Étude d'une suite définie par une relation de récurrence

Énoncé

On considère la suite récurrente (u_n) de premier terme $u_1 = 0$ et telle que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$$

1. (a) En utilisant un tableur ou une calculatrice, donner les 40 premiers termes de cette suite.
   (b) Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées (n, u_n).
   (c) En observant le nuage de points, quelles conjectures peut-on faire sur le comportement de cette suite ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures.

2. On cherche à déterminer une formule qui permette de calculer u_n en fonction de n.
   (a) Compléter le tableau de valeurs en faisant figurer le calcul de $\frac{1}{u_n - 1}$ pour les 40 premiers termes de la suite (u_n).
   (b) Conjecturer l'expression explicite de u_n en fonction de n.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

3. Démontrer la formule conjecturée.

Production demandée

– Visualisation à l'écran du tableau de valeurs et du nuage de points.
– Démonstration.

Étude d'une courbe de Bézier

Énoncé

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère les points A de coordonnées $(0\,;6)$, B de coordonnées $(2\,;\,0)$ et C de coordonnées $(4\,;\,6)$.
Soit t un réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$. On définit les points :
– G barycentre du système de points pondérés $\{(A;1-t),(B;t)\}$;
– H barycentre du système de points pondérés $\{(B;1-t),(C;t)\}$;
– M barycentre du système de points pondérés $\{(G;1-t),(H;t)\}$.
Le but de l'exercice est d'étudier le lieu des points M quand t décrit l'intervalle $[0;1]$, et la position de cet ensemble par rapport aux droites (AB) et (BC).

Partie A

1. Réaliser la figure avec un logiciel de géométrie dynamique.
   Tracer les droites (AB) et (BC), puis faire apparaitre le lieu décrit par le point M lorsque t varie.

   Appeler l'examinateur pour lui montrer le lieu du point M.

2. Quelle semble être la position des droites (AB) et (BC) par rapport au lieu obtenu ?
3. Sur quelle courbe semble se déplacer le point M ?

   Appeler l'examinateur pour annoncer les conjectures et décrire la démarche.

Partie B

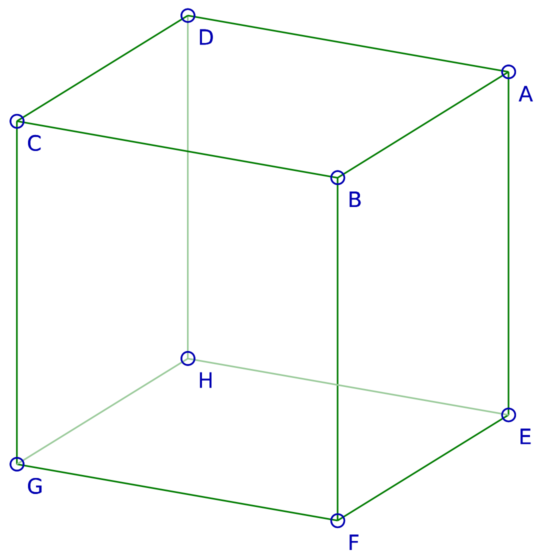
4. Déterminer en fonction de t les coordonnées des points G, H et M.
5. Valider ou invalider la conjecture émise à la question 3.
   Donner l'expression analytique du lieu du point M.

Production demandée

– Visualisation du lieu du point M.
– Énoncé des conjectures : courbe décrite par le point M et position des droites (AB) et (BC) par rapport à cette courbe.
– Réponses pour les questions 4. et 5.

Lieu géométrique de points dans l'espace

Énoncé



Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}$, on considère le cube ABCDEFGH reproduit ci-contre. On note I le centre de la face EFGH et J le milieu du segment [IF].
Pour tout réel m de l'intervalle $[0;1]$, on note M le barycentre des points pondérés suivants $(\text{E};m)$, $(\text{F};2m)$, $(\text{G};m)$, $(\text{C};4-4m)$.
Le but de l'exercice est de trouver le lieu du point M lorsque m décrit l'intervalle $[0;1]$.

1. (a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace, construire le cube ABCDEFGH ainsi que les points I et J.

   Appeler l'examinateur pour vérifier la figure construite.

   (b) Construire le point M barycentre du système de points pondérés $(\text{E};m)$, $(\text{F};2m)$, $(\text{G};m)$, $(\text{C};4-4m)$ pour $m \in [0;1]$.

   (c) Émettre une conjecture quant au lieu du point M lorsque m décrit l'intervalle $[0;1]$.

   Appeler l'examinateur pour vérifier la conjecture faite.

2. (a) Démontrer que les points M, F, I et C sont coplanaires.

   (b) Déterminer une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{\text{CM}}$ et $\overrightarrow{\text{CJ}}$.

   (c) Conclure alors quant au lieu du point M lorsque m décrit l'intervalle $[0;1]$.

Production demandée

- Construction de la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
- Énoncé de la conjecture.
- Relation et démonstrations demandées dans la question 2.

Suite définie par une sommation

Énoncé

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$v_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

1. À l'aide d'un outil adapté, calculer les 500 premiers termes de la suite (v_n).
   Quelle conjecture peut-on faire concernant la convergence de cette suite ?

   Appeler l'examinateur pour une validation des calculs et de la conjecture.

2. Rechercher, dans les deux cas suivants, à l'aide de l'outil choisi, un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait :
   (a) $v_{n+1} - v_n \leqslant 10^{-3}$;
   (b) $v_{n+1} - v_n \leqslant 10^{-5}$.

   Comment interpréter ces résultats au regard de la conjecture émise à la question 1 ?

   Appeler l'examinateur pour une validation des résultats et de l'interprétation.

3. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose $x_n = v_n + \dfrac{1}{n}$.
   À l'aide de l'outil choisi, calculer les 500 premiers termes de la suite (x_n) puis représenter graphiquement les suites (v_n) et (x_n).
   Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de ces deux suites ?

   Appeler l'examinateur pour une validation des calculs et de la conjecture et pour proposer une démarche pour la question 4.

4. (a) Démontrer la conjecture émise à la question 3.
   (b) Conclure sur la convergence de la suite (v_n).

Production demandée

- Obtention des 500 premières valeurs des suites (v_n) et (x_n), ainsi que la représentation graphique de ces valeurs.
- Obtention des valeurs de n_0 à la question 2.
- Réponses argumentées pour la question 4.

Distance minimale d'un point à une courbe

Énoncé

Dans un repère orthonormal d'origine O, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction logarithme népérien.
On s'intéresse à la distance OM lorsque M parcourt $\mathscr{C}$. Le but de l'exercice est de préciser si cette distance peut être rendue minimale et de caractériser le ou les point(s) M, s'il en existe, situé(s) sur $\mathscr{C}$ et rendant cette distance minimale.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire une figure permettant d'explorer cette situation.
2. Cette distance semble-t-elle minimale pour un (ou plusieurs) point(s) particulier(s) de $\mathscr{C}$? Si oui donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette plus petite distance et de l'abscisse de ce(s) point(s).

   Appeler le professeur pour une vérification de la figure construite et des conjectures émises.

3. Tracer la droite (OM) ainsi que la tangente en M à la courbe $\mathscr{C}$. Que semble-t-il se passer lorsque M est positionné sur la courbe $\mathscr{C}$ de sorte que la distance OM soit minimale ?

   Appeler le professeur pour une vérification de la conjecture.

Partie B

4. Quelle relation doit vérifier l'abcisse x_0 d'un point M_0 en lequel la distance OM est minimale ?

   Appeler le professeur pour lui présenter la méthode envisagée et une vérification de la relation éventuellement obtenue.

5. Prouver la conjecture élaborée dans la question 3.

Production demandée

- Les différentes étapes des stratégies prévues pour répondre aux questions 4. et 5.
- La mise en forme de l'une de ces étapes.

Intersection de tangentes

Énoncé

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{1+x} + e^{1-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g.
Pour tout réel a , on note :
– A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et T_A la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A,
– B le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a et T_B la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point B,
– M $(x_M\ ;\ y_M)$ le point d'intersection des tangentes T_A et T_B.
On souhaite étudier le lieu géométrique $\mathscr{E}$ du point M lorsque a varie dans $\mathbf{R}$.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :
   (a) Construire les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ainsi que les tangentes T_A et T_B.
   (b) Construire le point M.

   Appeler l'examinateur pour valider la figure, ou en cas de difficultés.

   (c) En observant la situation obtenue avec plusieurs valeurs de a, dire quelle relation semble exister entre les réels a et x_M .

   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

2. Tracer le lieu $\mathscr{L}$ du point M. Ce point semble appartenir à la courbe représentative $\mathscr{E}$ d'une fonction connue, quelle est cette fonction ? Comment peut-on vérifier cette conjecture ?

   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

Partie B

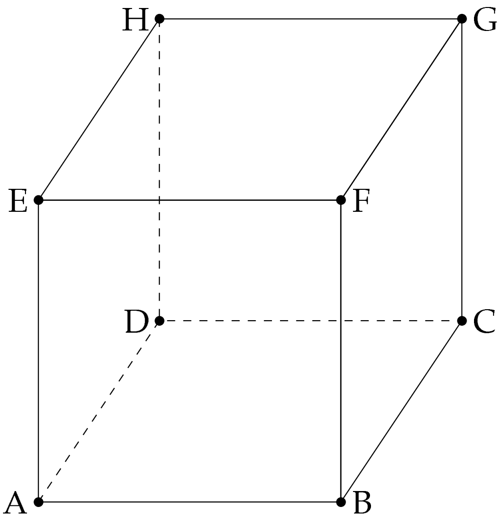
3. Démontrer que $\mathscr{L}$ fait effectivement partie de $\mathscr{E}$. Que dire de plus ?

Production demandée

– Courbes demandées aux questions 1 et 2.
– Réponse à la question 3.

Volume d'un tétraèdre

Énoncé



On considère un cube de l'espace, formé par ses sommets ABCDEFGH (voir figure ci-contre). Sur la demi-droite [AE) on considère un point variable K.
Le but de l'exercice est de rechercher une position du point K, pour laquelle le volume du tétraèdre BDGK est égal à la moitié du volume du cube.

1. À l'aide d'un logiciel représenter un cube ABCDEFGH.
   Placer un point K variable sur la demi-droite [AE).

   Appeler l'examinateur en cas de difficulté

2. Pour quelle position du point K le volume du tétraèdre BDGK semble-t-il être égal à la moitié de celui du cube ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la position du point K trouvée.

3. En supposant que K occupe la position trouvée à la question 2., conjecturer la nature des triangles KGB et KDG à l'aide du logiciel.

   Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures faites.

4. Démontrer que lorsque le point K occupe la position trouvée à la question 2., le volume du tétraèdre BDGK est bien la moitié du volume du cube.

Production demandée

– Affichage des valeurs numériques nécessaires pour émettre la conjecture de la question 2.
– Éléments de preuve pour la question 4.

Recherche d'un point fixe

Énoncé

Dans le plan complexe orienté, on considère un triangle OO′A de sens direct, rectangle en O. On considère M un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et passant par A. On désigne par S la similitude directe de centre A qui transforme O en O′ et on désigne par M′ le point image de M par la similitude S. On cherche à prouver que la droite (MM′) passe par un point fixe.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie plane, construire la figure associée à la situation décrite ci-dessus.
2. Construire l'image $\mathscr{C}'$ du cercle $\mathscr{C}$ par la similitude S. Caractériser cet ensemble $\mathscr{C}'$.
3. Quelle conjecture peut-on émettre pour la droite (MM′) lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction faite.

On appelle A et B les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

4. On pose $S(\text{B}) = \text{B}'$. Quelle propriété relative est vérifiée par les triangles ABB′ et AOO′ ? Justifier.
5. Positionner le point M afin que le point B soit entre les points M et M′.
6. Donner des arguments mathématiques permettant de prouver que les points M, B et M′ sont alignés.

Appeler l'examinateur pour vérification.

Production demandée

- La figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique.
- La caractérisation de l'ensemble $\mathscr{C}'$.
- La justification de la propriété de la question 4.
- La justification de la conjecture de la question 3. seulement dans le cas où le point B est entre les points M et M′.

Suites, approximation d'un réel

Énoncé

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 9$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$b_n = \frac{25}{a_n^2} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$$

On se propose d'étudier la monotonie et la limite de chacune de ces deux suites.

Partie A

1. Sur un tableur, créer trois colonnes donnant les valeurs de n, de a_n et de b_n, pour n entier variant de 0 à 20.
2. En observant les résultats obtenus sur le tableur, conjecturer, pour chacune des suites (a_n) et (b_n), la monotonie et une valeur approchée de la limite à 10^{-6} près.

Appeler l'examinateur pour lui présenter les tableaux et les conjectures.

3. On considère la suite (c_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 0$, par $c_n = a_n^3$.
Créer une nouvelle colonne du tableur pour calculer les termes c_n, pour n variant de 0 à 20.
Émettre alors une conjecture sur la valeur exacte de la limite de la suite (a_n).
4. Conjecturer de même la valeur exacte de la limite de la suite (b_n).

Appeler l'examinateur

Partie B

5. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $b_n^3 \leqslant 25 \leqslant a_n^3$.
Après avoir vérifié que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $a_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{3}$, démontrer les résultats conjecturés à la question 2. sur la monotonie des suites (a_n) et (b_n).

Appeler l'examinateur pour lui présenter le schéma de la démonstration.

6. Citer les théorèmes qui permettent de conclure que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

Appeler l'examinateur pour lui donner la réponse attendue.

7. On désigne par ℓ et ℓ' les limites respectives des suites (a_n) et (b_n).
En utilisant les relations qui définissent ces deux suites, démontrer les résultats conjecturés aux questions 3. et 4. sur les valeurs exactes des réels ℓ et ℓ'.

Appeler l'examinateur

Production demandée

- Obtention à l'écran des termes a_n, b_n et c_n, pour n entier variant de 0 à 20.
- Conjecture sur les valeurs exactes des limites des suites (a_n) et (b_n).
- Démarches et réponses argumentées aux questions 5. et 7.

Aire variable d'un triangle

Énoncé

Soit un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = e^x - 1$.

Soit B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1, et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a, a étant un nombre réel de l'intervalle $[0\,;1]$.

On s'intéresse à l'aire du triangle OAB et à la variation de cette aire en fonction de a.

Partie A

1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   Appeler l'examinateur pou rlui présenter la figure construite.

2. Afficher à l'écran l'aire du triangle OAB.
   En faisant varier a, chercher une valeur approchée de la valeur de a pour laquelle l'aire du triangle OAB est maximale. Donner une valeur approchée de cette aire maximale.

   Appeler l'examinateur pour lui exposer la conclusion.

3. Pour tout a dans l'intervalle $[0;1]$, on note $f(a)$ l'aire du triangle OAB. Construire l'ensemble des points $M(a\,;f(a))$. Retrouver les résultats de la question précédente.

   Appeler l'examinateur pour lui présenter la courbe obtenue et lui proposer la démarche envisagée pour la question suivante.

Partie B

4. (a) Déterminer l'expression de $f(a)$ en fonction de a.

   (b) En étudiant la fonction f, déterminer la valeur exacte de la variable a pour laquelle la fonction f atteint son maximum et la valeur exacte de ce maximum.

Production demandée

– Visualisation à l'écran de la figure demandée et de l'ensemble des points M de la question 3.
– Affichage des valeurs approchées de a et de $f(a)$ pour lesquelles l'aire du triangle est maximale.
– Démarches et réponses argumentées à la question 4.

Optimisation en géométrie plane

Énoncé

Dans un repère orthonormal du plan, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $x \to e^x$ et la droite D d'équation $y = 2x - 3$.

On se propose de déterminer, s'il existe, un point M de $\mathscr{C}$ tel que la distance de M à la droite D soit minimale.

Partie A

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour construire la droite D et la courbe $\mathscr{C}$.
2. Placer un point mobile M sur $\mathscr{C}$ et construire le point N image de M par la projection orthogonale sur D.
3. Conjecturer, au moyen du logiciel, l'abscisse du point M_0 de $\mathscr{C}$ dont la distance à D est minimale.
   Proposer une valeur approchée de cette distance minimale.
   Conjecturer une propriété de la tangente en M_0 à $\mathscr{C}$.

> Appeler l'examinateur pour lui présenter les constructions, la valeur approchée et les conjectures.

Partie B

4. Élaborer une méthode permettant de démontrer ces conjectures.

> Appeler l'examinateur pour lui présenter la méthode.

5. Calculer les coordonnées de M_0 et sa distance à D.

Production demandée

– Construction de $\mathscr{C}$, D, M et N au moyen du logiciel de géométrie.
– Conjectures relatives à l'abscisse de M_0 et à la tangente en M_0 à $\mathscr{C}$.
– Proposition d'une valeur approchée de la distance de M_0 à D.
– Calcul des coordonnées de M_0 et de sa distance à D.

Simulation d'un tirage de boules dans des urnes

Énoncé

On dispose de deux urnes U et V contenant des boules indiscernables au toucher. L'urne U contient dix boules numérotées de 1 à 10. L'urne V contient dix boules numérotées de 0 à 9. Un jeu se déroule de la manière suivante : le joueur verse une mise initiale de 100 jetons, puis il tire au hasard une boule dans l'urne U et une boule dans l'urne V de façon indépendante. Chaque boule portant un numéro inférieur ou égal à 4 rapporte a jetons où a est un naturel non nul, le tirage d'une autre boule ne rapporte ni ne fait perdre aucun jeton. On regarde à l'issue de ce jeu le gain algébrique (gain ou perte) compté en jetons.

Partie A

1. On simule 1000 exécutions du jeu sur un tableur. On fixe dans un premier temps $a = 150$.
   (a) Réaliser une feuille de calcul sur le modèle suivant :

	A	*B*	*C*	*D*
1	Rang du tirage	Numéro de la boule tirée dans l'urne U	Numéro de la boule tirée dans l'urne V	Gain algébrique
2	1			
3	2			
⋮	⋮			
1001	1000			

Appeler l'examinateur pour vérifier la feuille de calcul.

   (b) Déterminer la moyenne des gains obtenus lors de cette simulation.
   (c) À l'aide d'autres simulations, conjecturer la valeur vers laquelle semble tendre la moyenne des gains obtenus.

Appeler l'examinateur pour vérifier la démarche et la conjecture.

2. On souhaite faire varier la valeur de a.
   (a) Adapter la feuille de calcul pour obtenir des simulations en fonction de a.
   (b) Est-il possible de donner une valeur à a qui paraisse rendre le jeu équitable ?

Appeler l'examinateur pour vérifier la démarche et la conjecture.

Partie B

3. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à l'issue d'un tirage.
   (a) Déterminer l'espérance de X en fonction de a.
   (b) Est-il possible de trouver a afin que le jeu soit équitable ?
   (c) Comparer le résultat avec les conjectures obtenues dans la Partie A.

Production demandée

- Visualisation à l'écran de la feuille de calcul.
- Réponses argumentées pour les questions posées en 3.(a), 3.(b) et 3.(c).

Propriétés de la courbe représentative d'une fonction

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2+4}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

Soit a un réel quelconque, M et N les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a et $-a$.

1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de votre choix.

   Appeler l'examinateur pour vérification de la figure.

2. Faire varier a et émettre des conjectures concernant respectivement :
   - la droite (MN) ;
   - le lieu du point I intersection des tangentes à $\mathscr{C}$ en M et N.

   Appeler l'examinateur pour vérification des conjectures.

3. On se propose d'étudier les conjectures émises à la question précédente.
   (a) Déterminer en fonction de a les coordonnées des points M et N.
   (b) Justifier les conjectures émises à la question 2.

Production demandée

- Visualisation à l'écran du lieu du point I.
- Réponses argumentées aux questions 3.(a) et (b) .

Une propriété des diviseurs de certains entiers

Énoncé

On dit qu'un entier naturel non nul N est *en division harmonique* si le quotient du nombre de diviseurs de N par la somme des inverses des diviseurs de N est un entier (c'est-à-dire, que le nombre des diviseurs est un multiple de la somme des inverses des diviseurs).

Par exemple :

- 6 admet **4** diviseurs qui sont 1 ; 2 ; 3 et 6 ;
- la somme des inverses des diviseurs de 6 vaut : $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\mathbf{2}$;
- le quotient $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}}=2$ est un entier ;
- 6 est donc en division harmonique.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, dire si les nombres 32 et 140 sont en division harmonique.

Appeler l'examinateur pour vérification.

2. Pour tout entier n non nul on pose $q_n = 2^{n+1}-1$ et $\alpha_n = 2^n q_n$.
   (a) Déterminer à l'aide du logiciel les quatre (ou cinq si possible) premières valeurs de n pour lesquelles q_n est un nombre premier.
   (b) Pour chacune des valeurs trouvées, calculer le nombre de diviseurs de α_n et la somme des inverses des diviseurs de α_n. Que peut-on conjecturer ?

Appeler l'examinateur pour vérification

Partie B

3. Soit p un nombre premier.
   Montrer que p n'est pas en division harmonique.
4. On suppose que $q_n = 2^{n+1}-1$ est premier.
   (a) Donner la liste des diviseurs de α_n en fonction de q_n.
   (b) Que peut-on conclure si la somme des inverses des diviseurs de α_n vaut 2 ?
   (c) Montrer que la situation précédente est vérifiée.

Production demandée

– Questions 3 et 4.

Étude d'un ensemble de points

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ qui permet une assimilation à l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on définit le nombre complexe $f(z) = \frac{1}{2}(1 + i)z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

On pose $a_0 = 4 + 2i$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{n+1} = f(a_n)$, et on note A_n le point d'affixe a_n dans le repère $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel adapté, calculer a_n pour n variant de 1 à 30.
   (b) Représenter le nuage des points A_n pour n variant de 1 à 30. Que constate-t-on ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les calculs et le graphique réalisés.

2. Soit J le point d'affixe i. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $d_n = JA_n$.
   (a) Calculer d_n pour n variant de 1 à 30.
   (b) Représenter le nuage des points de coordonnées (n, d_n) pour n variant de 1 à 30. Que constate-t-on ?
   (c) Conjecturer la nature de la suite (d_n).

   Appeler l'examinateur pour lui présenter le travail réalisé.
   Lui proposer des conjectures relatives à la suite (d_n).

Partie B

3. (a) Soit S la transformation du plan, d'écriture complexe $z' = \frac{1}{2}(1 + i)z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.
   Préciser la nature de S et déterminer ses éléments géométriques caractéristiques.
   (b) Déterminer la nature de la suite (d_n). Étudier sa convergence.
   (c) Interpréter les observations faites sur les points A_n représentés dans la question 1.(b).

Production demandée

- Affichage à l'écran des calculs et du graphique.
- Réponses argumentées pour la question 3.

Équation avec un paramètre

Énoncé

Dans cet exercice, on s'intéresse aux solutions positives de l'équation $(E) : \dfrac{x}{(2\ln x+1)^2} = mx$, où m est un paramètre réel.

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel adapté, tracer la courbe (C) représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(2\ln x+1)^2}$ et la droite (d) d'équation $y = mx$.
Conjecturer alors le nombre de solutions de l'équation (E).

   Appeler l'examinateur pour lui montrer le graphique et répondre à la question posée.

   (b) Dans cette question, m est un entier naturel non nul. On note a_m la plus petite des solutions de l'équation (E) et b_m, la plus grande. On s'intéresse aux suites (a_m) et (b_m).
Conjecturer, à l'aide du logiciel, les variations et la convergence de ces deux suites.
Que peut-on dire de ces deux suites ?

   Appeler l'examinateur pour lui exposer les conjectures faites et la démarche envisagée pour les questions à venir.

Partie B

2. (a) Calculer les expressions de a_m et b_m, en fonction de m.
   (b) Justifier le sens de variation de la suite (b_m).
   (c) Calculer la limite de cette suite.

Production demandée

– Visualisation à l'écran des représentations graphiques.
– Conjectures demandées.
– Réponse écrite et orale à la question 2.

Limites d'intégrales

Énoncé

Pour un entier naturel n non nul, on considère le nombre I_n défini par l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \, \mathrm{d}x.$$

On cherche à déterminer la limite éventuelle de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, tracer la courbe représentative de la fonction

$$f_n : x \to \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

2. Faire varier n. Quand n devient très grand, quelle est l'allure de la courbe représentative de f_n ?
3. Essayer alors de conjecturer une valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Appeler l'examinateur pour présenter la conjecture.

Partie B

4. Calculer une primitive de f_n sur $[0;1]$ et en déduire la valeur exacte de I_n.

Appeler l'examinateur pour une vérification.

5. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
6. En déduire la valeur exacte de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Production demandée

- Les représentations graphiques de la question 1.
- La rédaction des questions 5. et 6.

Divisibilité par 2, 3, 7 et 13 de certains entiers naturels

Énoncé

Pour tout entier naturel n non nul, on considère le nombre U_n défini par :

$$U_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}.$$

On cherche à déterminer si ce nombre peut être divisible par l'un ou plusieurs des nombres premiers suivants : 2 ; 3 ; 7 et 13.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, calculer $U_1, U_2, \cdots, U_{30}$.
2. Déterminer les listes des restes de la division de U_n par 2 ; par 3 ; par 7 et par 13.

   (a) Quelles conjectures peut-on en tirer ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

   (b) À quelle(s) condition(s) sur n, le nombre U_n semble-t-il être divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

Partie B

3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, U_n est divisible par 7 si, et seulement si, 7 divise $3^n - 1$.

   Appeler l'examinateur pour vérification

4. À l'aide de la question précédente, démontrer la conjecture émise pour 7.
5. Dans le cas où U_n est divisible par 7, U_n est-il divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

Production demandée

- Les différentes conjectures.
- La démonstration de la question 4 .

Un ensemble de points du plan construit à l'aide de deux suites

Énoncé

On construit deux suites (x_n) et (y_n) de la manière suivante :

Initialisation : $x_0 = 10$, $y_0 = 0$

Récurrence : pour tout entier naturel n, $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2 - \sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2 - \sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le point M_n de coordonnées (x_n, y_n). L'objectif est d'observer et d'étudier le nuage des points M_n obtenus, à l'aide d'un logiciel adapté.

Partie A

1. Placer dans un repère orthonormal adapté les points M_k pour k compris entre 0 et 30.

   Appeler l'examinateur pour qu'il vérifie la figure.

2. Une transformation du plan envoie M_0 sur M_1, M_1 sur M_2 et en général M_k sur M_{k+1}. Formuler une conjecture relative à la nature de cette transformation. En admettant que cette conjecture est vérifiée, essayer de préciser **au moins deux** des caractéristiques de cette transformation à partir de la figure affichée.

   Appeler l'examinateur pour lui proposer la conjecture et certains détails concernant cette transformation.

Partie B

3. On note z_n l'affixe du point M_n.
   En établissant une relation entre z_{n+1} et z_n de la forme $z_{n+1} = a.z_n$, démontrer les conjectures précédentes. On pourra chercher le module et l'argument de a^2.

Production demandée

- Réalisation de la figure demandée à l'aide du logiciel.
- Démonstration des conjectures relatives à la transformation.

Suites et fonctions

Énoncé

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 1$. On considère les fonctions f_n définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}}{n} - 1 + x\mathrm{e}^{1-x}$$

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, conjecturer, suivant les valeurs de n :
   (a) les variations de f_n.
   (b) le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 0$.
2. On note α_n et β_n les deux solutions, lorsqu'elles existent, de l'équation $f_n(x) = 0$ telles que $\alpha_n < \beta_n$.
   (a) Conjecturer, pour tout $x \geqslant 0$, une inégalité entre $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.
   (b) Quelle conjecture peut-on alors formuler à propos du sens de variation des suites (α_n) et (β_n), et de leur convergence éventuelle ?
   (c) Quelle propriété semblent vérifier les suites (α_n) et (β_n) ?

Appeler l'examinateur pour lui montrer le travail réalisé sur le logiciel et pour vérifier les conjectures formulées.

Partie B

3. (a) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet, à partir d'une certaine valeur de n, deux solutions distinctes α_n et β_n dans des intervalles que l'on précisera.

Appeler l'examinateur pour vérification.

   (b) Démontrer que les suites (α_n) et (β_n) sont de monotonies contraires.

Appeler l'examinateur pour vérification.

   (c) Que peut-on en déduire ?

Appeler l'examinateur pour vérification.

Production demandée

– Les différentes conjectures.
– Les démonstrations détaillées des questions 3 (a) et 3 (b).

Étude de la courbe représentative d'une fonction

Énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = (1-\sqrt{x})^2$.
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal.
On se propose d'établir une propriété de la courbe $\mathscr{C}$.

1. (a) Représenter la courbe $\mathscr{C}$ à l'aide d'un outil de géométrie dynamique.
   (b) Tracer la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0;1]$ par $g = f \circ f$ puis conjecturer une expression simple de $g(x)$, pour tout x appartenant à $[0;1]$.

   Appeler l'examinateur pour une vérification des constructions et de la conjecture émise.

2. (a) Placer un point M sur la courbe $\mathscr{C}$, puis construire le point M′ symétrique de M par rapport à la droite D d'équation $y = x$.
   (b) Quel semble être le lieu du point M′ lorsque M décrit la courbe $\mathscr{C}$?
   (c) Quelle propriété de la courbe $\mathscr{C}$ peut-on alors conjecturer ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification des constructions et des observations faites.

3. (a) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, exprimer $f \circ f(x)$ en fonction de x.
   (b) En déduire la propriété de la courbe $\mathscr{C}$ observée à la question 2.(c).

Production demandée

– Réalisation du graphique et construction pour observation du lieu du point M′.
– Démarche de démonstration pour les questions 3.(a) et 3.(b).

Recherche d'une stratégie de jeu

Énoncé

On dispose de trois urnes, notées A, B et C, contenant chacune 10 jetons indiscernables au toucher :
- l'urne A contient 4 jetons noirs et 6 jetons blancs
- l'urne B contient 7 jetons noirs et 3 jetons blancs
- l'urne C contient 6 jetons noirs et 4 jetons blancs.

Le jeu consiste à extraire successivement un jeton dans chacune des trois urnes, le joueur pouvant choisir d'effectuer ces tirages soit dans l'ordre A puis B puis C soit dans l'ordre A puis C puis B. Lorsque le jeton extrait de la 2^{e} urne est d'une couleur différente de celui de la 1re, le joueur gagne un point, sinon il perd un point.
Lorsque le jeton extrait de la 3^{e} urne est d'une couleur différente de celui de la 2^{e}, le joueur gagne un point, sinon il perd un point.

La partie est gagnée si le total des points marqués est égal à 2.
On se propose d'étudier si l'un des deux ordres de tirages proposés est plus favorable au joueur que l'autre.

1. (a) À l'aide d'un tableur, simuler 500 parties de ce jeu, en choisissant l'ordre A puis B puis C, et afficher la fréquence des parties gagnées.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la feuille de calcul.

   (b) Compléter la feuille de calcul par la simulation de 500 parties réalisées dans l'ordre A puis C puis B, et afficher la fréquence des parties gagnées.

   (c) Réaliser ainsi 10 simulations de 500 parties dans chacune des deux stratégies de jeu envisagées et compléter le tableau par la fréquence des parties gagnées, exprimée sous forme décimale approchée à 0,01 près.

Simulation n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Première stratégie										
Deuxième stratégie										

   Les résultats obtenus permettent-ils de conjecturer si l'une des deux stratégies de jeu envisagées est plus favorable que l'autre pour le joueur ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la feuille de calcul et lui proposer une conjecture.

2. Déterminer la probabilité de gagner une partie en appliquant l'une ou l'autre des stratégies de jeu. La conjecture émise est-elle validée ?

Production demandée

- Réalisation de la simulation.
- Réponse argumentée à la question 2.

Étude d'une figure du plan

Énoncé

Soit un triangle équilatéral direct ABC et soit D un point du segment [BC]. La parallèle à la droite (AC) menée par D coupe la droite (AB) en E et la parallèle à la droite (AB) menée par D coupe la droite (AC) en F. Soit le point G, centre de gravité du triangle ABC et les points H et A′, symétriques de G et A par rapport à la droite (BC). On définit les points I et J centres de gravité respectifs des triangles BDE et CDF.
On se propose d'étudier la nature du triangle HIJ quand D décrit le segment [BC].

1. (a) Représenter la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.

   (b) Quelle semble être la nature du triangle HIJ ?

   (c) Visualiser les lieux des points I et J lorsque le point D décrit le segment [BC].

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.
   Lui proposer les conjectures émises concernant le triangle HIJ et les lieux des points I et J.

2. On définit les similitudes directes S_1, de centre C, de rapport $\sqrt{3}$, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et S_2, de centre B, de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et leur commposée $f = S_2 \circ S_1$.

   (a) Déterminer les images de J et H par f.

   (b) Déterminer la nature et des éléments caractéristiques de f.

   (c) En déduire la nature du triangle HIJ.

Production demandée

– Réalisation de la figure.
– Réponse argumentée à la question 2.

Suites définies conjointement

Énoncé

Soit a un nombre réel non nul. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies par :

$$U_0 = a \quad \text{et} \quad V_0 = -\frac{3}{4}a$$
$$U_{n+1} = \frac{1}{5}(U_n + 4V_n) \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \frac{1}{5}(3U_n + 2V_n)$$

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel adapté, calculer et représenter graphiquement les 30 premiers termes de chacune de ces suites pour diverses valeurs du réel a.
   (b) Émettre une conjecture sur la limite de la suite (U_n). Cette limite dépend-elle de la valeur du réel a ?
   (c) Mêmes questions pour la suite (V_n).

Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

2. Il s'agit maintenant de conjecturer la possibilité pour la suite (U_n) d'être arithmétique ou géométrique.
   (a) Adapter la feuille de calcul pour aider à effectuer une conjecture sur la nature de (U_n).
   (b) Procéder de même pour conjecturer la nature de la suite (V_n).
   (c) On considère la suite (W_n) définie par $W_n = 3U_n + 4V_n$. Adapter la feuille de calcul précédente pour conjecturer une propriété de la suite (W_n).

Appeler l'examinateur pour qu'il vérifie les conjectures sur la nature de chaque suite.
Lui indiquer comment il est possible de démontrer la conjecture relative à la suite W_n.

Partie B

3. (a) Démontrer la conjecture relative à la suite (W_n).
   (b) En déduire U_{n+1} en fonction de U_n puis la limite de la suite (U_n).

Production demandée

– La feuille ou le procédé de calcul construit permettant les conjectures des questions 1. et 2.
– La démonstration de la question 3.(b).

Cryptage et décryptage d'un message

Énoncé

Préliminaire : *on se réfère dans ce sujet à un langage de programmation capable de traiter des nombres entiers et des caractères, ce qui est le cas de la plupart des langages y compris ceux que fournissent certaines calculatrices programmables. En informatique, le code ASCII consiste à associer à chaque caractère un code numérique qui est un entier compris entre 0 et 255. Ainsi, le code de @ vaut 64, celui de A est 65, etc.*

Questions de syntaxe : *dans la plupart des langages de programmation il existe une fonction appelée* `chr()` *ou* `char()` *ou* `car()` *et qui renvoie un caractère à partir de son code ASCII. On entre donc par exemple* `chr(65)` *pour obtenir la lettre A. La fonction réciproque est souvent nommée* `asc()` *ou* `ord()`*, de sorte qu'on tape* `ord("A")` *ou* `asc('A')` *(selon le langage) pour obtenir le nombre 65.*

Pour simplifier ce qui suit, *nous conviendrons de nous limiter à un sous-alphabet formé des lettres majuscules de A à Z et du caractère @ pour marquer les espaces. Dans ces conditions, la formule* `ord(c)-64` *renvoie un nombre compris entre 0 et 26 si la variable* `c` *contient une lettre de notre mini-alphabet.*

1. **Codage.**
   (a) En utilisant le codage décrit ci-dessus, coder le message suivant :

   BONJOUR@A@TOUS

   On définira un tableau pour ranger les lettres et un autre pour le codage du message.

   Appeler l'examinateur pour lui montrer l'écran du logiciel après remplissage.

   (b) On va crypter (chiffrer) le message au moyen de la fonction C qui, à tout n entier appartenant à $[0;26]$ associe le reste $C(n)$ de la division de $13n$ par 27. Adapter la procédure réalisée en 1.(a) pour obtenir les restes $C(n)$ correspondant à chaque code n, puis en déduire la lettre correspondante.

   Appeler l'examinateur pour validation des résultats.

2. **Décodage.** Notons D la fonction qui, à tout entier k appartenant à $[0;27]$, associe le reste de la division de $25k$ par 27. À partir des nombres cryptés trouvés précédemment, retrouver le message originel en utilisant la fonction D.

   Appeler l'examinateur pour vérification du résultat.

3. **Amélioration.** Le codage proposé ci-dessus est rudimentaire, notamment parce que le caractère d'espacement @ est invariant. On modifie donc la fonction C ainsi : $C(n)$ = reste de la division de $13n+8$ par 27. Comment faut-il modifier la fonction D ?

   Appeler l'examinateur pour lui proposer une réponse éventuelle à cette question.

4. **Justification du codage.** Pour le codage ASCII, deux lettres de l'alphabet sont codées par deux nombres distincts. Il faut donc s'assurer que le cryptage choisi au 1.(b) code deux nombres n et p distincts, compris entre 0 et 26, par deux nombres distincts.
   (a) Montrer que, si $C(n) = C(p)$ alors 27 divise $13(n-p)$.
   (b) En déduire que $n = p$ puis que le codage est valide.

Production demandée

– Écrire le message codé et le message décodé.
– Justifications demandées aux questions 4.(a) et 4.(b).