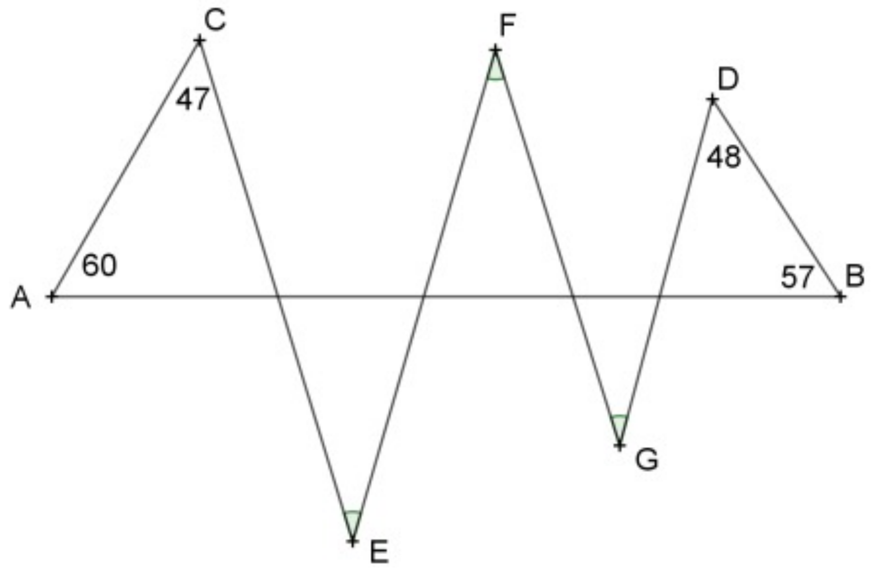
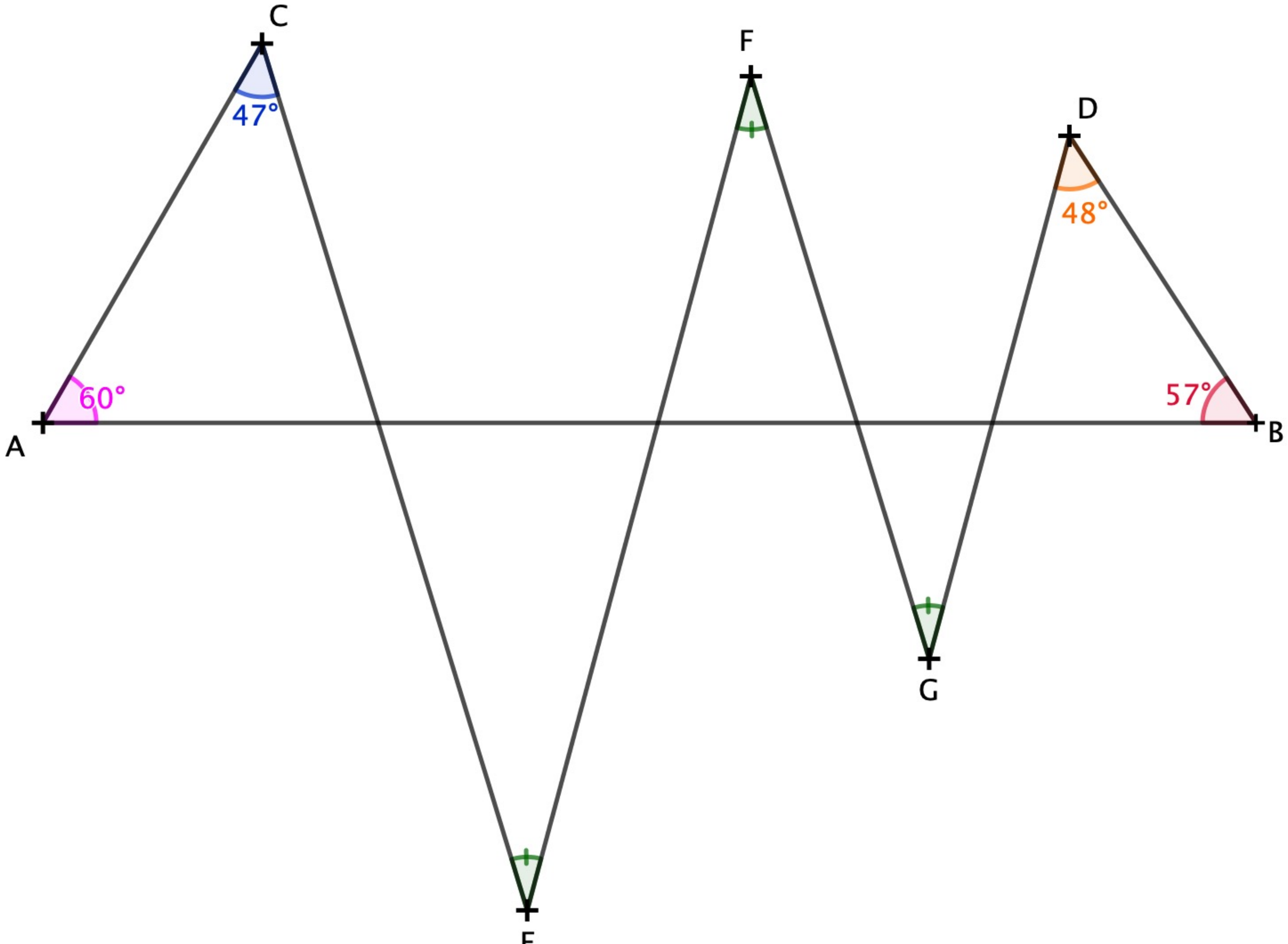
Exercice 1:

Sur la figure ci-contre, sept segments déterminent (entre autres) sept angles. Quatre des mesures sont données. Les trois angles marqués, $\widehat{CEF}, \widehat{EFG}, \widehat{FGD}$, ont la même mesure.

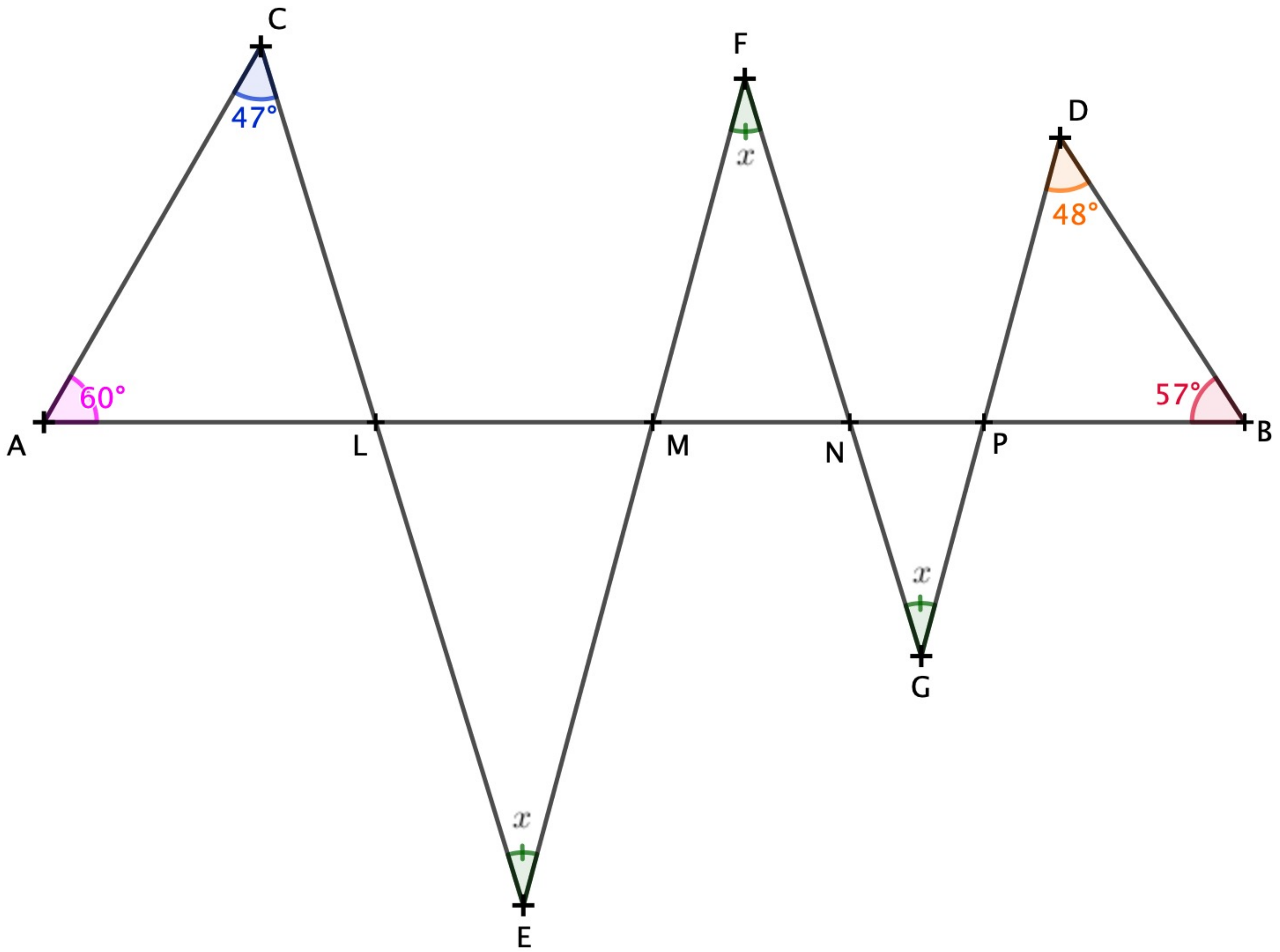
Quelle est cette mesure ?




C
47°
F
D
48°
60°
57°
A
B
G
E

Soit *L, M, N* et *P* les points d'intersections des quatre segments avec [*AB*]

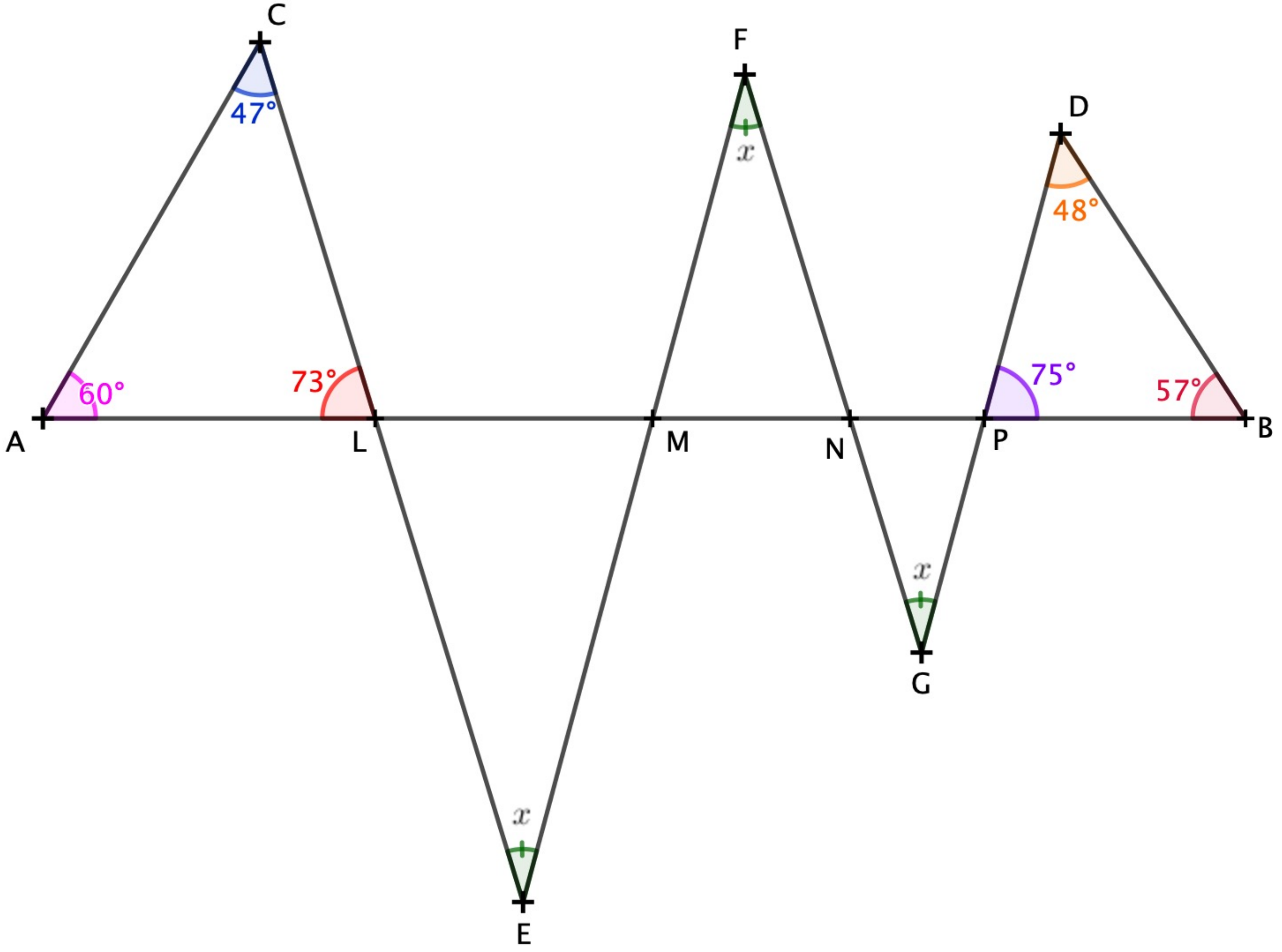
Soit *x* la mesure l'angle cherché



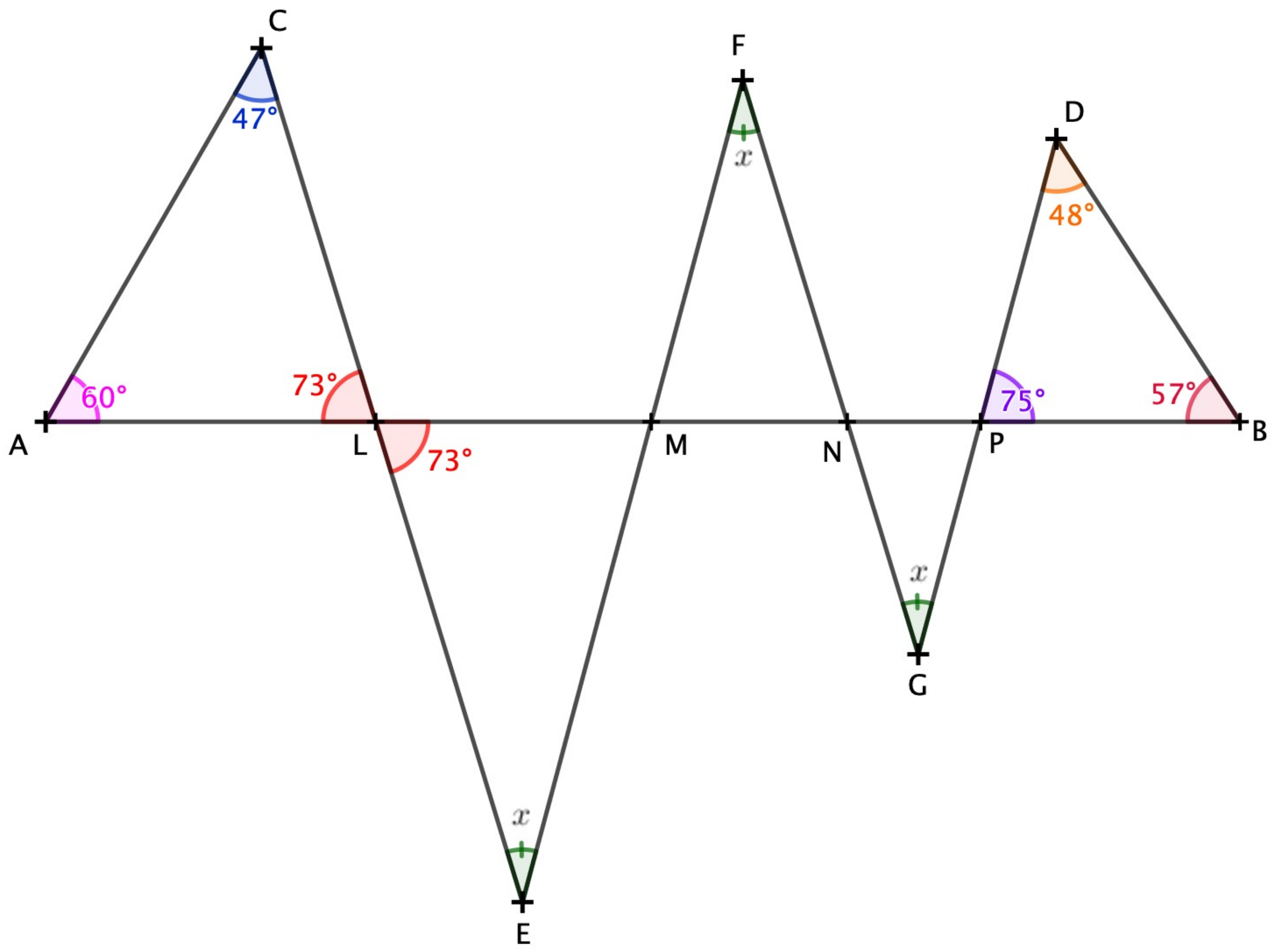
D’après la propriété sur la somme des angles dans un triangle appliqué aux triangle ALC et DPB, on a:

$\widehat{ALC} = 180° - (60° + 47°) = 73°$

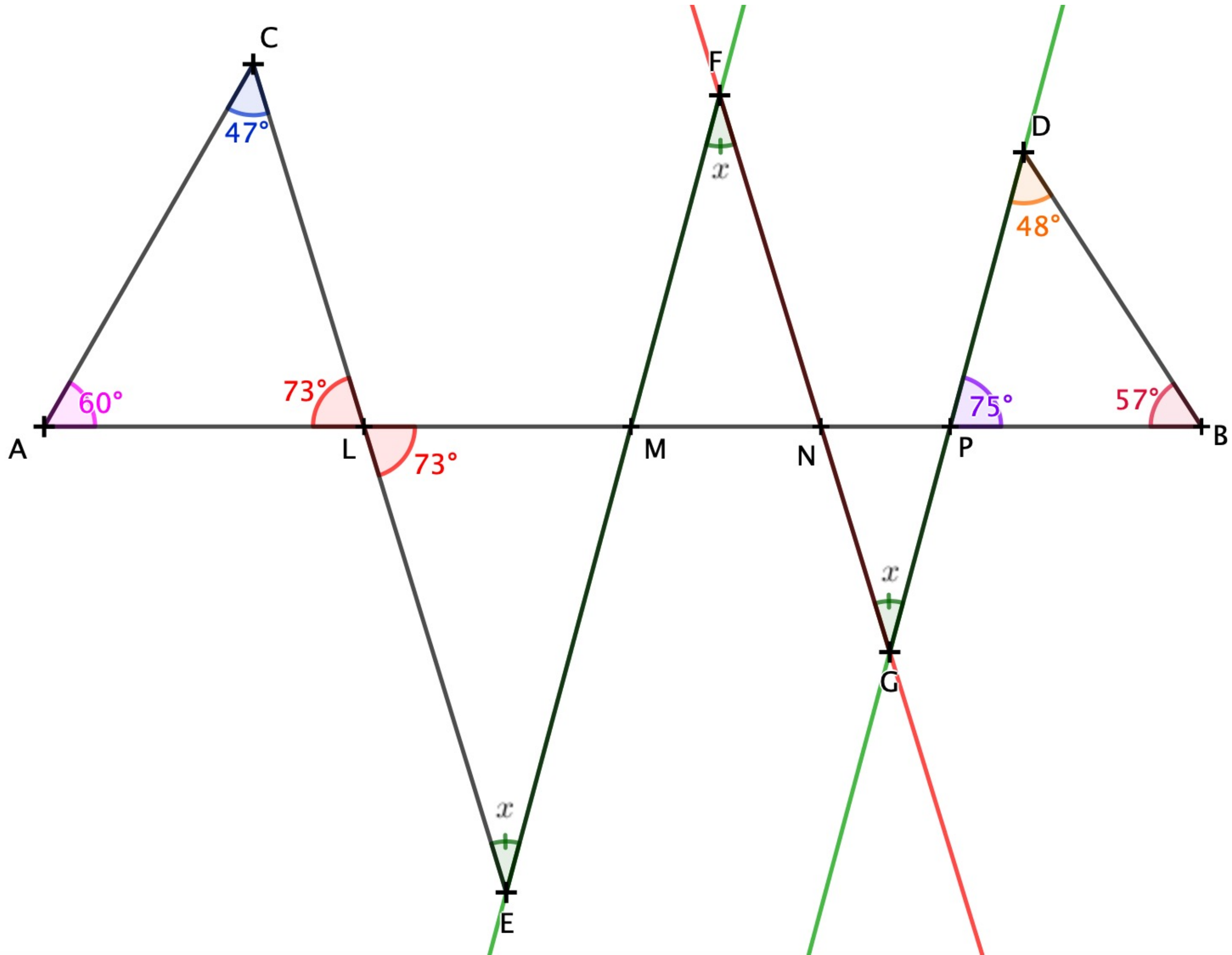
$\widehat{DPB} = 180° - (48° + 57°) = 75°$



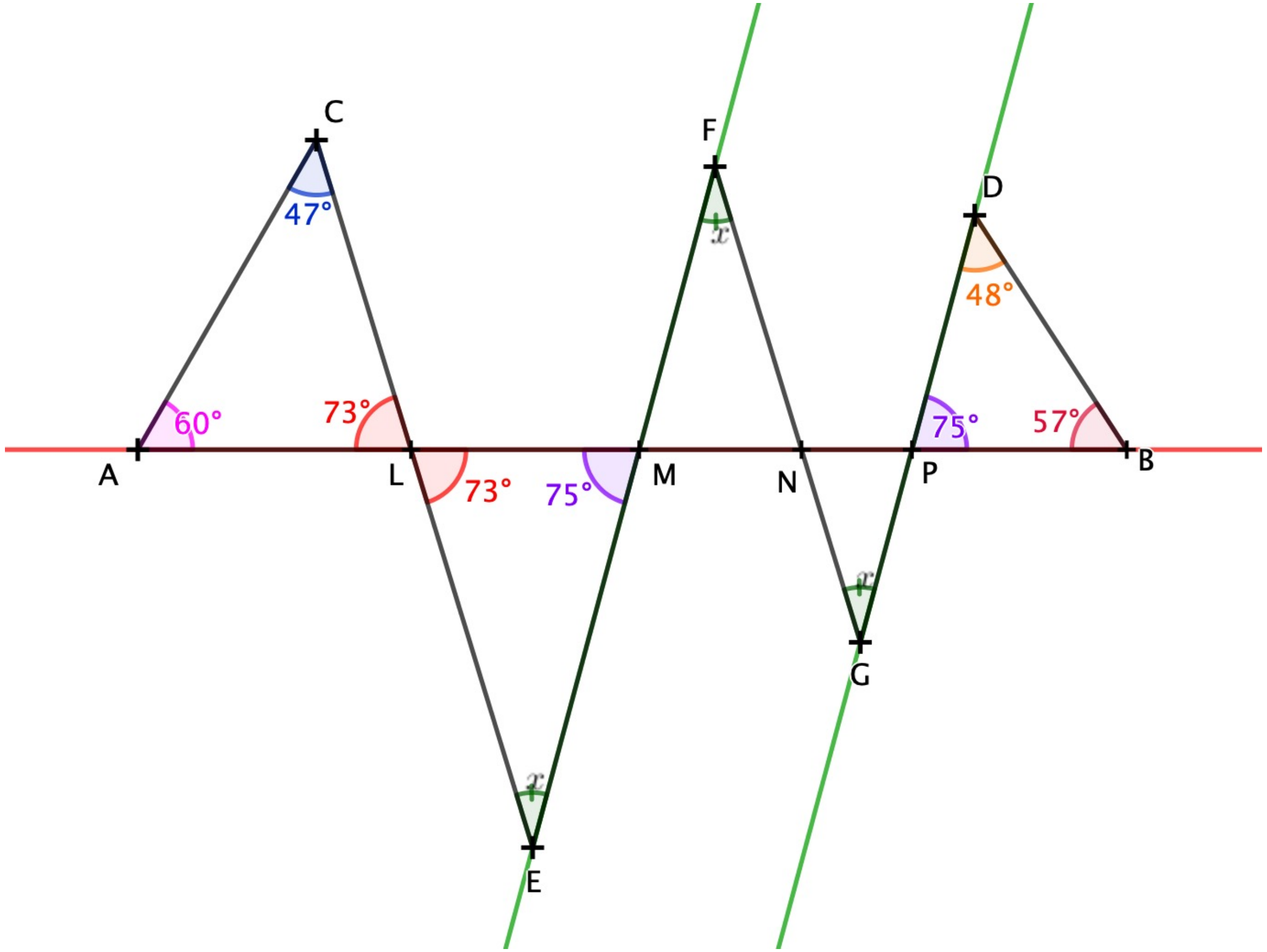
Les angles $\widehat{ALC}$ et $\widehat{ELM}$ sont opposés par leur sommet, ils sont donc de même mesures.
Ainsi $\widehat{ELM} = 73°$



On sait que les droites (FE) et (DG) coupées par la sécante (FG) forment deux angles alternes-internes $\widehat{EFG}$ et $\widehat{FGD}$ de même mesure.
On peut donc en déduire que les droites (FE) et (DG) sont parallèles.

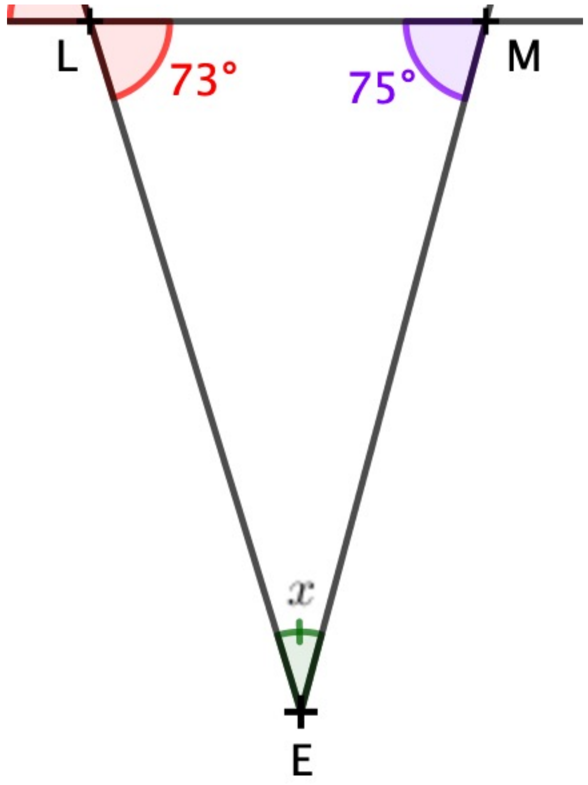


Les parallèles (FE) et (DG), coupées par la sécante (AB), forment des angles alternes-externes $\widehat{LME}$ et $\widehat{DPB}$.
Ainsi, $\widehat{LME} = \widehat{DPB} = 75°$



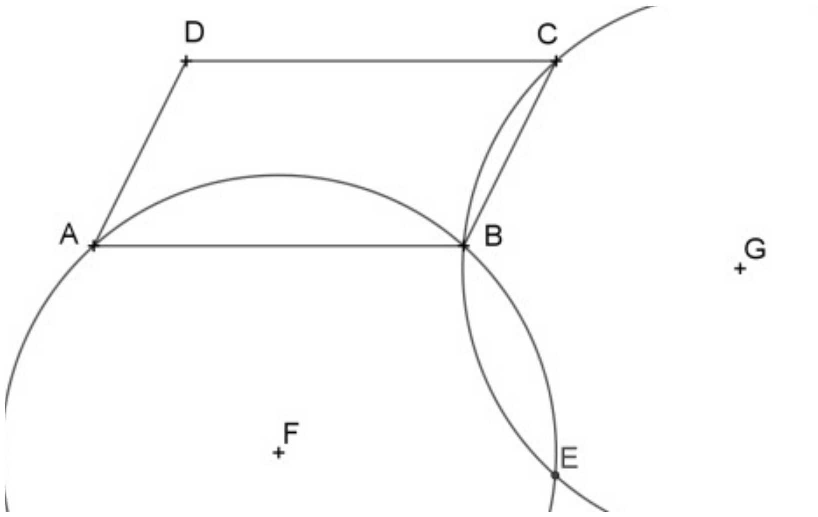
D’après la propriété sur la somme des angles dans un triangle, appliqué au triangle *LME*, on a:

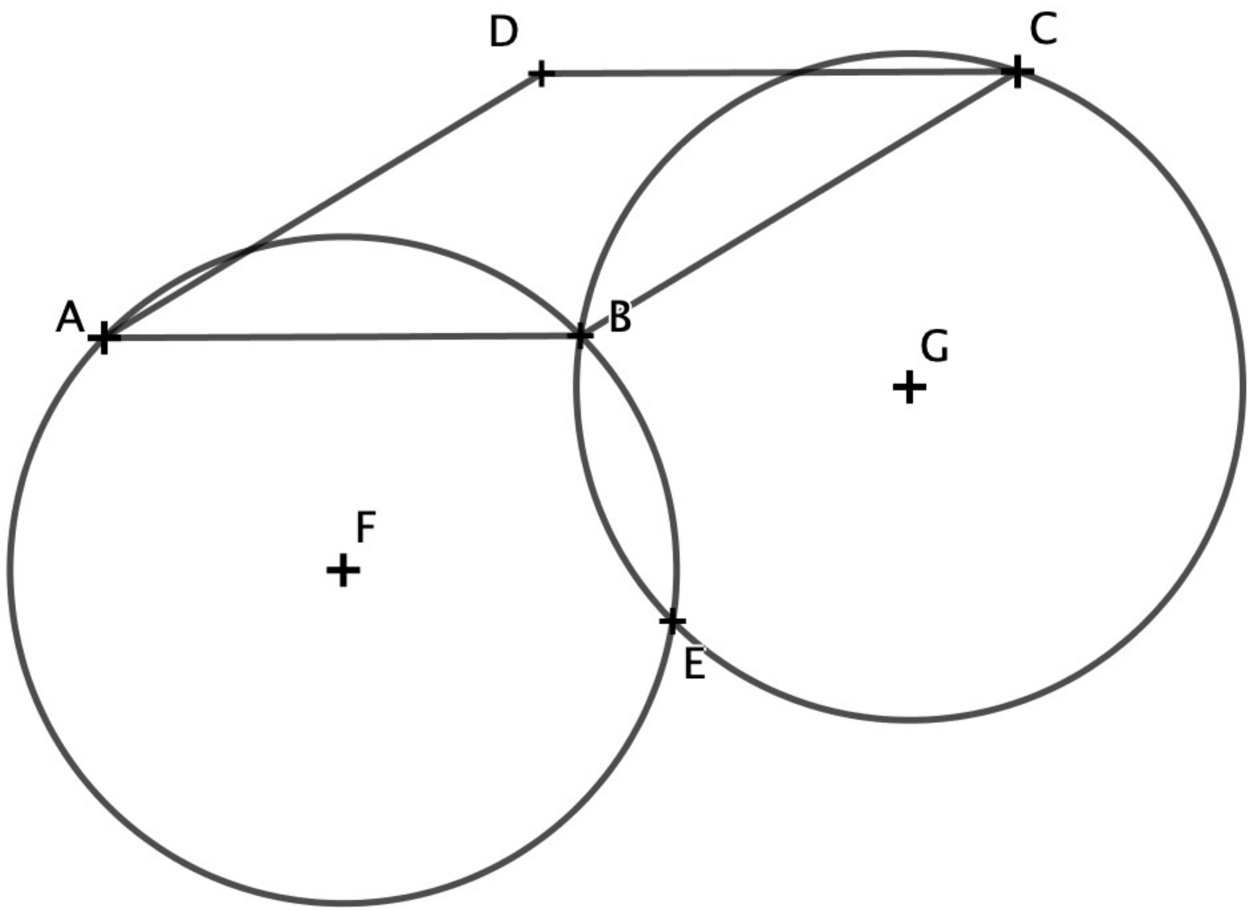
$$x = \widehat{LEM} = 180° - (73° + 75°) = 32°$$



Exercice 2:

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. Un cercle (de centre G) passant par B et C et un autre cercle (de centre F) passant par A et B ont le même rayon R. On appelle E le deuxième point d'intersection de ces deux cercles (on suppose que E n'est pas un sommet du parallélogramme). Montrer que le cercle passant par A, E et D a lui aussi pour rayon R.




D
C
A
B
G
F
E

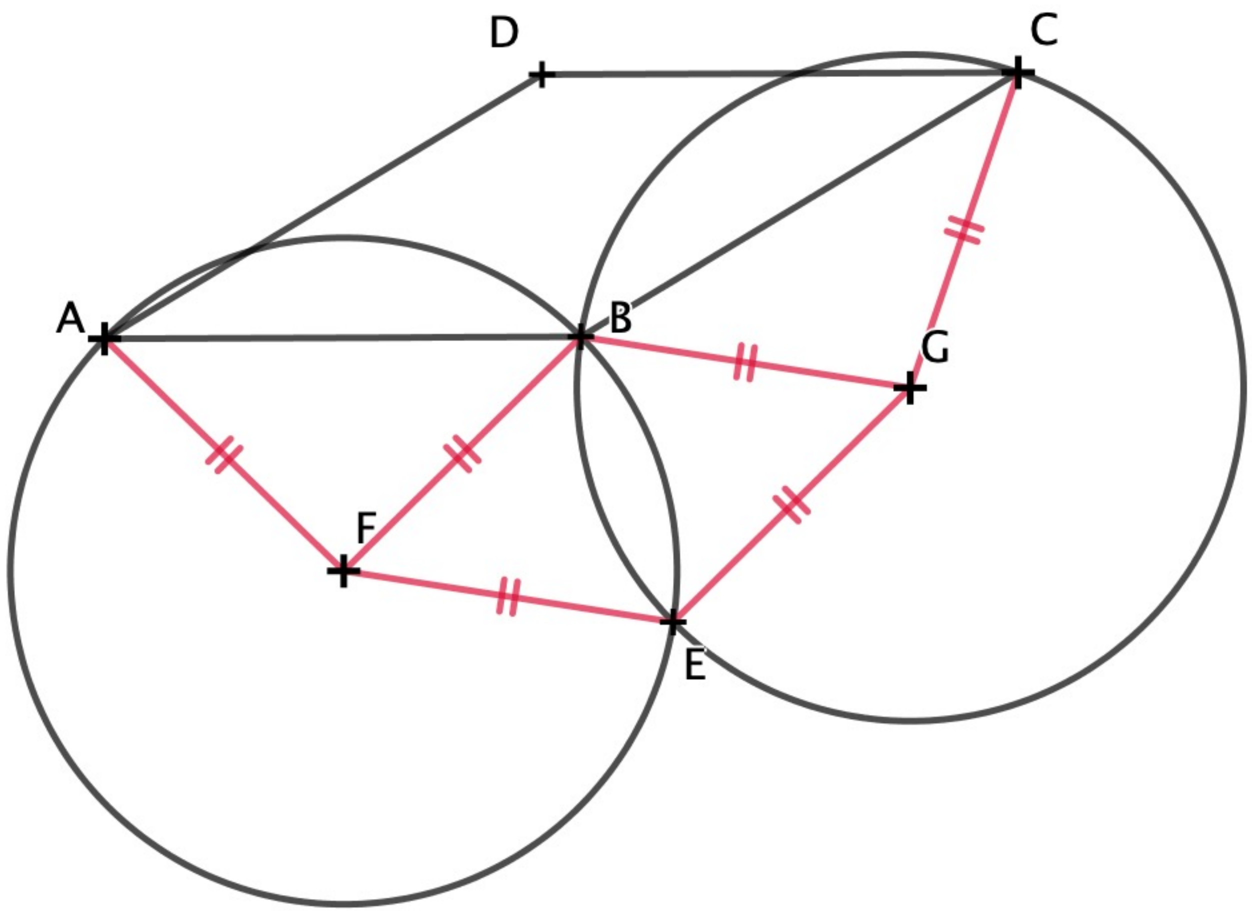
Ce que nous donne l’énoncé

Comme A, B et F appartiennent au cercle de centre F et de rayon R, on a donc:

$$FA = FB = FE = R$$

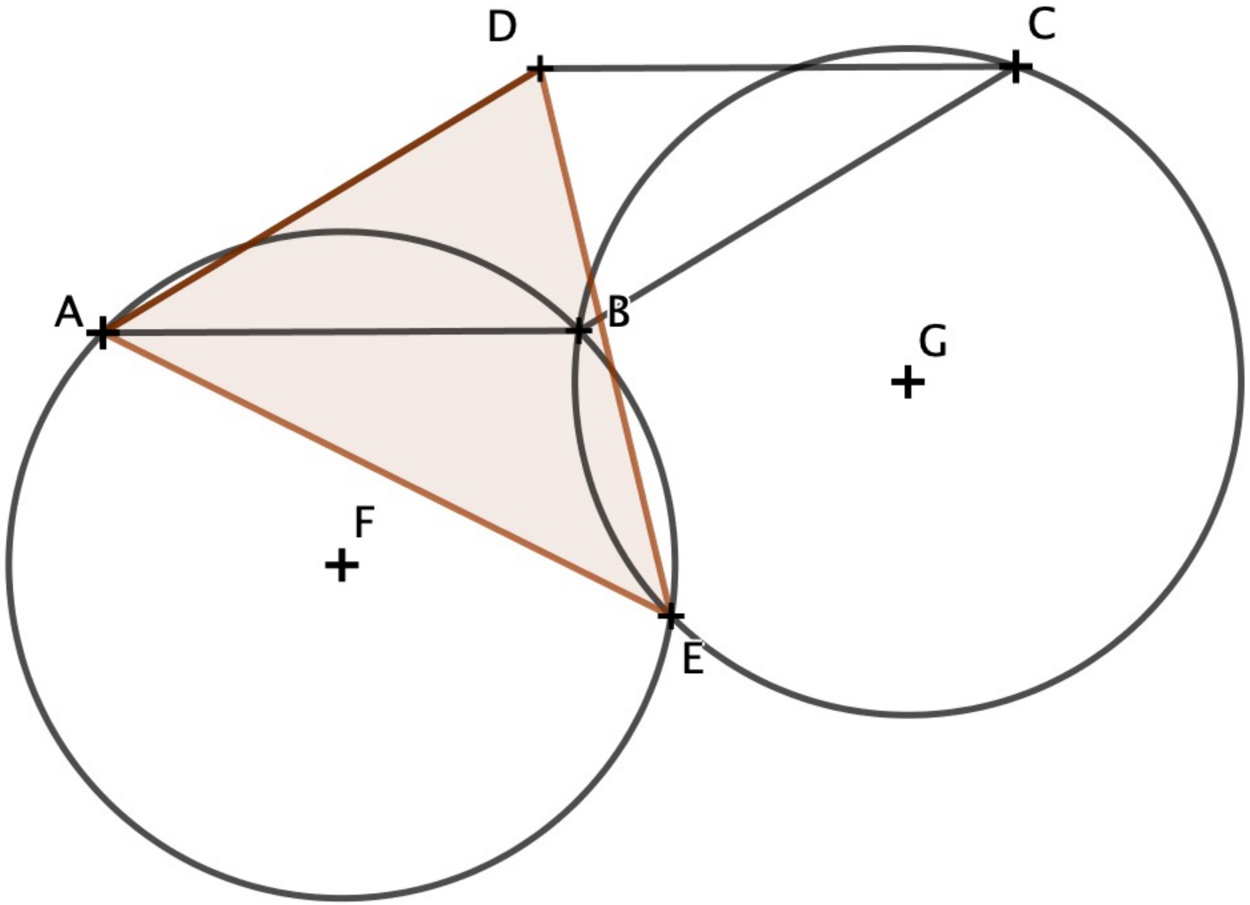
Comme C, B et F appartiennent au cercle de centre G et de rayon R, on a donc:

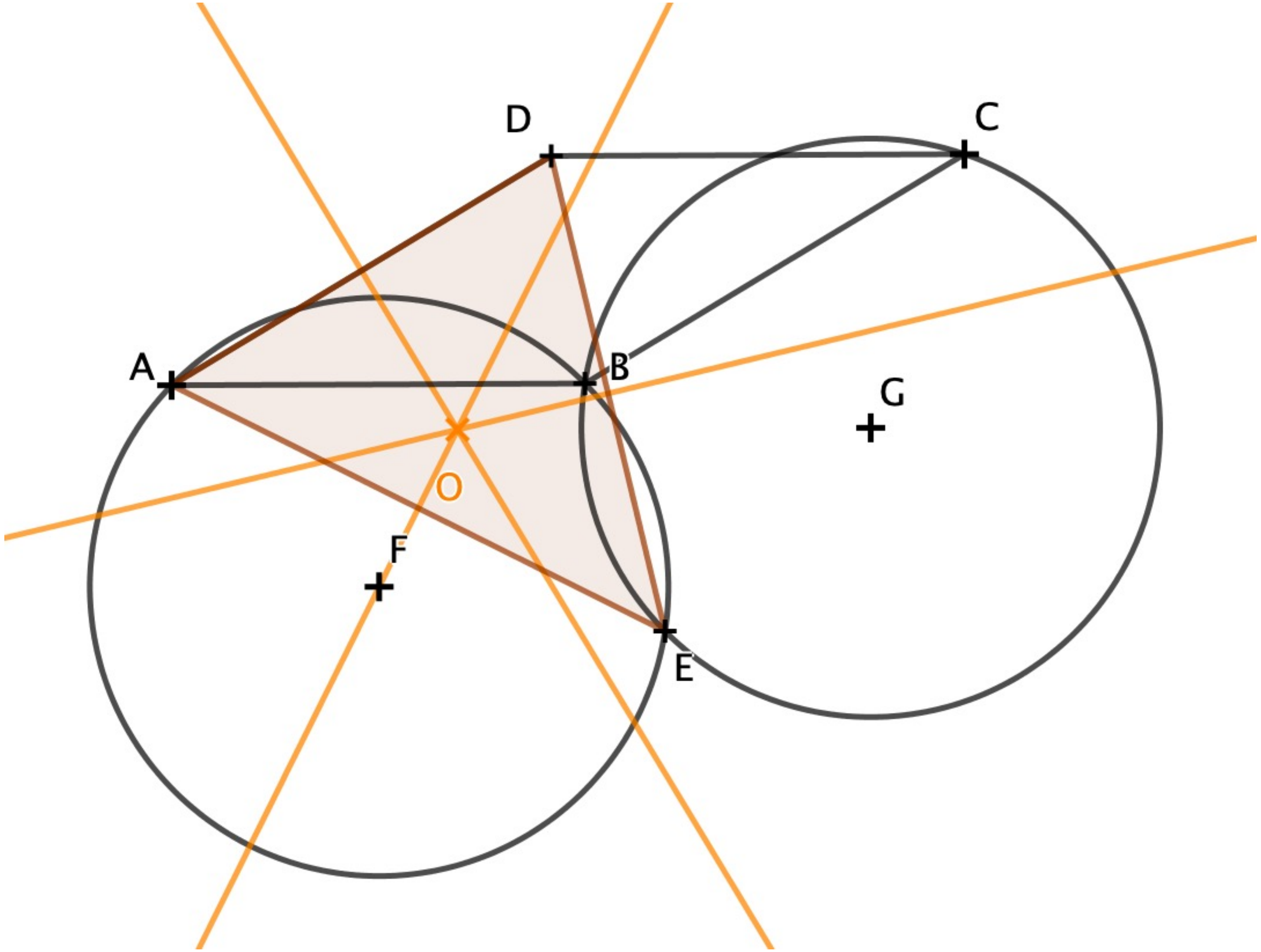
$$GC = GB = GE = R$$

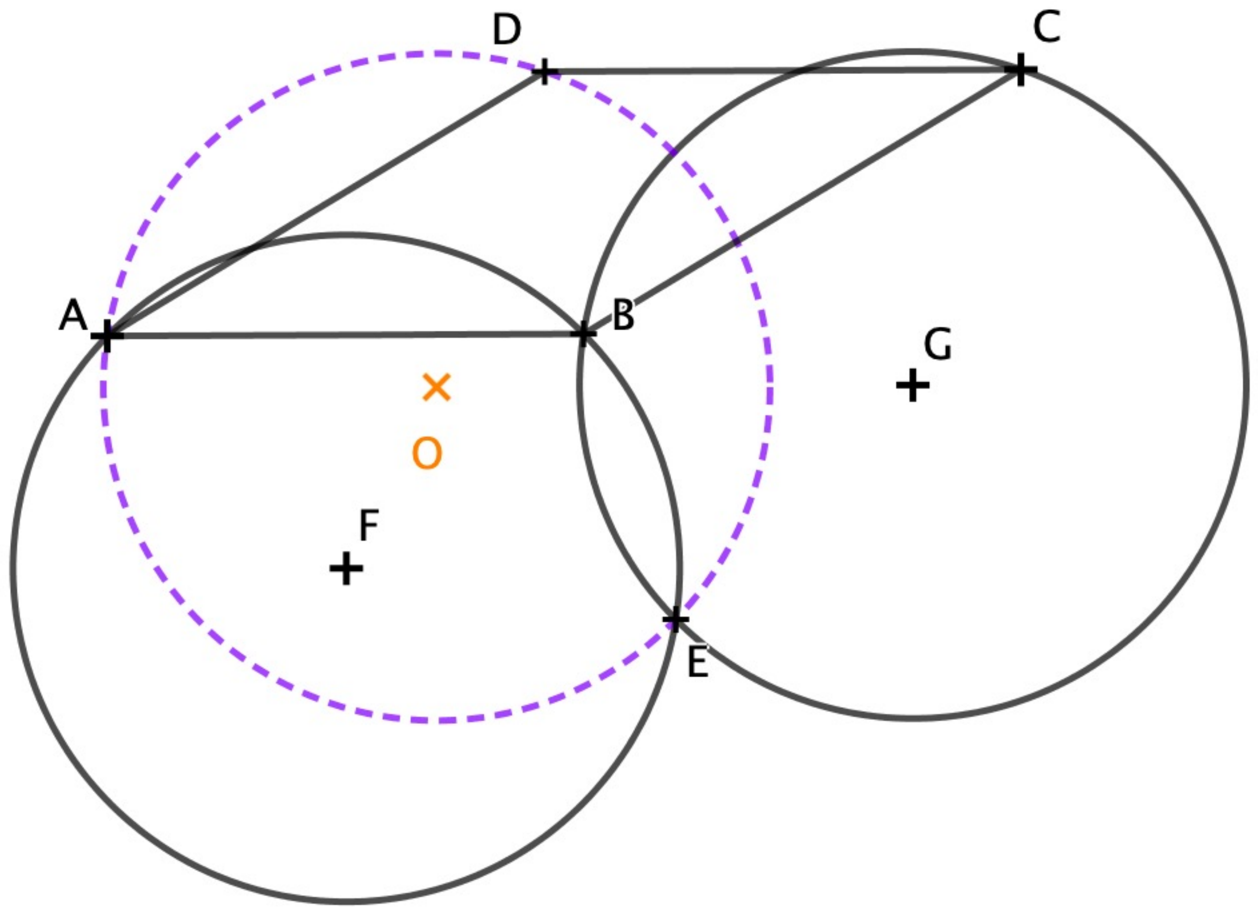


Essayons de trouver la position
du point O par construction

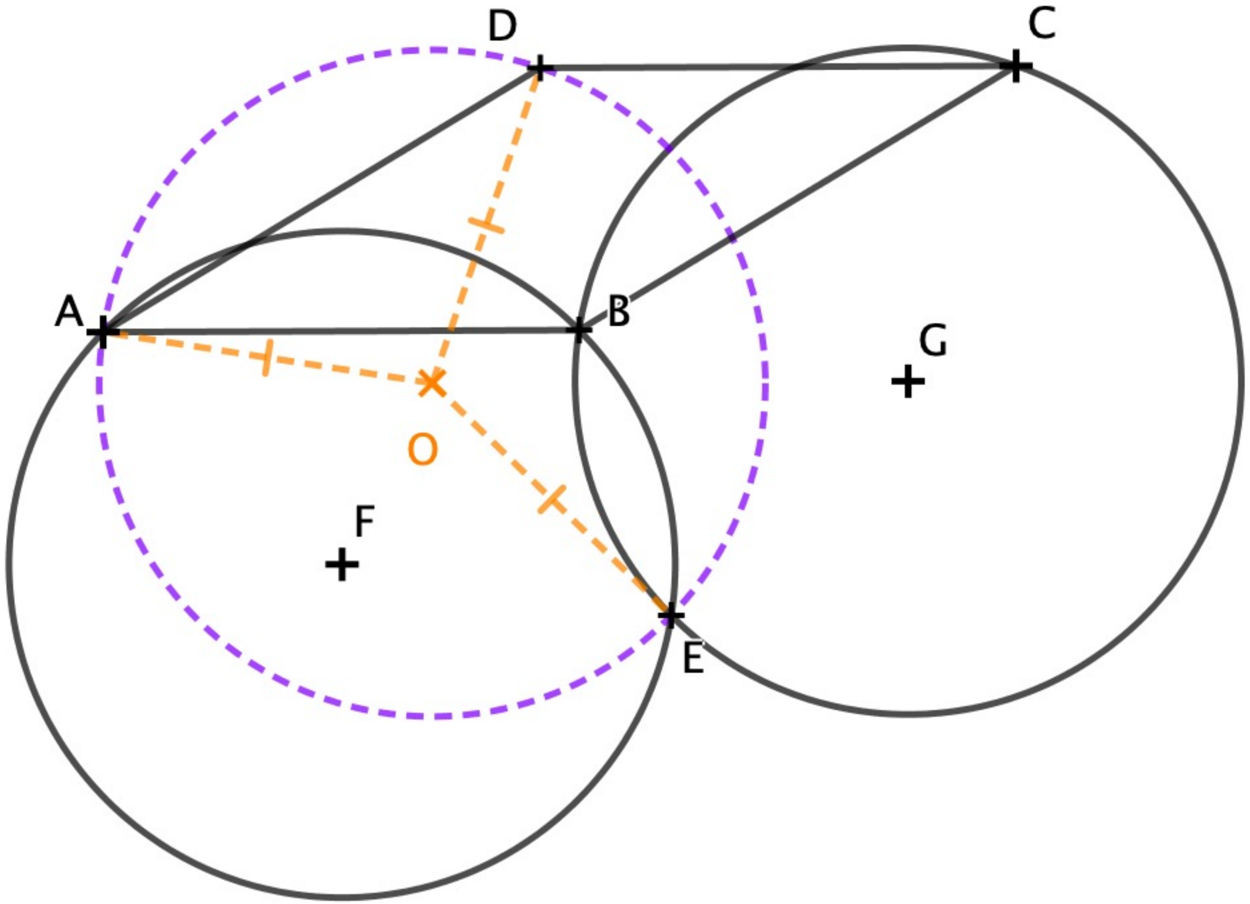
SI O est le centre du cercle passant par les points A, E et D, alors c’est le centre du cercle circonscrit au triangle *AED*.


D
C
A
B
G
F
E


D
C
A
B
G
O
F
E

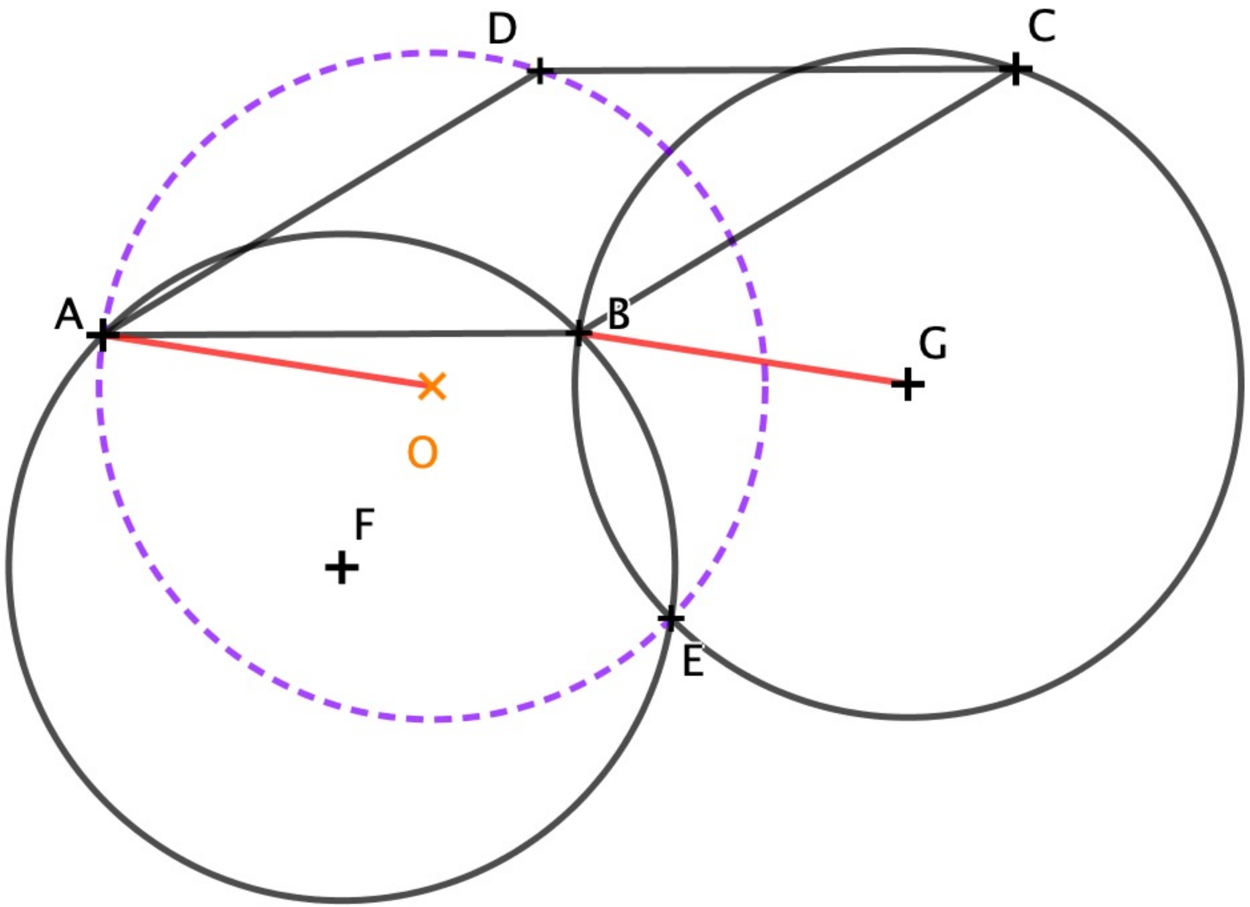


D
C
A
B
G
O
F
E

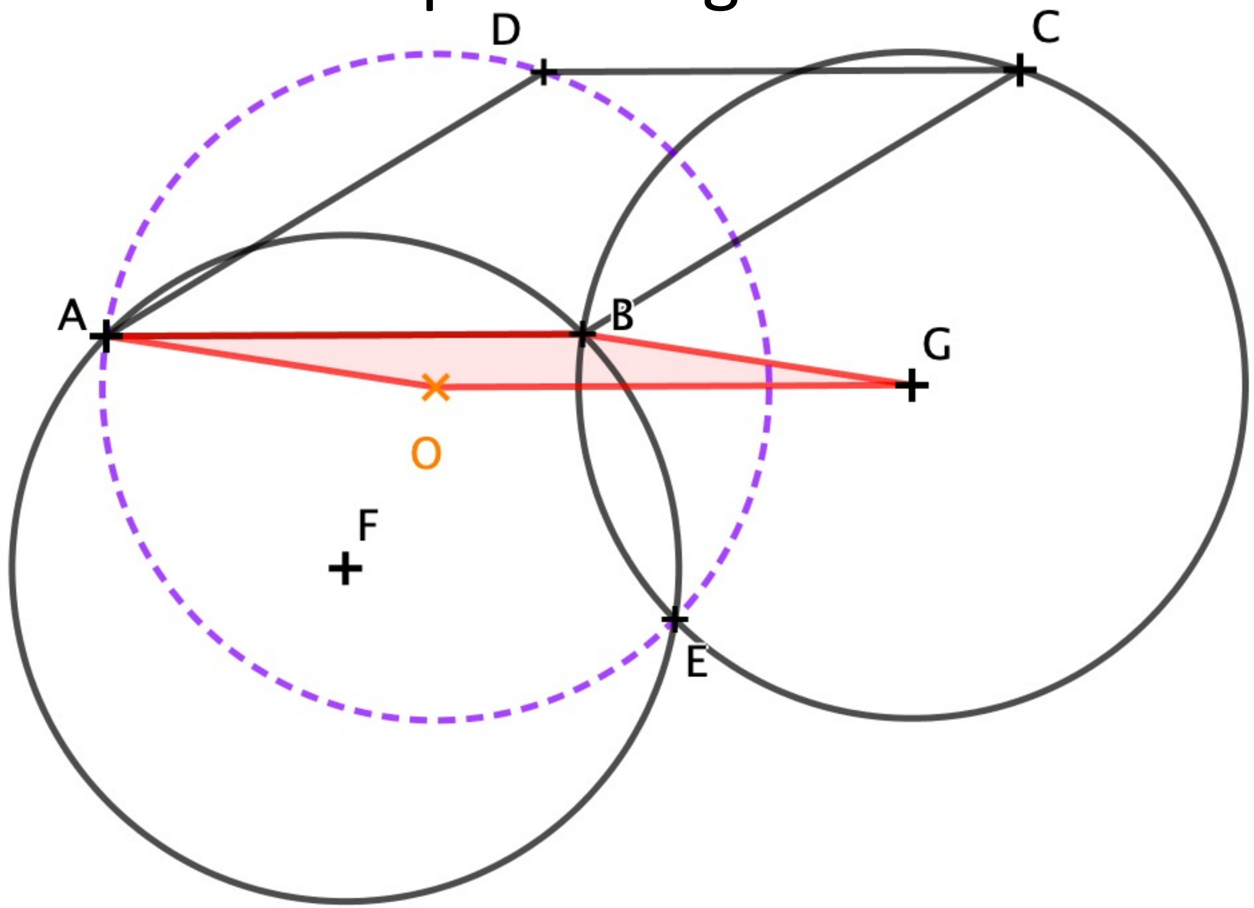


D
C
A
B
G
O
F
E

Il ne reste plus qu’à démontrer que OA=GB



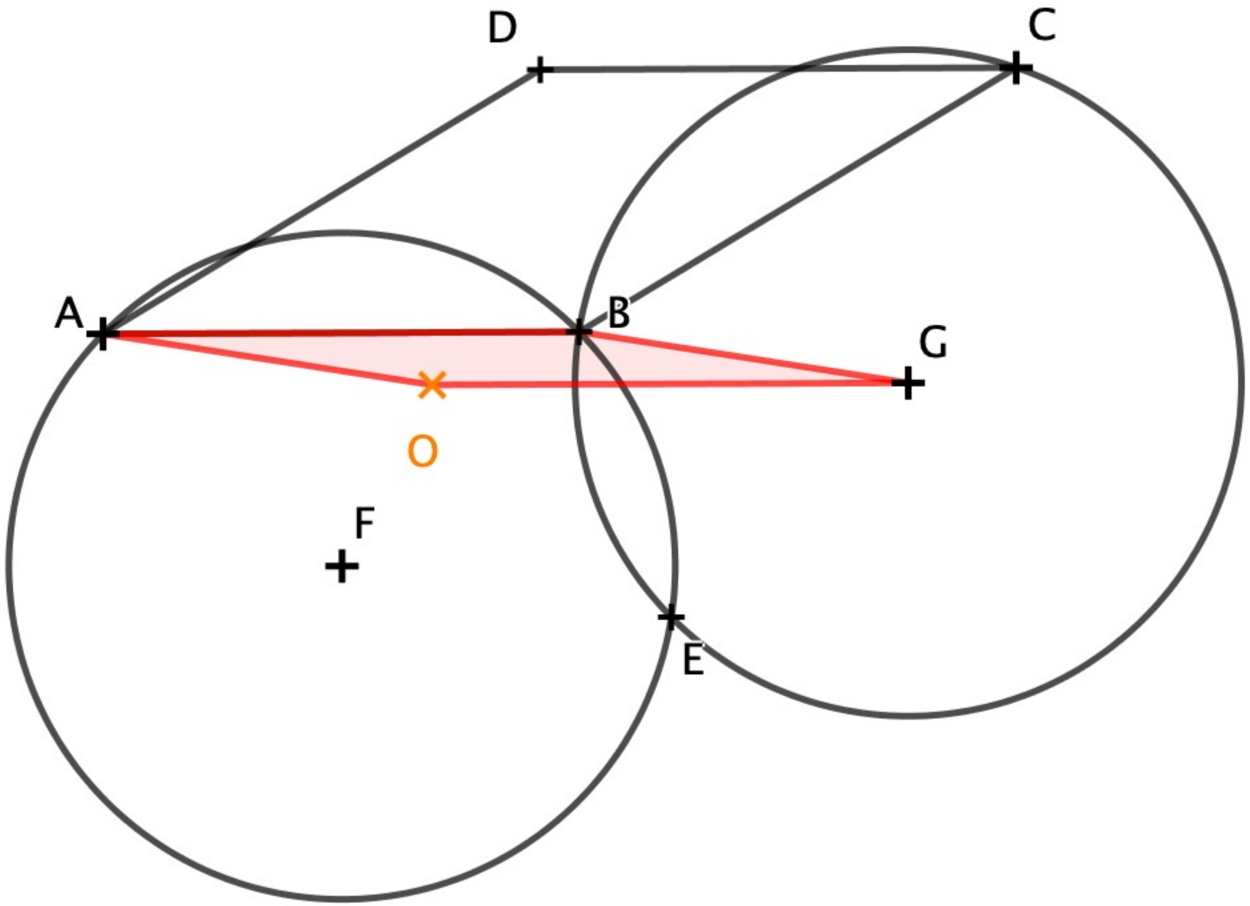
À y regarder de plus près, ABGO semble être un parallélogramme.



Prenons le problème à l’envers.

On considère le point *O*, tel que *ABGO* soit un parallélogramme, et essayons de démontrer qu’il est le centre du cercle passant par *A, E* et *D*.

C’est-à-dire, R=OA=OE=OD



On sait que ABGO est un parallélogramme, on a donc:

- (OG)//(AB) et OG=AB
- OA=GB=R ce qui implique que OA=R

On sait que ABCD est un parallélogramme, on a donc:

- (AB)//(DC) et AB=DC

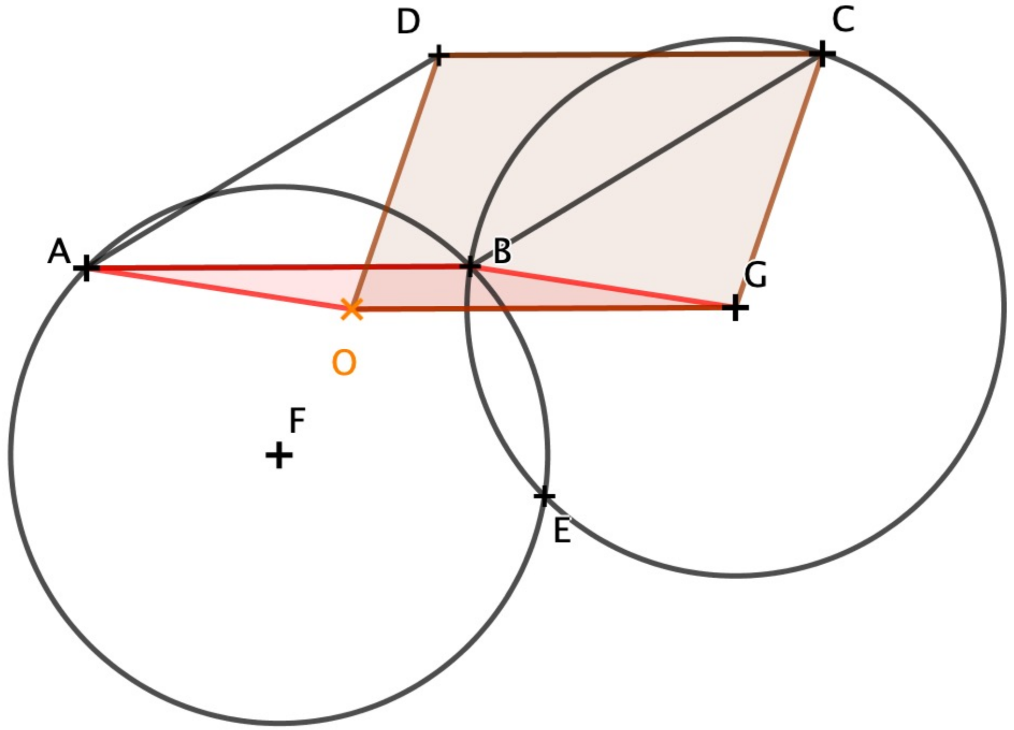
Nous pouvons en déduire que:

- (OG)//(DC) et OG=DC

Ce qui implique que le quadrilatère *ODCG* est un parallélogramme.

Comme *ODCG* est un parallélogramme, on a:

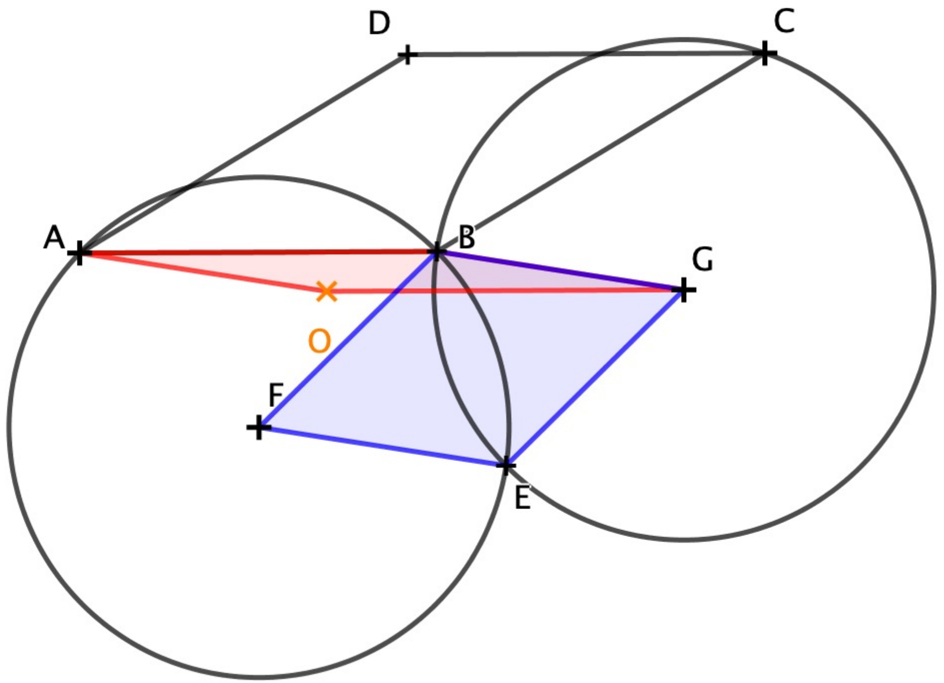
- OD=GC=R ce qui implique que OD=R



Il ne reste plus qu’à démontrer que $OE=R$

On sait que dans le quadrilatère *BGEF*, BF=FE=EG=GB.
Donc *BGEF* est un losange.
Ainsi, on a:

- (EF)//(BG)



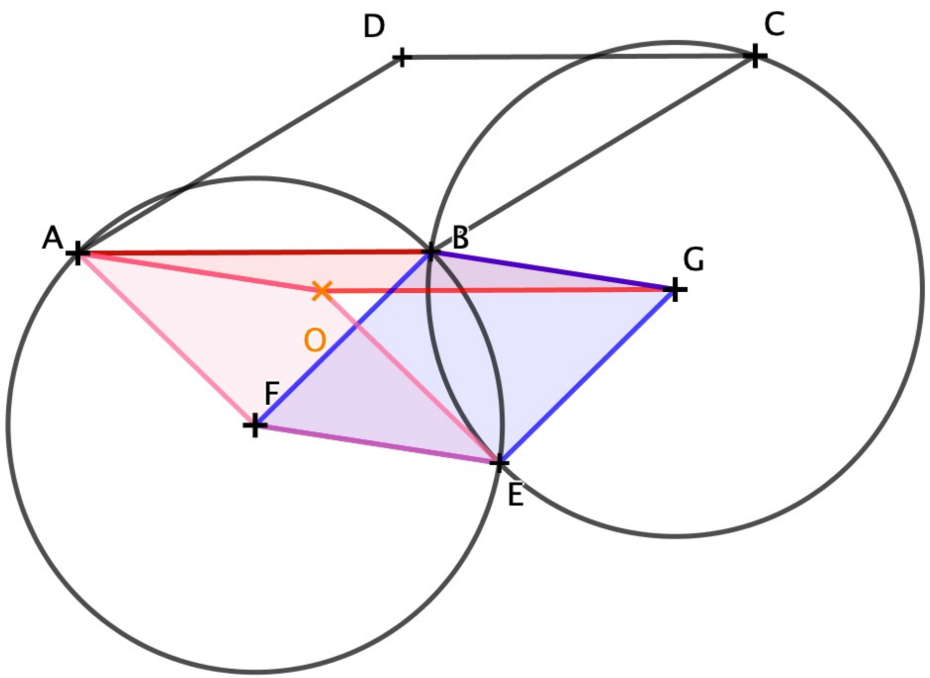
On a:

- (EF)//(BG) et EF=BG
- (BG)//(AO) et BG=AO

Donc (EF)//(OA) et EF=OA

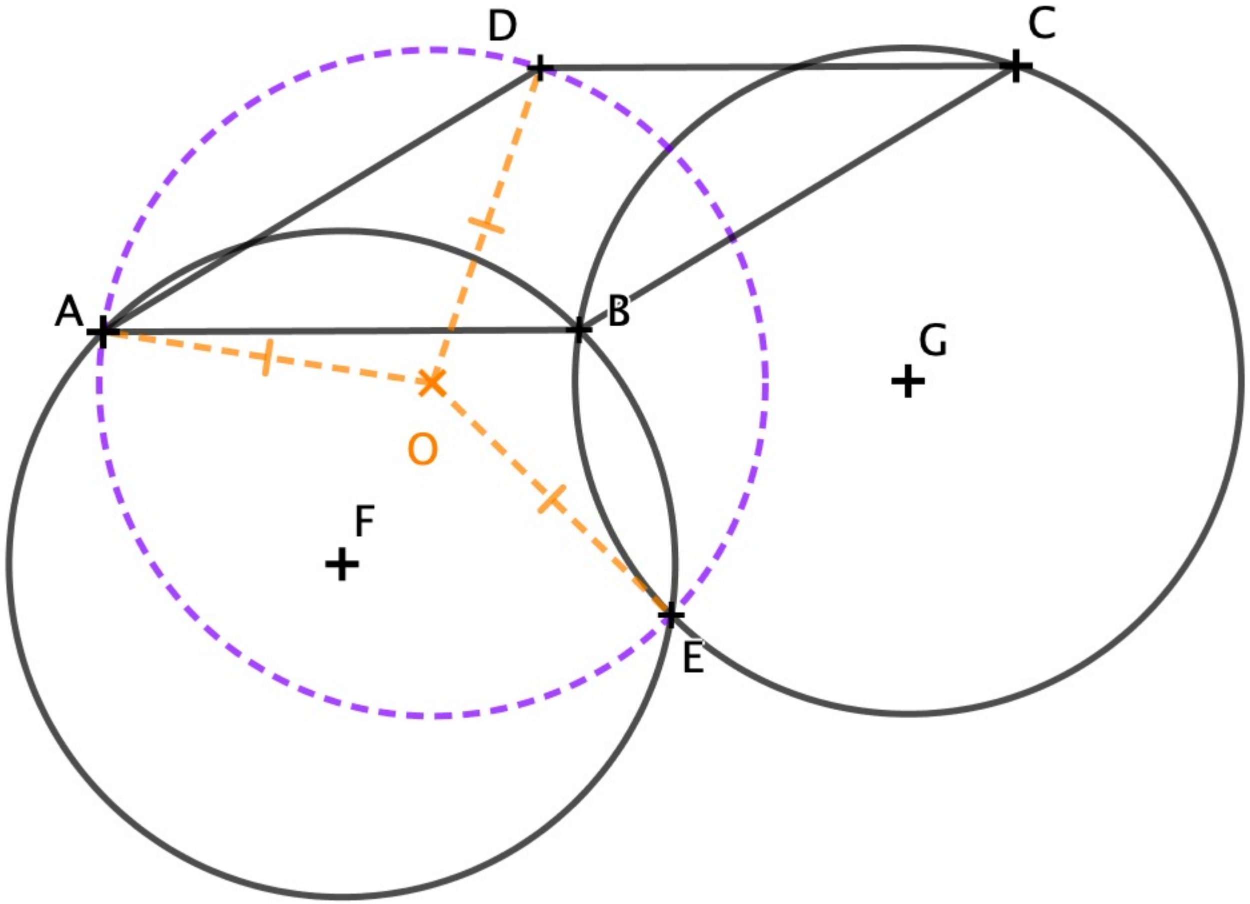
Dans le quadrilatère *AOEF,* on a (EF)//(OA) et EF=OA.
Donc *AOEF* est un parallélogramme.
De plus, on sait que FA=FE
Donc *AOEF* est un losange.

Ce qui implique que OE=FE=R, soit OE=R



Nous venons de démontrer que OE=OA=OD=R

Donc O est le centre du cercle de rayon R et passant par les points *A, D* et *E*.

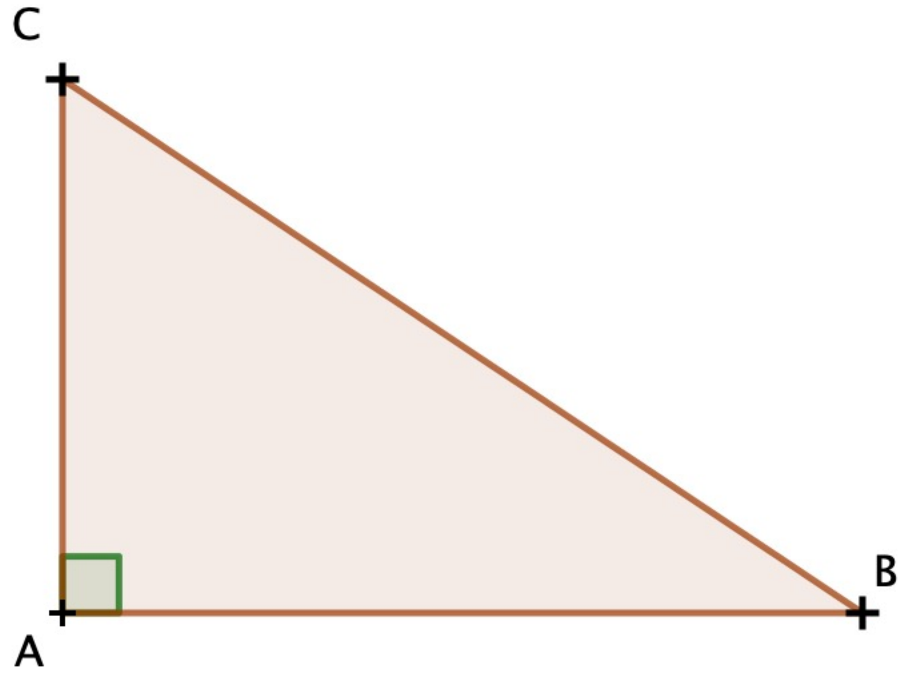


Exercice 5:

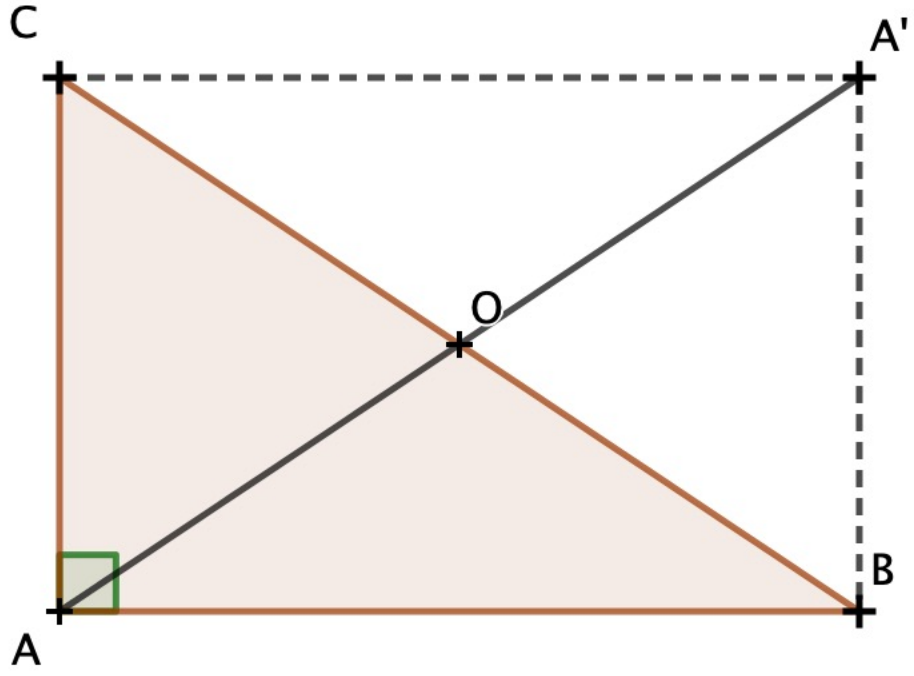
Cela s’appelle (presque partout, mais pas en France) le théorème de Thalès

a. Montrer que le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l’hypoténuse de ce triangle.

On considère le triangle *ABC* rectangle en A

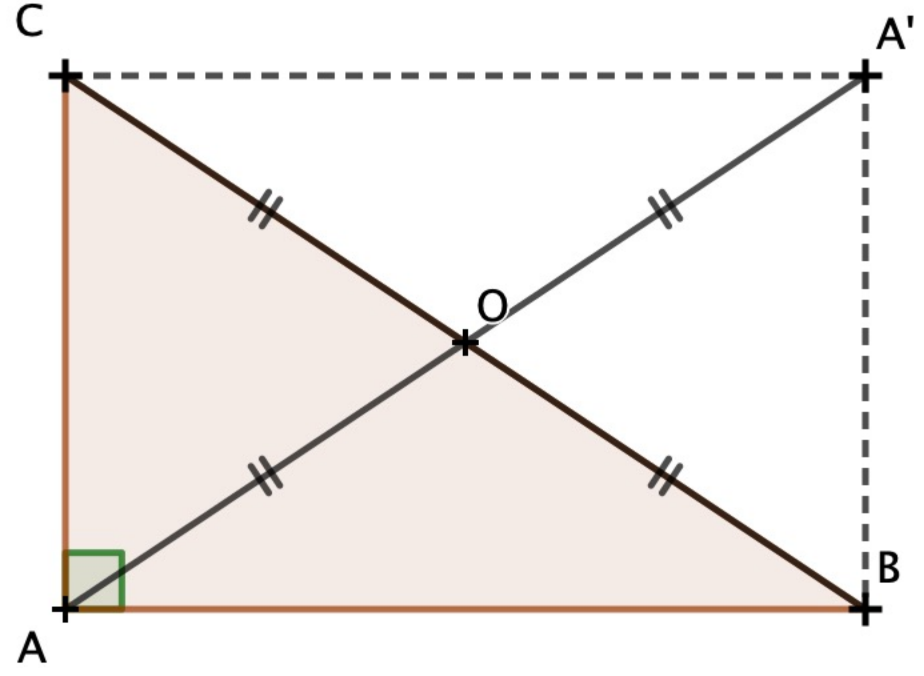


Soit *A′* le point, tel que *ABA′C* soit un rectangle de centre O



Or, les diagonales d’un rectangle sont de même longueur et se coupent en leur milieu.

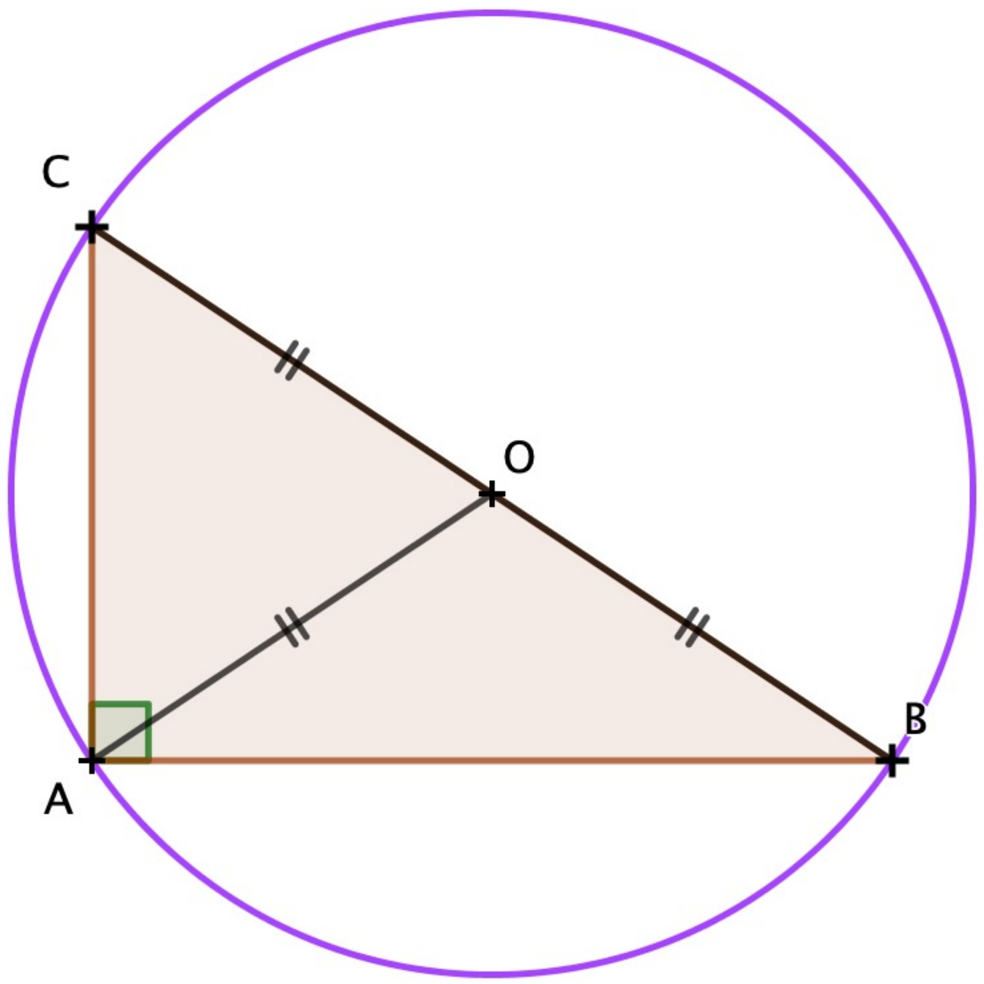
On a donc en particulier, que:
OA=OB=OC



Ainsi, le point O (Milieu de [AC]) est le centre du cercle circonscrit au triangle *ABC*.

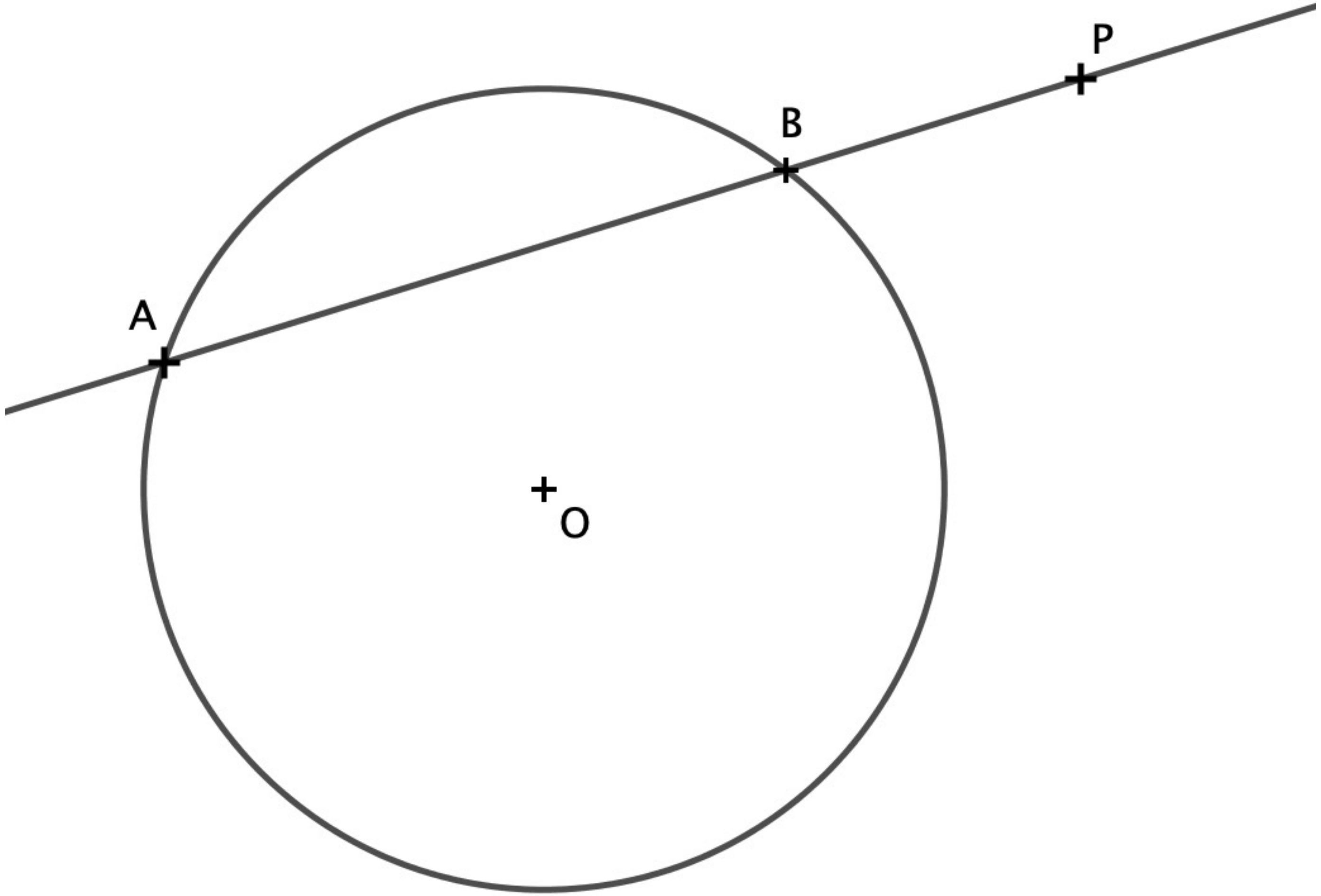
Ainsi, [BC] est un diamètre du cercle.

Donc, le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse de ce triangle.

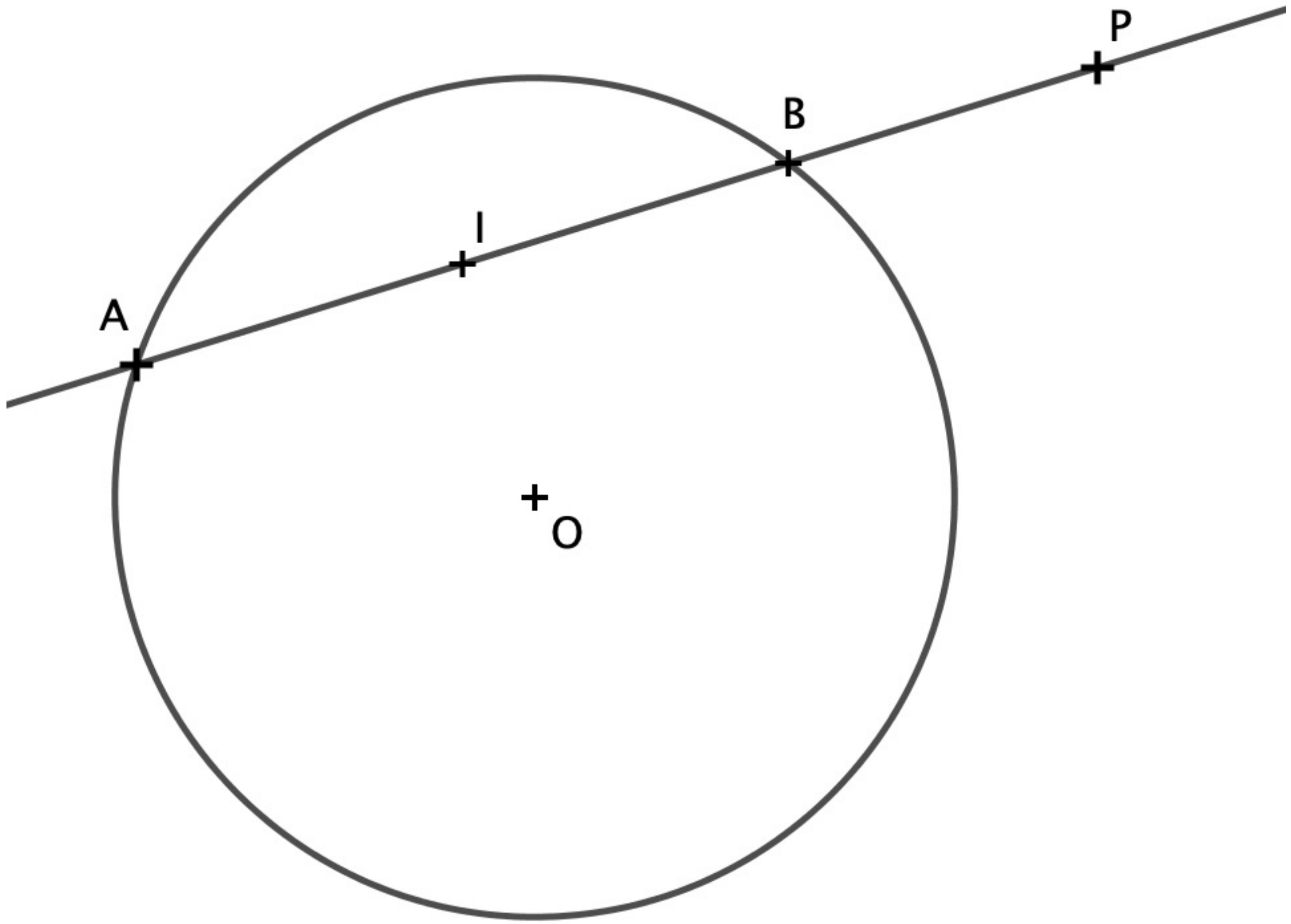


b. <u>Application</u> : on considère un cercle et un point P extérieur à ce cercle. Par ce point P, on trace des droites sécantes au cercle et définissant ainsi des cordes. Montrer que les milieux de ces cordes appartiennent à un cercle à définir.

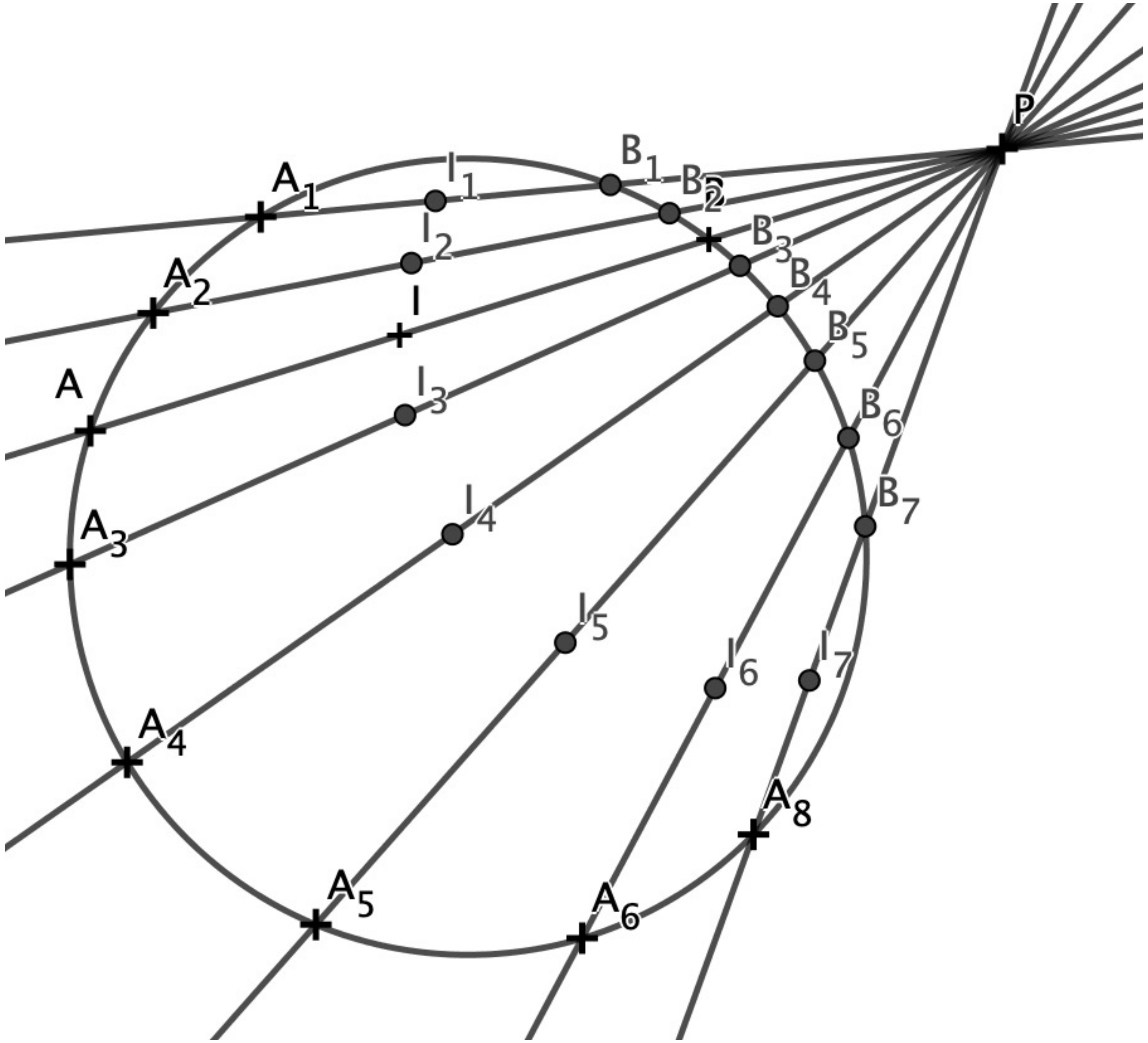
Soit un cercle de centre O.
Soit P un point extérieur au cercle.
Soit *A* et *B* les deux points d'intersection d'une droite passant par P et sécante au cercle en deux points.

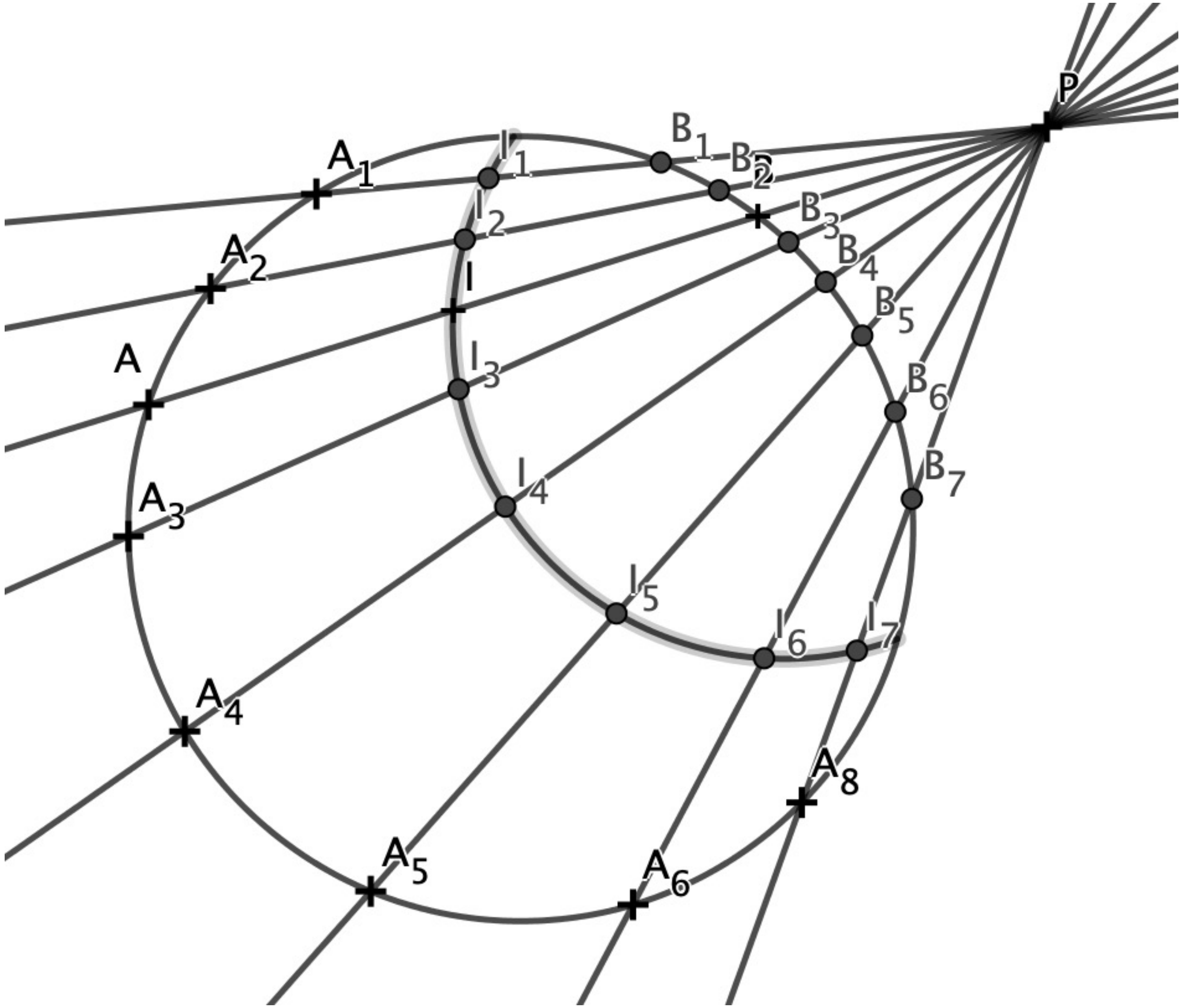


Soit I le milieu du segment [AB]



Avant de faire la démonstration, nous allons essayer de comprendre


P
A_1
I_1
B_1
B_2
I_2
A_2
I
B_3
B_4
A
B_5
I_3
B_6
A_3
I_4
B_7
I_5
I_6
I_7
A_4
A_8
A_5
A_6

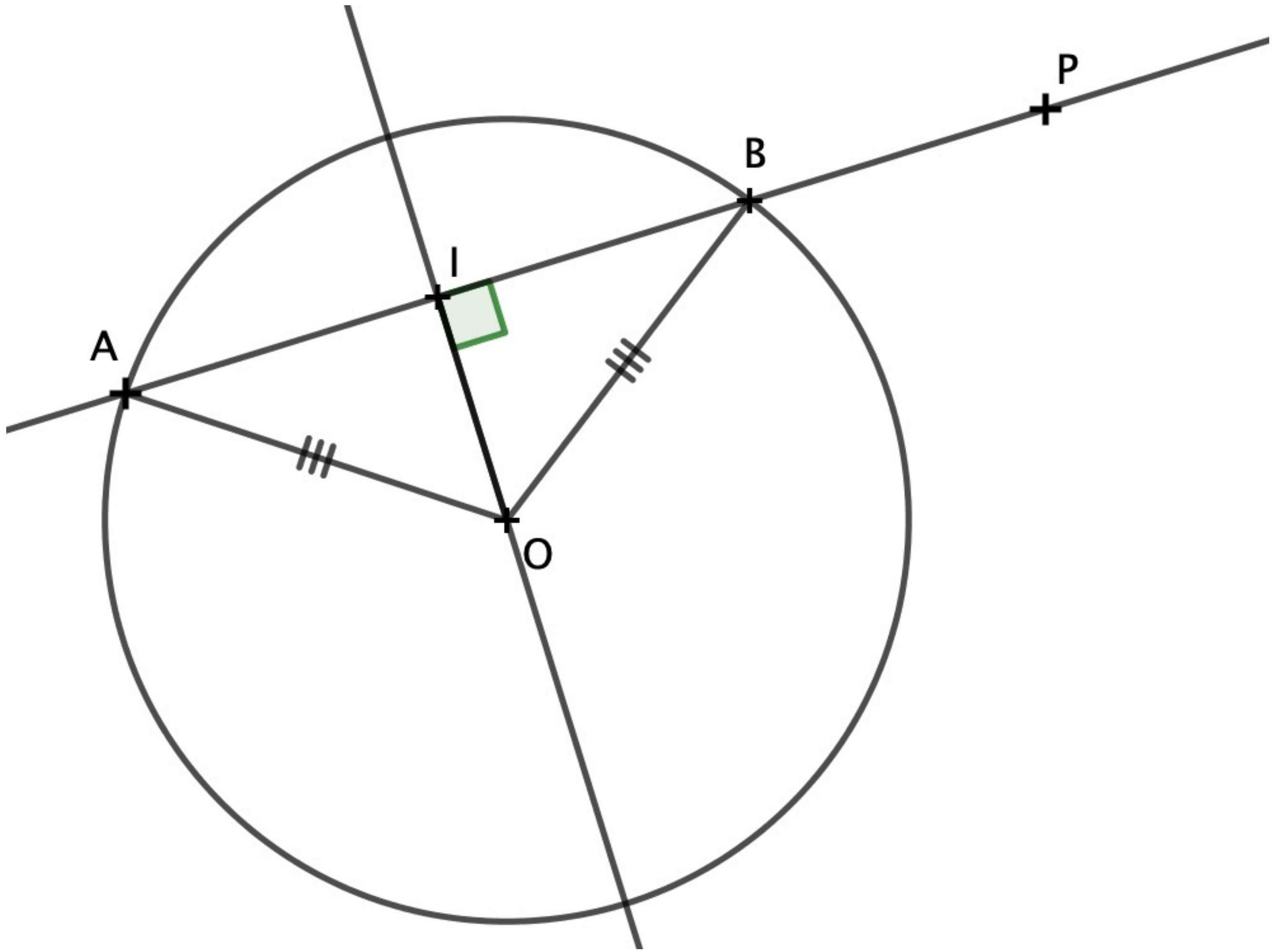


P
A
A1
A2
A3
A4
A5
A6
A8
B1
B2
B3
B4
B5
B6
B7
I
I1
I2
I3
I4
I5
I6
I7

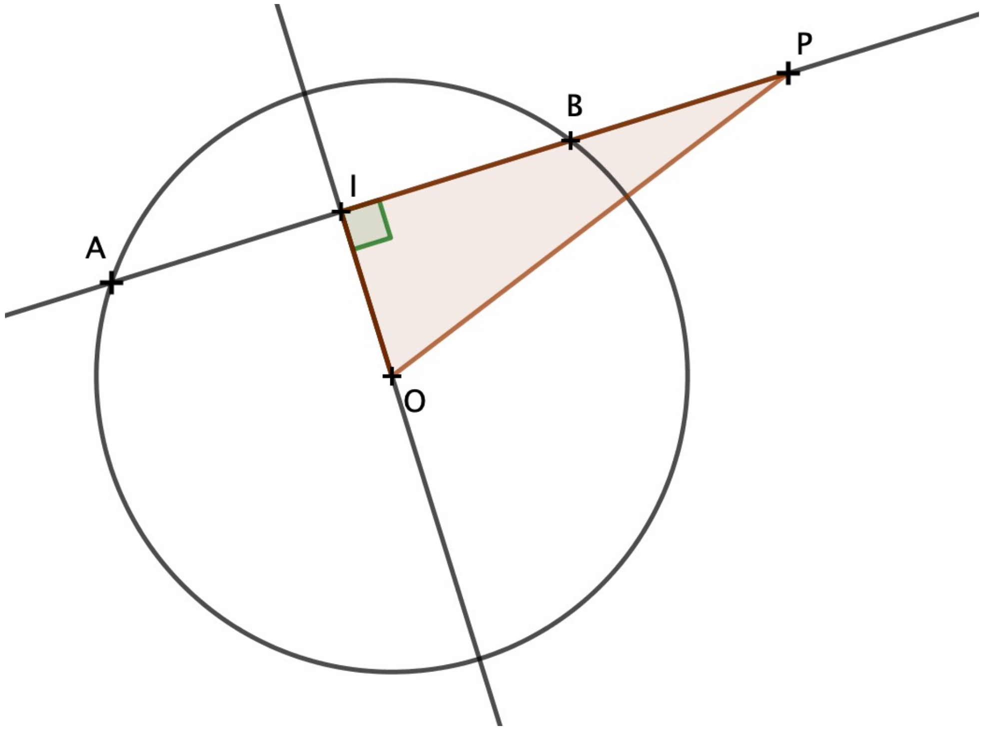
Passons à la démonstration

On sait que A et B appartiennent au cercle de centre O.
Donc OA=OB

De plus I est le milieu de [AB].
Donc (IO) est la médiatrice du segment [AB]



On en déduit que le triangle *OIP* est rectangle en I.



Ainsi, de la propriété que nous venons de découvrir à la question a, nous pouvons en déduire que le point I appartient au cercle de diamètre [OP].