} = \frac{3R}{5R}$ et donc $O_2H = \frac{3}{5}R$.
En appliquant cette fois le théorème de Pythagore dans le triangle O_2BH, rectangle en H, on obtient :
$R^2 = \frac{9}{25}R^2 + \frac{BC^2}{4}$ et donc $BC^2 = \frac{64}{25}R^2$. Finalement $BC = \frac{8}{5}R$.
2. Les droites (A_1C) et (A_2B) Sont respectivement perpendiculaires aux droites (A_1B) et (A_2C) : ce sont des hauteurs du triangle A_1A_2P. (PQ) est la troisième hauteur ; elle est donc perpendiculaire à (AO_2).
3. La situation est la même que précédemment : la distance de O_i à (B_iC_i) est à R ce que AO_i est à AO_n. Si on appelle H_i le projeté orthogonal de O_i sur (B_iC_i) on a :$\frac{O_iH_i}{R} = \frac{2i-1}{2n-1}$
Par application du théorème de Pythagore au triangle $O_iB_iH_i$ on obtient : $L_{n,i} = \frac{4}{2n-1}\sqrt{n(n-1) - i(i-1)}$
4. Ce nombre n'est rationnel que si le nombre situé sous le radical est un carré parfait. Comme ce dernier nombre est pair, il ne peut être que le carré d'un entier pair.

Exercice 6 Ensembles orthocentriques
Le début de cet énoncé peut surprendre. Il faut admettre que la définition du produit scalaire n'introduit pas de cercle vicieux dans la géométrie élémentaire.

Soit A, B et C trois points non alignés et M un point du plan.
1. Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé orthocentre du triangle.
2. Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Montrer que le point K défini par
$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$
est l'orthocentre du triangle.
Dans la suite, à toute partie X du plan non incluse dans une droite, on associe l'ensemble $\mathcal{H}(X)$ des orthocentres des triangles dont les sommets sont des points de X. On dira qu'une partie X du plan est *orthocentrique* si $\mathcal{H}(X)$ est inclus dans X.
3. Déterminer les parties orthocentriques à trois éléments.
4. Déterminer les parties orthocentriques à quatre éléments.
5. Soit X un ensemble de quatre points situés sur un cercle.
a. Montrer que $\mathcal{H}(X)$ se déduit de X par une transformation simple.
b. On pose $Y = \mathcal{H}(X)$. Déterminer $\mathcal{H}(Y)$.

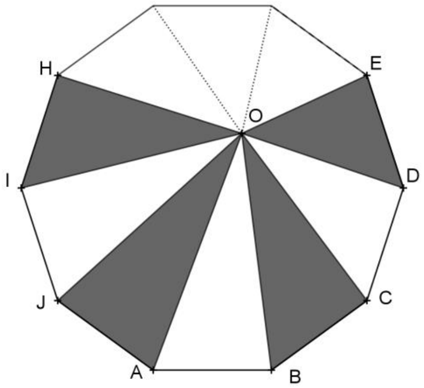
1. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$
Pour un triangle non aplati, deux des hauteurs sont sécantes en un point H. L'orthogonalité de (AH) avec (BC) et de (BH) avec (AC) se traduit par la nullité des deux produits scalaires de l'égalité ci-dessus, et par conséquant du troisième.
2. Calculons, par exemple, $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OK}\right).\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).\overrightarrow{BC} = \vec{0}$, la dernière égalité traduit le fait que O appartoent à la médiatrice de [BC]. On montre de même les autres orthogonalités.
3. Si l'orthocentre du triangle ABC est, par exemple, B, cela signifie que le triangle ABC est rectangle en B. Seuls les riangles rectangles répondent donc au problème.

4. Si, par exemple, le point D est l'orthocentre du triangle ABC, on est dans la situation du *quadrangle orthocentrique* : chacun des quatre points est l'orthocentre du triangle des trois autres.

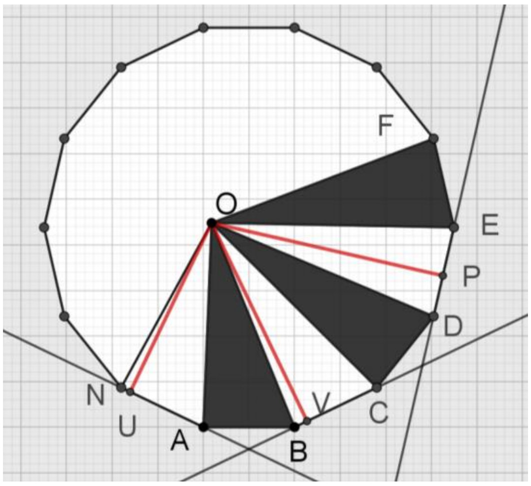


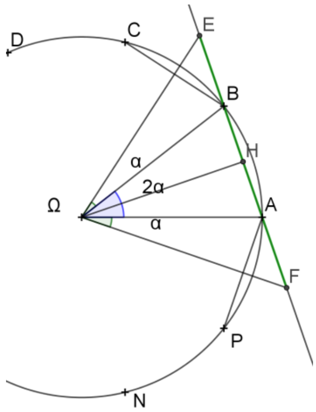
Si un des points, par exemple B, est l'orthocentre du triangle qu'il forme avec deux autres, mettons A et C, le triangle ABC est rectangle en B. Alors, le point D ne peut être aligné avec B et C, ni avec A et B. S'il est aligné avec A et C les riangles BCD et BAD sont rectangles en D, et D est le pied de la hauteur abaissée de B sur l'hypoténuse du triangle ABC. Si le point D est extérieur aux côtés du triangle ABC, le quadrilatère ABCD est un rectangle.
On vérifie qu'on a épuisé le sujet.
5. *a.* Si A, B, C et D sont quatre points d'un cercle de centre O, l'orthocentre K du triangle ABC est défini par $\overrightarrow{\mathrm{OK}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ et les orthocentres J, I, H des triangles ABD, ABC et BCD respectivement, sont définis par des égalités analogues. Posons $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{v}$. L'égalité $\overrightarrow{\mathrm{OK}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{v}$ traduit le fait que K et D sont symétriques par rapport au point $\mathcal{G}$, défini par $\overrightarrow{O\mathcal{G}} = \frac{1}{2}\vec{v}$. Il en est de même pour les autres orthocentres. Y est donc le symétrique de X par rapport à $\mathcal{G}$.
b. Les points K, J, I, H sont situés sur un cercle de centre O', image de O dans la symétrie de centre G. Calculons :
$\overrightarrow{\mathrm{O'K}} + \overrightarrow{\mathrm{O'J}} + \overrightarrow{\mathrm{O'I}} + \overrightarrow{\mathrm{O'H}} = 4\,\overrightarrow{\mathrm{O'O}} + 3\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right) = -2\vec{v} + 3\vec{v} = \vec{v}$
Et finalement… les images de K, J, I, H sont les points D, C, B, A. L'image de Yest X.

Thème : Aires et volumes



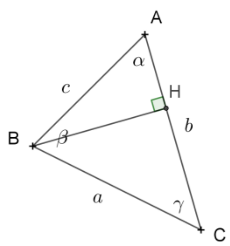
Exercice 1 Domino
Un point O étant donné à l'intérieur d'un polygone régulier possédant un nombre pair de côtés (qu'on pourra noter $2n$), on considère les triangles dont les sommets sont O et deux sommets consécutifs du polygone. On colorie ces triangles alternativement en noir et en blanc.
Montrer que l'aire totale blanche est égale à l'aire totale noire.





Le cas $n = 2$ se traite facilement à part.
Pour $n > 2$. L'aire totale de la partie blanche est la somme des aires des triangles blancs, qui ont tous la même « base ». Cette base a pour longueur la longueur du polygone régulier à $2n$ côtés. Appelons ρ le rapport des longueurs du côté du polygone régulier à n côtés et du polygone régulier à $2n$ côtés « construit par- dessus ».
La figure ci-contre montre que ce rapport est $\frac{\tan 2\alpha}{\tan \alpha}$, où 2α est l'angle au centre correspondant au côté du polygone à $2n$ côtés. On en déduit que le rapport de l'aire « blanche » à l'aire du polygone à n côtés « construit par-dessus » est $\frac{1}{\rho}$. Il en est de même pour l'aire « noire ». Elles sont donc égales.

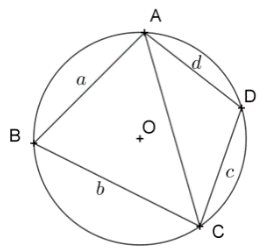
Exercice 2 ***a. De la formule de Héron…***
On appelle a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle et $p = \frac{a+b+c}{2}$ son demi-périmètre.
Montrer que l'aire S du triangle vérifie $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
b…. à la formule de Brahmagupta
On appelle a, b, c, d les longueurs des côtés d'un quadrilatère *cyclique* (cyclique = inscriptible) et $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ son demi-périmètre.
Montrer que l'aire S de ce quadrilatère est $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$



Appelons α, β, γ les mesures des angles opposés respectivement aux côtés de longueurs a, b, c. L'aire S du triangle s'exprime classiquement : $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. En écrivant : $4S^2 = a^2b^2(1-\cos^2\gamma)$, il vient : $4S^2 = ab(1+\cos\gamma)ab(1-\cos\gamma)$, et comme $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma$, on peut encore écrire :

$$16S^2 = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) = ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2)$$
$$16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$$

Et si on appelle p le demi-périmètre, $= \frac{a+b+c}{2}$, on obtient le résultat annoncé.



Dire que le quadrilatère ABCD est inscriptible, c'est dire que ses angles en B et D sont supplémentaires, donc ont même sinus. L'aire S du quadrilatère s'exprime ainsi :

$$S = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin D = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin B$$

On a aussi $2ab\cos^2 B - a^2 - b^2 = AC^2 = 2cd\cos^2 D - c^2 - d^2$
Le calcul se poursuit comme précédemment en faisant intervenir le demi-périmètre $\frac{a+b+c+d}{2}$.

Exercice 3 Étude d'une surface

On considère l'ensemble (Σ) des points de l'espace dont les coordonnées dans un repère orthonormé vérifient :

$$z^2 = x(x-1) - y(y-1)$$

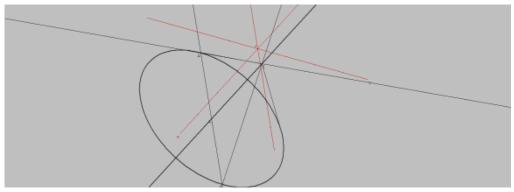
1. On donne un réel λ et on appelle P_λ le plan d'équation $x = \lambda$. Quelle est la nature de l'intersection $(\Sigma) \cap P_\lambda$?

2. Soit I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et d la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{\imath}$. Montrer que d est un axe de symétrie de (Σ) et déterminer l'intersection de (Σ) avec le plan d'équation $y = \frac{1}{2}$.

3. Quelle est la nature de (Σ) ?

1. Dans le plan P_λ, cette intersection a pour équation $y^2 + z^2 - y - \lambda(\lambda - 1) = 0$

Ou encore $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2$ et on reconnaît l'équation du cercle situé dans le plan P_λ, de centre le point de coordonnées $\left(\lambda, \frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right|$.



2. La symétrie orthogonale d'axe d transforme le point de coordonnées (x, y, z) en le point de coordonnées $(1 - x, 1 - y, -z)$

On voit que si l'un de ces points appartient à (Σ), l'autre aussi.

L'intersection de (Σ) avec le plan d'équation $y = \frac{1}{2}$ a pour équation :

$y = \frac{1}{2}$ et $z^2 = (x-1)^2$, ce qui correspond à la réunion de deux droites symétriques par rapport à d et perpendiculaires.

(Σ) est le cône de révolution d'axe d, de sommet I, demi angle au sommet de mesure $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 4 Quadrature d'un arc d'hyperbole

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, soit $\mathcal{H}$ la courbe ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient $x \geq 1$ et $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

À tout point A de $\mathcal{H}$, de coordonnées (r, s), on associe la partie du plan ensemble des points dont les coordonnées vérifient $1 \leq x \leq r$ et $y^2 \leq x^2 - 1$. On note $\mathcal{A}$ l'aire de cette partie de plan.

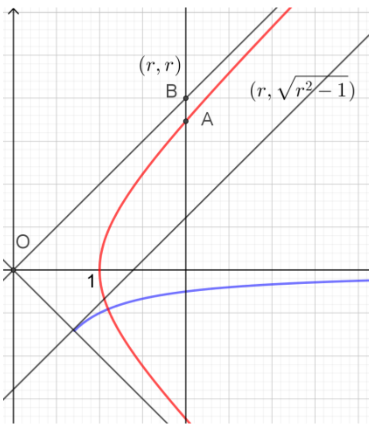
1. Calculer $\mathcal{A}$ en fonction de r et s. On pourra utiliser une rotation du repère d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ et de sens indirect.

2. Soit n un entier naturel non nul et u un réel positif tel que$u^n = r + s$. Pour tout entier k compris entre 1 et n, on considère le trapèze rectangle T_k (éventuellement réduit à un triangle) dont le côté oblique est le segment ayant pour extrémités les points de coordonnées $\left(u^{k-1}, 0\right)$ et $\left(u^k, 0\right)$ dont les bases ont pour pente -1 et dont l'un des angles droits a pour sommet le point de $\mathcal{H}$ d'abscisse $\frac{u^{k-1}+u^{1-k}}{2}$.

a. Faire un croquis.

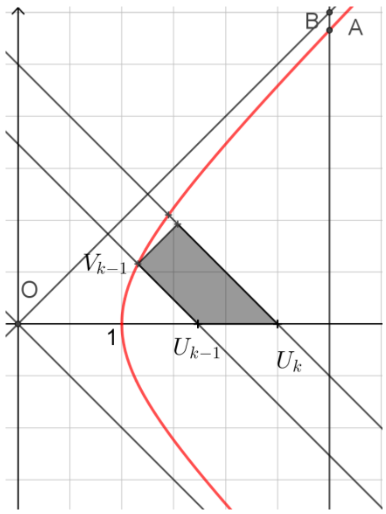
b. Quelle est la limite de la somme des aires de ces trapèzes ?

1. La rotation de centre O, d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ et de sens indirect transforme la courbe rouge du schéma ci-dessous en la courbe bleue. Elle est associée au produit du nombre complexe $x + \mathrm{i}y$ (représentant le point de coordonnées (x, y) par le nombre $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i})$. Le point de coordonnées (x, y) est transformé en le point de



coordonnées $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x)\right) = (X, Y)$. Comme ici $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$ et $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$, l'élimination de x et y conduit à $2XY$ =1. La courbe bleue, image de $\mathcal{H}$, a donc pour équation $y = \frac{1}{2x}$. On vérifie que les autres conditions limitant le domaine sont satisfaites.

Sur la figure ci-contre, l'aire de la partie du domaine à mesurer constituée de ses points points d'ordonnée positive apparaît composée de celle d'un triangle diminuée de celle de la partie de plan située entre la courbe $\mathcal{H}$et les droites d'équations $= x$, $y = 0$ et $x = r$. Cette dernière partie est isométrique à la partie de plan située entre la courbe bleue et les droites d'équations $y = 0, y = -x$ et $x + y = r + \sqrt{r^2 - 1}$. Peu importent ici les calculs détaillés, on voit qu'on a dû faire appel à l'aire située entre un arc d'hyperbole équilatère et son asymptote, « donc », si on peut dire, au logarithme népérien.



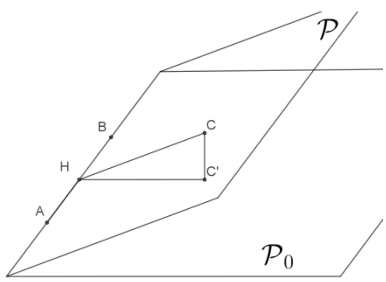
2. Sur la figure ci-contre, le point V_{k-1} a bien pour abscisse $\frac{u^{k-1}+u^{1-k}}{2}$ (calcul à vérifier). L'ordre des points U_{k-1}et U_k est le bon (le point U_n a la même abscisse que A, en particulier $u > 1$). La hauteur du trapèze est la distance entre les droites parallèles d'équations $x + y = u^{k-1}$ et $x + y = u^k$. Cette distance est $\frac{u^k-u^{k-1}}{2}\sqrt{2}$.
On trouve que l'aire du trapèze T_k est $S_k = \frac{u-1}{4}\left(u^{2k-1} + u^{2k-2} - 2\right)$.
La somme de ces aires (cette somme s'arrête à T_n, puisque, souvenons-nous en, $u^n = r + s$) est $S = \frac{u^{2n}-1}{4} - n\frac{u-1}{2}$.
Cela conduit à examiner la limite de la suite de terme général :

$$a_n = n\left(\sqrt[n]{r+s} - 1\right)$$

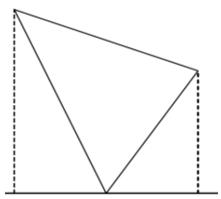
Il peut aussi s'écrire : $a_n = n\left(e^{\frac{1}{n}\ell n(r+s)}\right)$ et on retrouve le $\ell n(r+s)$ de la première méthode…

Exercice 5 Une formule pour calculer des aires planes

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On appelle P_0 le plan défini par $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on considère un plan P de vecteur unitaire orthogonal $\vec{n}$ tel que $\vec{n}.\vec{k} = \cos\gamma$.
1. On suppose dans cette question que les plans P_0 et P ne sont pas parallèles. On appelle D leur droite d'intersection, et on considère deux points A et B de cette droite. Un point C du plan P pour projeté orthogonal sur P_0 le point C'. Le point H est le projeté orthogonal de C sur (AB).
a. Montrer que H est aussi le projeté orthogonal de C' sur (AB).
b. En déduire une relation entre les longueurs CH et C'H et l'angle γ, puis entre les aires S et S' des triangles ABC et ABC'.
c. On considère un polygone Q situé dans le plan P et sa projection orthogonale Q' dans P_0. Quel est le rapport des aires de Q' et de Q ?
2. Que dire dans le cas particulier où les plans P_0et P sont parallèles ?
3. On pose $\vec{n}.\vec{\imath} = \cos\alpha$ et $\vec{n}.\vec{\jmath} = \cos\beta$.
a. Montrer que les coordonnées de $\vec{n}$ dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ ont pour valeurs absolues $|\cos\alpha|, |\cos\beta|, |\cos\gamma|$.
b. Soit Q un polygone d'aire S contenu dans le plan P et soit S', S''et S''' les aires de ses projetés orthogonaux respectivement sur les plans $\left(O, \vec{\jmath}, \vec{k}\right), \left(O, \vec{k}, \vec{\imath}\right), \left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Montrer que $S^2 = S'^2 + S''^2 + S'''^2$.



1. *a.* La droite (AB) est orthogonale à (CH) et à (CC'). Elle est donc perpendiculaire au plan (CC'H), qu'elle coupe en H, donc orthogonale à (C'H).
b. $\mathrm{C'H} = \mathrm{CH} \times |\cos\gamma|$ (rapport de projection orthogonale). Les triangles ABC et ABC' ont la même « base » et des hauteurs dans le rapport $|\cos\gamma|$. Il en est donc de même de leurs aires.
c. Le raisonnement précédent s'applique à tout triangle situé dans P ayant un côté de support (AB), par extension aux rectangles ou aux trapèzes rectangles dont un côté a pour support (AB) (dans le cas des trapèzes, le côté perpendiculaire aux bases). Par différence, on peut étendre la relation à n'importe quel triangle (voir figure de droite) et comme tout polygone peut être découpé façon puzzle en une famille de triangles, le résultat est obtenu.



2. Dans ce cas, le cosinus vaut 1, les aires sont les mêmes.
3. *a.* Ces coordonnées sont des produits scalaires de vecteurs unitaires. Mais rien n'est indiqué sur le sens de $\vec{n}$.
b. La somme des carrés des coordonnées de $\vec{n}$ est sa norme, 1. En élevant les égalités du type $S' = |\cos\gamma|S$ au carré et en sommant, on obtient le résultat demandé.

Thème : Équations

Exercice 1 Équation cubique
Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles l'équation
$x^3 + ax - 2(a+4) = 0$
Possède exactement deux solutions réelles ?

Une équation polynôme du troisième degré à coefficients réels possède deux solutions réelles si une de ses racines est double.
Il existe donc des réels b et c tels que pour tout x : $x^3 + ax - 2(a+4) = (x-b)(x^2 - 2cx + c^2)$
Par identification : $0 = -b - 2c, a = 2bc + c^2, bc^2 = -2(a+4)$
On a donc $b = -2c, a = -3c^2$ et $a = c^3 - 4$
La deuxième égalité indique que $a < 0$ et on obtient la condition nécessaire sur c : $c^3 + 3c^2 - 4 = 0$,
C'est-à-dire $(c-1)(c^2 + 4c + 4) = 0$. On obtient donc une première solution, avec $c = 1$ et donc $a = -3$.
$c^2 + 4c + 4 = (c+2)^2$ et $c = -2$ donne $a = -12$
Dans le premier cas, les racines sont -1 et 1, dans le second elles sont 2 et -4.

Exercice 2 Presque pareilles
Deux entiers naturels non nuls m et n sont tels que les équations $x^2 + mx + n = 0$ et $x^2 + nx + m = 0$ n'admettent chacune que des solutions entières, et au moins une. Quels sont les couples (m, n) ?

L'existence de solutions est assurée par la positivité du discriminant. On doit donc avoir $m^2 - 4n \geq 0$ et $n^2 - 4m \geq 0$, conditions qui conduisent à $m^2 \geq 4\sqrt{4m}$ ou encore $\sqrt{m}(m\sqrt{m} - 8) \geq 0$, et donc $m \geq 4$. Par symétrie, $n \geq 4$.
Les solutions des deux équations sont négatives (leur produit est positif et leur somme négative). La plus grande des deux, par exemple pour la première équation est $\frac{-m+\sqrt{m^2-4n}}{2}$. Elle n'est pas nulle (sinon on aurait $m = 0$ ou $n = 0$), elle est donc inférieure à -1, ce qui donne $\sqrt{m^2 - 4n} \leq -2 + m$. Les deux membres sont positifs : $m^2 - 4n \leq m^2 - 4m + 4$ et donc

$$m - n \leq 1$$

Comme m et n sont des entiers strictement positifs, deux situations sont possibles : $m = n$ et $m = n + 1$ (on prendra les symétriques des couples solutions à la fin)
Si $m = n$, alors le discriminant $m^2 - 4m$ doit être un carré parfait de même parité que m. Mais $m^2 - 4m = p^2$ s'écrit aussi $(m-2)^2 = p^2 + 4$. La seule possibilité est $m = 4$.
Si $m = n + 1$, $n^2 - 4m = n^2 - 4n - 4 = (n-2)^2 - 8$ qui conduit à $n = 5$ et aux couples solutions (6, 5) et (5, 6).
On achève par une réciproque.

Exercice 3 Equation polynomiale
On donne cinq réels distincts a, b, c, d et e.
Montrer que l'équation
$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) + (x-a)(x-b)(x-c)(x-e) + (x-a)(x-b)(x-d)(x-e) +$
$(x-a)(x-c)(x-d)(x-e) + (x-b)(x-c)(x-d)(x-e) = 0$
possède quatre racines réelles.

On reconnaît la dérivée de la fonction $x \longmapsto (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)$ qui est continue et possède cinq racines réelles distinctes.

Exercice 4 On cherche un couple
Trouver tous les couples d'entiers (m, n) pour lesquels : $2^{2m+1} + 9.2^m + 5 = n^2$

Posons $m = 3 + q$. On voudrait $n^2 = 2^3.2^{3+2q+1} + 9.2^3.2^q + 5$
Il faudrait donc que n^2 soit congru à 5 modulo 8 si $q \geq 0$. Or, cela ne se peut pas. Donc les solutions vérifient $m < 3$.
Si $m \leq -2$, $2^{2m+1} \leq \frac{1}{8}$, $2^{2m} \leq \frac{1}{4}$, donc le premier membre de l'égalité est strictement compris entre 4 et 6.
Les seules valeurs à essayer sont donc $-1, 0, 1$ et 2.
On trouve finalement comme solutions les couples $(0, 4)$ et $(0, -4)$

Exercice 5 Second degré

Dans cet exercice, on considère des fonctions polynômes du second degré *unitaires*, c'est-à-dire dont le coefficient du terme du second degré est égal à 1.

1. La fonction P est une fonction polynôme du second degré *unitaire.* On sait que $P(1) = P(2) = 0$. Quelle est la fonction P ?

2. La fonction T est une fonction polynôme du second degré *unitaire*, pour laquelle on peut trouver quatre réels, α, β, γ et δ deux à deux distincts tels que $T(\alpha) = T(\beta)$ et $T(\gamma) = T(\delta)$. Prouver que $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.

3. Avec deux fonctions polynômes du second degré *unitaires*, Q et R, on peut construire la fonction qui à tout nombre réel x associe $Q\big(R(x)\big)$ (image par Q de l'image de x par R). C'est une fonction polynôme du quatrième degré. On dit que cette fonction est la composée de R par Q.

Trouver deux fonctions polynômes du second degré *unitaires* Q et R telles que les solutions de l'équation $Q\big(R(x)\big) = 0$ soient les nombres 1, 2, 3 et 4.

4. On effectue cette fois la composition de trois fonctions polynômes du second degré *unitaires*, dans l'ordre f puis g puis h.

On suppose que les solutions de l'équation $h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = 0$ sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

a. Prouver que parmi les nombres $f(1), f(2), f(3), \dots, f(7), f(8)$, il y a exactement quatre valeurs différentes.

b. Existe-t-il des fonctions polynômes du second degré f, g et h *unitaires* pour lesquelles l'équation $h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = 0$ a pour solutions 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 ?

1. $P(x) = (x - 1)(x - 2)$

2. $T(x) = x^2 + mx + p$ donne $\alpha^2 + m\alpha + p = \beta^2 + m\beta + p$ et donc $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta - m) = 0$

Et donc $\alpha + \beta = m$

D'où le résultat.

3. $Q\big(R(1)\big) = Q\big(R(2)\big) = Q\big(R(3)\big) = Q\big(R(4)\big) = 0$. Les images par R des nombres 1, 2, 3 et 4 ne prennent donc que deux valeurs, qui sont les racines de Q. D'après ce qui précède, comme $1 + 4 = 2 + 3$, ce sont 1 et 4 d'une part, 2 et 3 d'autre part, qui ont pour images par R les racines de Q.

Le polynôme unitaire R défini par $R(x) = x^2 - 5x + 5$ vérifie $R(1) = R(4) = 1$ et $R(2) = R(3) = -1$. On le compose avec le polynôme unitaire dont les racines sont 1 et -1, défini par $Q(x) = x^2 - 1$, on obtient : Pour tout x, $Q\big(R(x)\big) = (x^2 - 5x + 5)^2 - 1$

On vérifie que $Q\big(R(x)\big) = (x^2 - 5x + 5 - 1)(x^2 - 5x + 5 + 1) = (x - 1)(x - 4)(x - 2)(x - 3)$.

4. *a.* L'équation $h(x) = 0$ possède dans ce cas deux solutions distinctes. Comme dans la question précédente, l'équation $h\big(g(x)\big) = 0$ en possède quatre, qui sont à choisir parmi les images par f de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

b. La question 2. Indique que ces quatre images doivent être groupées par deux. On a donc :

$$f(1) = f(8)\ ;\ f(2) = f(7)\ ;\ f(3) = f(6)\ ;\ f(4) = f(5)$$

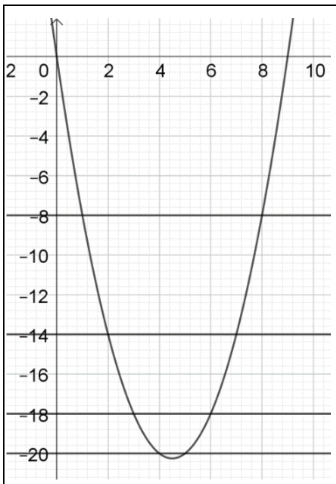
On cherche un polynôme unitaire du second degré qui fournirait une telle distribution.

Les fonctions polynômes du second degré unitaires vérifiant cette condition sont celles pour lesquelles il existe un réel φ tel que pour tout x :

$f(x) = x^2 - 9x + \varphi$ (voir graphique).

Les valeurs prises par f en 1 et en 8, en 2 et en 7, en 3 et en 6, en 4 et en 5 sont alors respectivement $\varphi - 8, \varphi - 14, \varphi - 18$ et $\varphi - 20$.

Pour que le polynôme unitaire g prenne la même valeur en deux fois deux de ces points, il est nécessaire qu'on puisse les grouper en deux paires de même somme. Ce n'est pas possible.



$x \to x^2 - 9x$

Thème : Suites et fonctions

Exercice 1 À la Oresme (Nicole ORESME, 1320 – 1382)

Montrer que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2\,019}+\frac{1}{2\,020}>\frac{13}{2}$

Pour démontrer la divergence de la suite harmonique, Nicole ORESME groupe les termes par paquets ayant pour effectifs les puissances de 2.
Appelons S la somme à minorer. On pose pour tout entier k supérieur ou égal à 2 :
$h(k)=\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k-1}+\frac{1}{2^{k+1}}$. Chaque terme de cette somme est supérieur au dernier, donc $h(k)>\frac{1}{2}$. La somme Speut s'écrire $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+h(2)+h(3)+\cdots+h(10)-\left(\frac{1}{2\,020}+\frac{1}{2\,021}+\cdots+\frac{1}{2\,048}\right)$ et donc $>4\times\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+9\times\frac{1}{2}-29\times\frac{1}{2\,020}$. D'où le résultat.

Exercice 2 Suites périodiques

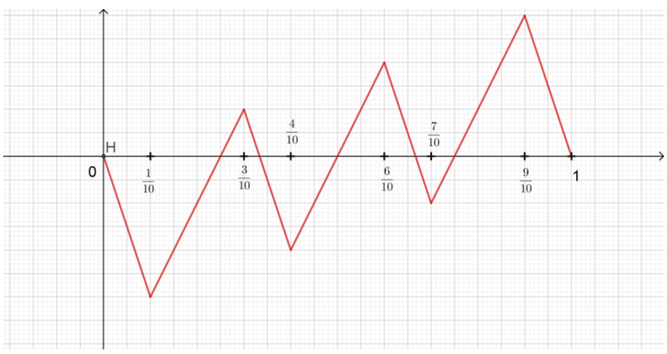
Déterminer toutes les suites périodiques obéissant à la relation de récurrence $x_{n+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{n+1}}+x_n\right)$

On peut écrire la formule de récurrence $2x_{n+2}x_{n+1}=1+x_{n+1}x_n$
Posons pour tout n :$z_n=x_{n+1}x_n-1$. La suite (z_n) satisfait la relation de récurrence $z_{n+1}=\frac{1}{2}z_n$.
Elle est donc géométrique (ou constante à 0). Mais le fait que la suite (x_n) soit périodique entraîne la périodicité de (z_n), et si cette dernière est géométrique, elle ne peut l'être. La seule possibilité est donc que (z_n) soit la suite nulle. On aurait alors pour tout entier n : $x_{n+1}x_n=1$. Dans ce cas, soit on a pour tout $x_n=1$, soit, pour tout n, $x_n=-1$, soit la suite ne prend que deux valeurs et elle est donc périodique (si elle est constante aussi).

Exercice 3 Une fonction capricieuse

La fonction f est définie et continue sur $[0,1]$ et vérifie :
1. $f(0)=f(1)=0$;
2. Pour tout $x\in\left[0,\frac{7}{10}\right]$, $f\left(x+\frac{3}{10}\right)\neq f(x)$
Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins sept solutions sur $[0,1]$
Donner un exemple de fonction vérifiant ces hypothèses. Une représentation graphique suffira.

Appelons g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x)=f\left(x+\frac{3}{10}\right)-f(x)$. Cette fonction est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle. Elle est donc de signe constant. Supposons-la positive. On a :
$0=f(0)<f\left(\frac{3}{10}\right)<f\left(\frac{6}{10}\right)<f\left(\frac{9}{10}\right)$ et $0=f(1)>f\left(\frac{7}{10}\right)>f\left(\frac{4}{10}\right)>f\left(\frac{1}{10}\right)$
Ce qui indique que la fonction f change de signe sur chacun des intervalles
$\left[\frac{1}{10},\frac{3}{10}\right],\left[\frac{3}{10},\frac{4}{10}\right],\left[\frac{4}{10},\frac{6}{10}\right],\left[\frac{6}{10},\frac{7}{10}\right],\left[\frac{7}{10},\frac{9}{10}\right]$ et donc (Théorème des valeurs intermédiaires) qu'elle s'annule au moins une fois sur chacun. Si on tient compte de 0 et de 1, on obtient les sept solutions.



Une fonction possible…

Exercice 4 Avec une hyperbole

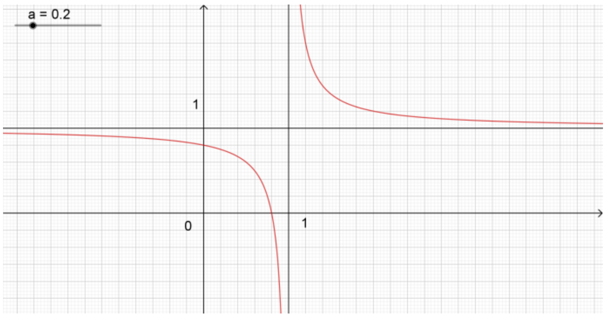
On donne un nombre réel a compris strictement entre 0 et 1.

On considère l'ensemble $(\mathcal{H})$ des points du plan, rapporté à un repère orthonormé, dont les coordonnées vérifient : $(1-x)(1-y)=a$. On appelle $\mathcal{H}_1$ la partie de $\mathcal{H}$ contenu dans le carré délimité par les axes de coordonnées et les droites d'équations $x=1$ et $y=1$.

1. Préciser la nature de $\mathcal{H}$. Représenter $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1$.

2. Montrer que, quand le point de coordonnées (x,y) décrit $\mathcal{H}_1$, la somme $x+y$ prend toutes les valeurs d'un certain intervalle à préciser.

1. La courbe $(\mathcal{H})$ est la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $h(x)=1-\frac{a}{1-x}$. Cette courbe est une hyperbole équilatère d'axes les droites d'équations $x=1$ et $y=1$. $\mathcal{H}_1$ est l'arc de cette courbe limité par les points de coordonnées $(0,1-a)$ et $(1-a,0)$.



2. Si le point de coordonnées (x,y) appartient à $\mathcal{H}_1$, on a d'une part $y=1-\frac{a}{1-x}$ et d'autre part $0\leq x\leq 1$ et $0\leq y\leq 1$. On a donc $x+y=1+x-\frac{a}{1-x}$. La fonction g, définie sur $[0,1-a]$ par $g(x)=1+x-\frac{a}{1-x}$ et continue et dérivable et obéit au tableau de variation suivant :

x	0	$1-\sqrt{a}$	$1-a$
$g(x)$	$1-a$ ↗	$2-2\sqrt{a}$	↘ $1-a$

La fonction g prend donc toutes les valeurs de l'intervalle $\left[1-a,2-2\sqrt{a}\right]$.

Exercice 5 Somme de puissances et puissance d'une somme

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant, pour tout entier n :

$$x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3+\cdots+x_n{}^3=(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)^2$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel m tel que $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=\frac{m(m+1)}{2}$.

2. Pour tous entiers naturels n et p, on pose $S_{n,p}=1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p$.

Quels sont les entiers naturels p pour lesquels $S_{n,p}$ est le carré d'un entier naturel ?

1. Commençons par observer qu'il **existe** des suites possédant la propriété annoncée. Le premier exemple est la suite des entiers naturels : $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

On démontre cette égalité par récurrence. La propriété est vraie au rang 1 :$1^3=\frac{1^2\times 2^2}{4}$.

Supposons-la vraie pour un certain rang $(n-1)$, sur lequel on ne fait aucune hypothèse. Cela s'écrit :

$1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3=\frac{(n-1)^2n^2}{4}$. Ajoutons n^3. On obtient $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=n^3+\frac{(n-1)^2n^2}{4}$.

Le membre de droite s'écrit $\frac{1}{4}n^{2(4n+(n-1)^2)}=\frac{1}{4}n^{2(n+1)2}$. La propriété est donc vraie pour tout entier n.

Démontrons la propriété proposée par récurrence.

Pour $n=1$, elle s'écrit $x_1{}^3=(x_1)^2$. La suite ne peut satisfaire l'**hypothèse** que si $x_1=0$ ou $x_1=1$, mais alors $m=0$ et $m=1$ sont respectivement les entiers attendus dans **la propriété**.

Supposons donc que, pour un certain entier naturel n sur lequel on ne fait aucune hypothèse, une suite satisfasse pour tout entier q : $x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3+\cdots+x_q{}^3=\left(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_q\right)^2$

et qu'il existe un entier m pour lequel $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}=\frac{m(m+1)}{2}$.

Calculons : $x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3+\cdots+x_n{}^3=(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1})^2+x_n{}^3=\frac{m^2(m+1)^2}{4}+x_n{}^3$ d'une part,

$x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3+\cdots+x_n{}^3=(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)^2$ par hypothèse.

Donc $\left(\frac{m(m+1)}{2}+x_n\right)^2=\frac{m^2(m+1)^2}{4}+x_n{}^3$, et $x_n\,m(m+1)+x_n{}^2=x_n{}^3$.

Cette dernière condition s'écrit aussi : $x_n\left(x_n{}^2-x_n-m(m+1)\right)=0$, ou encore :

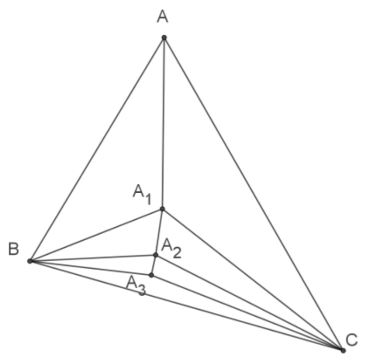
$$x_n(x_n+m)(x_n-m-1)=0$$

Il y a donc trois possibilités :

1. $x_n = 0$. Dans ce cas, le nombre cherché au rang n est le même que celui dont nous avons supposé l'existence au rang $n-1$.
2. $x_n = m+1$, on avait $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} = \frac{m(m+1)}{2}$; on ajoute $x_n = m+1$, on obtient $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \frac{m(m+1)}{2} + m + 1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ et la propriété est vérifiée, $m+1$ est le nouveau nombre tel que…
3. $x_n = -m$; dans ce cas $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \frac{m(m+1)}{2} - m = \frac{m(m-1)}{2}$ et la propriété est vérifiée, $m-1$ est le nouveau nombre tel que…

Finalement, la propriété est établie par récurrence.
2. D'après notre introduction, 3 est un nombre qui convient.
Si p est une solution du problème, il existe un entier naturel m tel que $1 + 2^p = m^2$.
Cette égalité se traduit par $2^p = m^2 - 1 = (m+1)(m-1)$.
Des puissances de 2 distantes de 2 : $m+1 = 4, m-1 = 2$. La seule solution est 3.

Exercice 6 Des suites « géométriques »
On donne dans le plan un triangle ABC. On considère le point A_1, centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, puis le point A_2, centre du cercle inscrit dans le triangle A_1BC, puis le point A_3 centre du cercle inscrit dans le triangle A_2BC, etc.
1. Y a-t-il un « point limite » pour la suite ainsi définie, c'est-à-dire un point I tel que la distance IA_n tende vers 0 ?
2. Même question en partant de l'orthocentre H_1 du triangle ABC, puis l'orthocentre du triangle H_1BC.



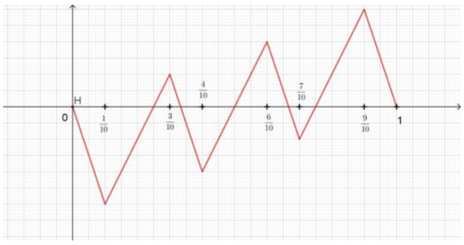
Plaçons-nous dans un repère d'origine B, dans lequel le point C a pour coordonnées 1 et 0 (nous sommes maîtres de la définition de l'unité). Si la mesure de l'angle B du triangle ABC est β et si celle de l'angle C est γ, l'angle $\widehat{CBA_n}$ mesure $\frac{\beta}{2^{n-1}}$ et l'angle $\widehat{BCA_n}$ mesure $\frac{\gamma}{2^{n-1}}$.
La droite (BA_n) a donc pour équation $y = \tan\frac{\beta}{2^{n-1}}x$ et la droite (CA_n) a pour équation $y = \tan\frac{\gamma}{2^{n-1}}(x-1)$.
Leur point d'intersection a pour coordonnées $x_n = \frac{-\tan\frac{\gamma}{2^{n-1}}}{\tan\frac{\beta}{2^{n-1}} - \tan\frac{\gamma}{2^{n-1}}}$ et $y_n = \tan\frac{\beta}{2^{n-1}}x_n$.
Pour la suite, il est nécessaire de rappeler que, tout comme pour la fonction sinus, la fonction tangente est dérivable en 0 et de nombre dérivé 1, ce nombre étant la limite en 0 de $\frac{\tan x}{x}$. On peut sauter quelques étapes, en terminale, pour admettre que la limite de la suite (x_n) est $\frac{\gamma}{\gamma-\beta}$. Celle de la suite (y_n)est 0.
2. Les hauteurs du triangle H_1BC sont (AH_1) et les côtés (BA) et (CA) du triangle. Elles sont concourantes en A, donc la suite ne prend que deux valeurs, H_1 et A, sauf dans le cas où le triangle ABC est rectangle en A, auquel cas elle est stationnaire.

Thèmes divers pour les candidats en voie ES

Suites et fonctions

Exercice 1 Une fonction capricieuse
La fonction f est définie et continue sur $[0, 1]$ et vérifie :
1. $f(0) = f(1) = 0$;
2. Pour tout $x \in \left[0, \frac{7}{10}\right]$, $f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins sept solutions sur $[0,1]$
Donner un exemple de fonction vérifiant ces hypothèses. Une représentation graphique suffira.

Appelons g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f\left(x + \frac{3}{10}\right) - f(x)$. Cette fonction est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle. Elle est donc de signe constant. Supposons-la positive. On a :
$0 = f(0) < f\left(\frac{3}{10}\right) < f\left(\frac{6}{10}\right) < f\left(\frac{9}{10}\right)$ et $0 = f(1) > f\left(\frac{7}{10}\right) > f\left(\frac{4}{10}\right) > f\left(\frac{1}{10}\right)$
Ce qui indique que la fonction f change de signe sur chacun des intervalles
$\left[\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right], \left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right], \left[\frac{4}{10}, \frac{6}{10}\right], \left[\frac{6}{10}, \frac{7}{10}\right], \left[\frac{7}{10}, \frac{9}{10}\right]$ et donc (Théorème des valeurs intermédiaires) qu'elle s'annule au moins une fois sur chacun. Si on tient compte de 0 et de 1, on obtient les sept solutions.



Une fonction possible…

Exercice 2 À la Oresme (Nicole ORESME, 1320 – 1382)

Montrer que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2\,019} + \frac{1}{2\,020} > \frac{13}{2}$

Pour démontrer la divergence de la suite harmonique, Nicole ORESME groupe les termes par paquets ayant pour effectifs les puissances de 2.
Appelons S la somme à minorer. On pose pour tout entier k supérieur ou égal à 2 :
$h(k) = \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^k+2^k-1} + \frac{1}{2^{k+1}}$. Chaque terme de cette somme est supérieur au dernier, donc $h(k) > \frac{1}{2}$. La somme Speut s'écrire $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + h(2) + h(3) + \cdots + h(10) - \left(\frac{1}{2\,020} + \frac{1}{2\,021} + \cdots + \frac{1}{2\,048}\right)$ et donc $> 4 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + 9 \times \frac{1}{2} - 29 \times \frac{1}{2\,020}$. D'où le résultat.

Exercice 3 Suites périodiques
Déterminer toutes les suites périodiques obéissant à la relation de récurrence $x_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{n+1}} + x_n\right)$

On peut écrire la formule de récurrence $2x_{n+2}x_{n+1} = 1 + x_{n+1}x_n$
Posons pour tout n :$z_n = x_{n+1}x_n - 1$. La suite (z_n) satisfait la relation de récurrence $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n$.
Elle est donc géométrique (ou constante à 0). Mais le fait que la suite (x_n) soit périodique entraîne la périodicité de (z_n), et si cette dernière est géométrique, elle ne peut l'être. La seule possibilité est donc que (z_n) soit la suite nulle. On aurait alors pour tout entier n : $x_{n+1}x_n = 1$. Dans ce cas, soit on a pour tout $x_n = 1$, soit, pour tout n, $x_n = -1$, soit la suite ne prend que deux valeurs et elle est donc périodique (si elle est constante aussi).

Exercice 4 La médiane et la moyenne comme minimums
On considère une série statistique comptant 5 valeurs (cet effectif ne sert que d'exemple) $a < b < c < d < e$.

1. Déterminer le minimum de la fonction $f : x \longmapsto |x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|+|x-e|$
2. Déterminer le minimum de la fonction $g : x \longmapsto (x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2+(x-d)^2+(x-e)^2$

1. La fonction f est une fonction affine par morceaux. Elle est affine sur chacun des intervalles $]-\infty, a], [a, b], [b, c], [c, d], [d, e], [e, +\infty[$ et les coefficients directeurs y sont successivement $-5, -3, -1, 1, 3$ et 5. Le minimum est donc atteint en c. *La ou les valeurs (cas d'une série à effectif pair) en laquelle (lesquelles) la somme des écarts absolue est minimale est (sont) la (les) médiane(s) de la série.*
2. La fonction g est une fonction polynôme du second degré. Le coefficient du terme du premier degré est $-2(a+b+c+d+e)$ et le coefficient du terme du second degré est 5. Le minimum est donc atteint en $\frac{a+b+c+d+e}{5}$.
Le nombre minimisant la somme des carrés des écarts aux termes d'une série statistique est la moyenne de la série.

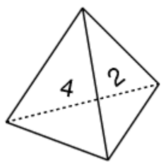
Organisation, gestion de données, probabilités

Exercice 1 Problème de Frobénius version pâtissière
Une pâtisserie propose des boîtes de canelés bordelais de diverses contenances : des conditionnements par 6, par 9, par 12 et par 16 sont possibles.
1. Peut-on acheter 10 canelés, 20 canelés, 30 canelés ?
2. *a.* Établir la liste des quantités, inférieures à 30, qu'on ne peut pas réaliser en achetant plusieurs boîtes.
b. Montrer que, s'il existe un entier n tel que tout achat de $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ canelés soit possible, alors il est possible d'acheter toute quantité de canelés supérieure ou égale à n.
c. Déterminer le plus petit entier n réalisant la condition précédente.
3. *a.* Pourrait-on commander 50 canelés si les conditionnements possibles étaient 6, 9, 12 et 15 ?
b. Y aurait-il dans ce cas un seuil au-delà duquel toute quantité soit réalisable ?
Pour conditionner une commande de n canelés, on peut appliquer un algorithme (qualifié de *glouton*) consistant à utiliser un maximum de boîtes de la plus grande taille, puis de placer ce qui reste dans des boîtes de taille immédiatement inférieure, etc.
4. *a.* Que donne cette méthode s'il s'agit de répartir 60 canelés dans des boîtes de 16, 12, 9 et 6 ?
b. Et pour répartir 75 canelés ?
c. Pourrait-on conditionner les 75 canelés en procédant autrement ?
1. On ne peut pas acheter 10 canelés conditionnés, car 9 + 6 > 10 et 6 +6 > 10. On ne peut pas non plus en obtenir 20, car 16 + 6 > 20, 12 + 9 > 20, 12 + 2 × 6 > 20, 4 × 6 > 20. En revanche, 12 + 2 × 9 = 30.
2. *a.* Liste des quantités qu'on ne peut pas conditionner dans ces boîtes :

1	2	3	4	5	7	8	10	11	13	14	17	19	20	23	26	29

b. En ajoutant 6 à chacun des nombres de cette liste, on obtient les six nombres suivants, et ainsi de suite, tous les entiers supérieurs.
c. On vérifie que les nombres 36, 37, 38, 39, 40 et 41 sont « atteignables », donc tous leurs successeurs aussi, mais que 35 ne l'est pas.
3. *a.* Les nombres proposés sont tous des multiples de 3. Toute somme réalisée avec ces nombres l'est aussi, ce qui n'est pas le cas de 50.
b. Seuls les multiples de 3 sont susceptibles d'être atteints.
4. *a.* On utilise trois boîtes de 16 et une boîte de 12.
b. On remplit 4 boîtes de 16, il reste 11, puis une boîte de 9 et il reste 2 qu'on ne sait placer.
c. Si on n'applique pas la méthode gloutonne, on prend 5 boîtes de 12, une boîte de 9 et une boîte de 6.

Exercice 2 Dés trompeurs
On lance deux dés D_a et D_b successivement et indépendamment ; on considère le total de points ainsi ramené et sa probabilité d'apparition. Les dés envisagés sont tétraédriques, comme dans le croquis ci-contre. En questions 1. et 2., leurs quatre faces sont standards, numérotées 1, 2, 3, 4. Le numéro tiré est celui de la face sur laquelle repose le dé (sur la figure, 1 ou 3).



1. Donner les trois manières d'obtenir pour total 6, en déduire que la probabilité d'obtenir un total de 6 est $\frac{1}{12}$.
3. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire « somme des points obtenus ». Qu'indiquent les coefficients de l'expression polynomiale $P(x) = (x+x^2+x^3+x^4)^2$ une fois développée ? Expliquer.

Pour plus d'originalité, on prend maintenant des dés non standards : un dé D_1 aux faces numérotées 1, 1, 2, 5 et un dé D_2 aux faces numérotées 1, 4, 4, 4.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un total de 6 ?

De manière générale, le dé D_a a quatre faces dont les valeurs $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ vérifient $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ et sont stockées dans un tableau $t_a = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4]$. De même, le dé D_b a quatre faces $b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4$ vérifiant $1 \leq b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4$ et stockées dans le tableau $t_b = [b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4]$. On définit les quantités polynomiales $A(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + x^{a_3} + x^{a_4}$ et $B(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + x^{b_3} + x^{b_4}$. Par exemple, les dés de la question 3. donnent lieu à $t_a = [1,\ 1,\ 2,\ 5],\ t_b = [1,\ 4,\ 4,\ 4],\ A(x) = 2x + x^2 + x^5$ et $B(x) = x + 3x^4$.

4. Déterminer $t_a, t_b, A(x), B(x)$ attachés aux dés D_a et D_b de faces 1, 2, 2, 3 et 1, 3, 3, 5.

1. Le tableau ci-contre donne les combinaisons possibles lors du jet de deux dés tétraédriques et les sommes obtenues. Il y a 16 cases, dont trois portant le total de 6. La probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{3}{16}$.
2. On fait de même pour l'ensemble des résultats possibles :

Total	2	3	4	5	6	7	8
Probabilité	1/16	1/8	3/16	1/4	3/16	1/8	1/16

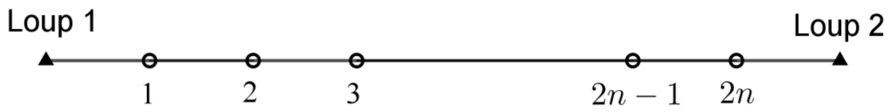
Le développement proposé donne : $P(x) = 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 1x^8$ (contrairement aux habitudes, on a fait apparaître le coefficient 1, pour le rendre plus visible). Les exposants de la variable qui figurent dans l'expression développée sont des sommes d'exposants figurant dans chacun des facteurs initiaux (il se trouve qu'ici ce sont les mêmes facteurs, mais le résultat est général). Le coefficient de x^s dans le produit est la somme des produits des coefficients des x^a du premier facteur et des x^b du second facteur pour lesquels $a + b = s$. On ne « voit » pas ces produits de coefficients dans l'exemple traité, car ils sont tous égaux à 1…

3. On reprend le tableau réalisé plus haut avec les nouvelles données. Selon ce tableau, quatre jets (sur 16 possibles) conduisent à un total de 6. La probabilité d'obtenir 6 est donc $\frac{1}{4}$.

Dé D_1 \ Dé D_2	1	4	4	4
1	2	5	5	5
1	2	5	5	5
2	3	6	6	6
5	6	9	9	9

4. Les tableaux attachés aux (nouveaux) dés D_a et D_b sont :
$t_a = [1, 2, 2, 3]$ et $t_b = [1, 3, 3, 5]$ et les quantités polynomiales
$A(x) = x + 2x^2 + x^3$ et $B(x) = x + 2x^3 + x^5$

Exercice 3 La raison du plus fort…



Deux loups, immobiles, sont placés aux extrémités d'un chemin rectiligne fréquenté par des agneaux. À chaque étape, un agneau double la distance qui le sépare du loup le plus proche, quitte à se rapprocher éventuellement de l'autre loup. On suppose que le chemin a pour longueur l'entier $2n + 1$ et que, sur ce chemin, les agneaux ne peuvent se trouver qu'aux points d'abscisses entières comprises entre 1 et $2n$. Par exemple, pour $n = 2$, on a un chemin de longueur 5, et si l'agneau se trouve en 3, il passe en 1, puis en 2, puis en 4 et revient en 3.

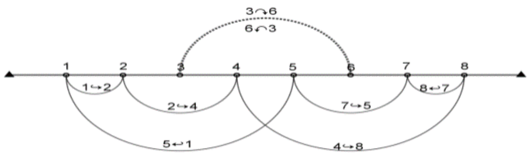
Déplacement d'un agneau

On suppose dans cette partie que le chemin est de longueur 9 ($n = 4$).
1. *a.* L'agneau se trouve initialement en position 4. Quelles sont toutes les positions qu'il peut atteindre ?
b. Et s'il part de la position 3 ?
c. Est-il vrai, quand $n = 4$, que l'agneau retrouve un jour sa position initiale quel que soit son point de départ ?

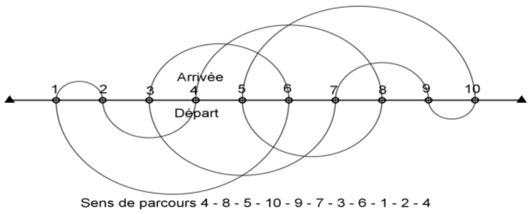
Un agneau en orbite

On appelle orbite d'un entier k compris entre 1 et $2n$ l'ensemble des positions possibles pour un agneau se trouvant initialement en position k.
2. On suppose dans cette question que $n = 5$.
a. Quelle est l'orbite de 2 ?
b. En déduire les orbites des entiers compris entre 1 et 10.
3. On suppose dans cette question que $n = 7$.
Combien y a-t-il d'orbites distinctes dans ce cas ?
4. Au cours de ses déplacements, un agneau se trouve en position k. Quelle était sa position précédente ?

5. Montrer que, pour tout n et tout k, où $1 \leq k \leq 2n$, quand un agneau part de la position k, il retrouvera à nouveau cette position dans son périple

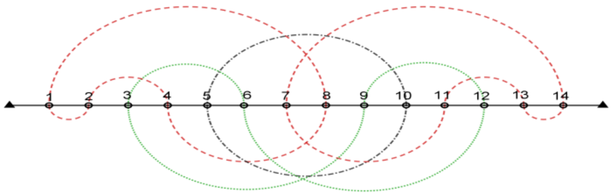


1. *a.* et ***b.*** Comme le montre la figure ci-contre, les positions occupées par l'agneau parti de 4 sont successivement 8, 7, 5, 1, 2 et 4, etc. tandis que l'agneau partant de 3 occupe ad libitum les places 6 et 3.
c. Le parcours au départ de la position 4 est fermé, toutes les positions 4, 8, 7, 5, 1, 2 sont revisitées en 6 mouvements. Au départ de la position 3, on répète les positions 6 et 3. Tout point de départ est donc retrouvé.

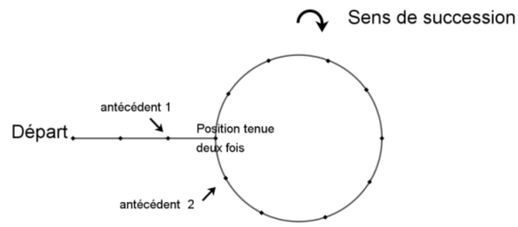


2. *a.* La figure ci-contre illustre le fait que l'orbite de 2 est {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 9, 10}.
b. Tous les entiers compris entre 1 et 10 ont la même orbite.

3. Dans le cas $n = 7$



La figure de gauche montre 4 orbites distinctes, et une symétrie par rapport à la médiatrice du segment (qui représente le chemin). $\Omega_1 = \{1, 2, 4, 8\}, \Omega_2 = \{3, 6, 12, 9\}, \Omega_3 = \{5, 10\}$ et $\Omega_4 = \{7, 14, 13, 11\}$.
4. Le chemin a pour longueur $2n + 1$. Supposons qu'un agneau occupe à un certain instant la position p. Si $p \leq n$, il double la distance qui le sépare du loup le plus proche, Loup 1, et va en $2p$. Si $p > n$, il double la distance qui le sépare du loup le plus proche, Loup 2, et va en $p - (2n + 1 - p) = 2p - 2n - 1$. La séparation entre les deux situations est repérée par la parité.
Conclusion : un agneau occupant une position k paire, disons $k = 2p$, vient de la position p. Un agneau occupant une position impaire, disons $k = 2p + 1$, vient de la position $n + p + 1$.



5. C'est le théorème de la poêle à frire (dessin en regard). Supposons un agneau partant de la position k. Son parcours contient nécessairement une position visitée deux fois (ce parcours occupe au plus $2n$ cases et comporte plus de $2n$ étapes). D'après ce qui précède, cette position visitée deux fois ne peut l'être qu'après une visite de son **seul** antécédent, qui est donc lui aussi visité deux fois. Si on représente ce parcours avec une boucle, le raisonnement précédent fait entrer l'antécédent 1 dans la boucle en l'identifiant à l'antécédent 2, et ainsi de suite jusqu'au k de départ. Donc le point de départ est dans la boucle.

Exercice 4 Généalogie
Dans un bourg assez isolé qui compte 2 020 habitants, on observe que :
- Chaque habitant connaît au moins un autre habitant portant le même nom que lui ;
- Dans tour groupe de 192 habitants, il y en a au moins trois qui portent le même nom.
Montrer qu'il existe un groupe de 22 personnes ayant le même nom.

Supposons qu'il y ait dans le village plus de 96 noms. On peut alors former deux groupe de 96 personnes, dans chacun desquels sont portés 96 noms. Avec ces deux groupes, on en fait un de 192 personnes dans lequel chaque nom est porté par au plus deux personnes. Contradiction. Il y a donc au plus 95 noms pour l'ensemble des habitants, il y a donc un nom porté par au moins le quotient de 2 020 par 95, arrondi à l'entier supérieur, 22.

« Principe des tiroirs » ou « piegeonhole »

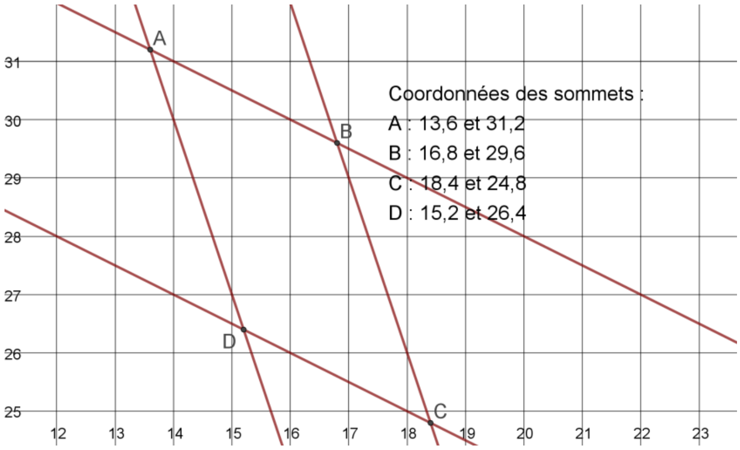
Équations

Exercice 1 Couperet et troncature
Mon boucher me fait toujours cadeau des centimes. Par exemple, j'ai pris 300 g de filet à 34,3 euros le kilo, 240 g de viande hachée à 8,6 euros le kilo, et 640 g de blanc de poulet à 12,99 euros le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.
Deux tickets d'anciens achats indiquent :
– 750g de côtelettes, 250g de rôti. Total : 18 euros ;
– 250g de côtelettes, 500g de rôti. Total : 17 euros.
Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti (on donnera toutes les solutions) ?

Notons x le prix du kilogramme de côtelettes et y celui du kilogramme de rôti. En notant $[.]$ la partie entière, les hypothèses indiquées par les tickets sont :

$$\begin{cases}[0{,}75x]+[0{,}25y]=18\\ [0{,}25x]+[0{,}5y]=17\end{cases}$$

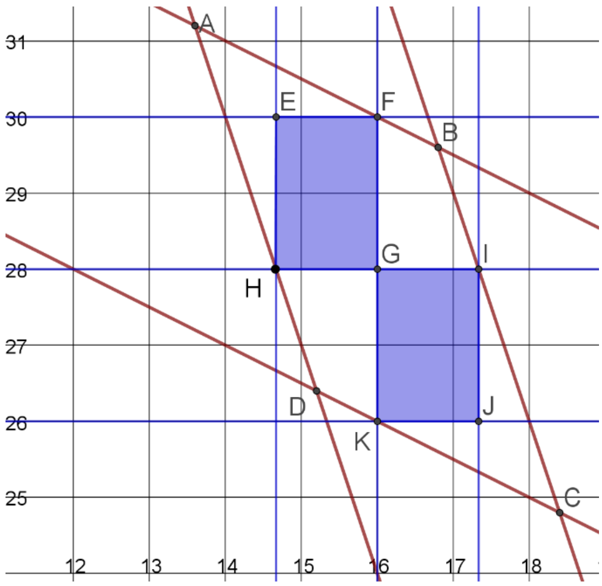
Ces hypothèses entraînent que : $\begin{cases}18\leq 0{,}75x+0{,}25y<20\\ 17\leq 0{,}25x+0{,}5y<19\end{cases}$, ce que nous pouvons traduire graphiquement : sur le graphique suivant, le point de coordonnées (x,y) doit se situer à l'intérieur du parallélogramme défini par les droites d'équations $0{,}75x+0{,}25y=18$, $0{,}75x+0{,}25y=20$, $0{,}25x+0{,}5y=17$, $0{,}25x+0{,}5y=19$



Ces conditions sont nécessaires…
Pour le point D, par exemple :
$0{,}75\times 15{,}2+0{,}25\times 26{,}4=18$, évidemment, mais $[0{,}75\times 15{,}2]=11$ et $[0{,}25\times 26{,}4]=6$ et $11+6\neq 18$.
Il faut donc regarder ce que donnent explicitement les sommes des parties entières pour des intervalles « inspirés » par les inégalités précédentes. On cherche donc à évaluer $[0{,}75x]+[0{,}25y]$ et $[0{,}25x]+[0{,}5y]$ pour x compris entre 13 et 19 et y entre 24 et 31.
On dresse un tableau :

x	12	$13+\frac{1}{3}$	$14+\frac{2}{3}$	16	$17+\frac{1}{3}$	$18+\frac{2}{3}$	19			
$[0{,}75x]$	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**				
$[0{,}25x]$	**3**			**4**						
y	24		26		28		30		31	
$[0{,}5y]$	**12**		**13**		**14**		**15**			
$[0{,}25y]$	**6**				**7**					

On obtient donc $[0{,}75x]+[0{,}25y]=18$ pour $[0{,}75x]=11$ et $[0{,}25y]=7$ ou pour $[0{,}75x]=12$ et $[0{,}25y]=6$, et $[0{,}25x]+[0{,}5y]=17$ pour $[0{,}25x]=4$ et $[0{,}5y]=13$ ou $[0{,}25x]=3$ et $[0{,}5y]=14$



Cette partie « utile » du parallélogramme est indiquée sur le figure ci-contre.

Plus généralement, ce qu'on vient de faire indique que la condition nécessaire et suffisante, portant sur les prix, qu'on peut obtenir, enferme les prix cherchés dans une réunion de produits d'intervalles (les rectangles) et qu'il est exceptionnel d'obtenir mieux.
Incidemment, tout ordinateur calcule sur des troncatures et des protocoles sont nécessaires pour éviter les erreurs dues à ces incertitudes (norme IEEE 754).

Exercice 2 Presque pareilles

Deux entiers naturels non nuls m et n sont tels que les équations $x^2+mx+n=0$ et $x^2+nx+m=0$ n'admettent chacune que des solutions entières, et au moins une. Quels sont les couples (m,n) ?

L'existence de solutions est assurée par la positivité du discriminant. On doit donc avoir $m^2 - 4n \geq 0$ et $n^2 - 4m \geq 0$, conditions qui conduisent à $m^2 \geq 4\sqrt{4m}$ ou encore $\sqrt{m}\left(m\sqrt{m} - 8\right) \geq 0$, et donc $m \geq 4$. Par symétrie, $n \geq 4$.
Les solutions des deux équations sont négatives (leur produit est positif et leur somme négative). La plus grande des deux, par exemple pour la première équation est $\frac{-m+\sqrt{m^2-4n}}{2}$. Elle n'est pas nulle (sinon on aurait $m = 0$ ou $n = 0$), elle est donc inférieure à -1, ce qui donne $\sqrt{m^2 - 4n} \leq -2 + m$. Les deux membres sont positifs : $m^2 - 4n \leq m^2 - 4m + 4$ et donc

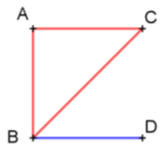
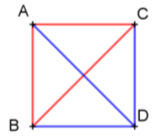
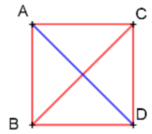
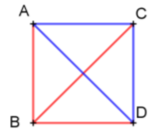
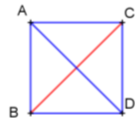
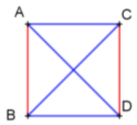
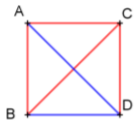
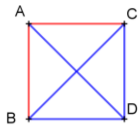
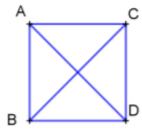
$$m - n \leq 1$$

Comme m et n sont des entiers strictement positifs, deux situations sont possibles : $m = n$ et $m = n + 1$ (on prendra les symétriques des couples solutions à la fin)
Si $m = n$, alors le discriminant $m^2 - 4m$ doit être un carré parfait de même parité que m. Mais $m^2 - 4m = p^2$ s'écrit aussi $(m-2)^2 = p^2 + 4$. La seule possibilité est $m = 4$.
Si $m = n + 1$, $n^2 - 4m = n^2 - 4n - 4 = (n-2)^2 - 8$ qui conduit à $n = 5$ et aux couples solutions (6, 5) et (5, 6).
On achève par une réciproque.

Graphes

Un graphe complet compte 30 sommets. Ses arêtes sont de l'une des deux couleurs, rouges ou bleues. Une *opération* consiste à choisir deux arêtes de même couleur d'un sous-graphe à 3 sommets et leur donner la couleur de la troisième arête pour obtenir un sous-graphe monochromatique.
Est-il possible, en répétant ces *opérations*, d'obtenir un graphe monochromatique ?

Le nombre total d'arêtes est impair (15x29). Une des deux couleurs apparaît donc un nombre impair de fois et l'autre un nombre pair. Supposons les arêtes bleues en nombre impair. La parité ne change pas au cours des *opérations.*
Supposons qu'après un certain nombre d'*opérations*, il reste au moins deux arêtes rouges. Elles ne peuvent appartenir au même 3-sous-graphe, sinon il n'y aurait qu'à les repeindre en bleu.
Alors :

<table>
<tr><td>
</td><td colspan="3">Si les arêtes AB et AC sont rouges, alors l'arête BC est rouge aussi, sinon on fait une opération. Un autre sommet D est relié aux points A, B et C par 3 arêtes. Si elles ne sont pas toutes de la même couleur, on peut supposer DB bleue et DA rouge mais alors cela fait deux arêtes rouges pour ABD. Opération.
Ces arêtes sont donc toutes de la même couleur, bleues. La ligne ci-dessous montre une succession de trois opérations qui accroissent le nombre d'arêtes bleues, censé être maximal. Elles ne peuvent être rouges (le nombre d'arêtes bleues est impair et doit le rester comme dans la figure précédente)</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="4">Si les arêtes AB et AC sont rouges, on procède à de nouvelles opérations qui augmentent le nombre d'arêtes bleues, comme ci-dessous.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>