Pépinière académique de mathématiques

Stage « en ligne » de janvier et février 2021

Fiche numéro 1

Éléments de solution

Les propositions de solution de chaque exercice doivent être renvoyées sous forme numérique (on peut utiliser un système de transfert de « gros fichiers ») par les professeurs selon les modalités précisées lors de l'inscription.

Exercice CG 1. 1 Mais quel est donc le rapport avec 2 021 ?

Soit a et b deux nombres réels tels que $\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$. Que vaut $(a+b)^{2\,021}$?

On commence par remarquer que pour tout nombre x, $x+\sqrt{1+x^2}\neq 0$. En effet $x+\sqrt{1+x^2}=0$ impliquerait $\sqrt{1+x^2}=-x$ et, en élevant au carré, $1+x^2=x^2$, ce qui est impossible.

L'égalité donnée initialement peut donc s'écrire $a+\sqrt{1+a^2}=\frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}}$ soit $a+\sqrt{1+a^2}=\frac{b-\sqrt{1+b^2}}{-1}=\sqrt{1+b^2}-b$

On en déduit que $a+b=-\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}$

D'où, en élevant au carré les deux membres de l'égalité, $a^2+b^2+2ab=1+a^2-2\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}+1+b^2$ soit $ab=1-\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}$ (*)

Or, en développant le membre de gauche dans l'égalité initialement donnée, on a :

$ab+a\sqrt{1+b^2}+b\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}=1.$

En réinjectant l'égalité (*) dans cette dernière égalité, on obtient : $a\sqrt{1+b^2}+b\sqrt{1+a^2}=0$, égalité qui ne peut être vérifiée que si a et b sont de signes contraires et $a^2=b^2$ soit $a=-b$.

Conclusion : $(a+b)^{2021}=0$

Exercice CG 1. 2 Équation du troisième degré

1. On commence par montrer que l'équation $ax^3+bx^2+cx+d=0$, où a,b,c et d sont des réels donnés, avec $a\neq 0$, peut être ramenée, par mise en facteur et changement de variable, à l'équation type du troisième degré

$$x^3+px+q=0$$

2. *a.* Montrer que la fonction f définie sur **R** par $f(x)=x^3$ admet une fonction réciproque.

b. On pose $x=u+v$. Montrer que la condition sur u et v obtenue en posant $uv=-\frac{p}{3}$ est équivalente à :

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

3. Ce système se résout en résolvant l'équation auxiliaire, du second degré :

$$X^2+qX-\frac{p^3}{27}=0\ (*)$$

Montrer que, si l'équation (*) admet deux racines réelles, on peut en déduire une solution de l'équation initiale.

4. *a.* En étudiant la fonction $x\longmapsto x^3+px+q$, montrer que l'équation de départ peut avoir une, deux ou trois solutions.

b. Dans quels cas la formule dite de Cardan

$$x=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

donne-t-elle une solution ?

5. Quelle solution la formule de Cardan donne-t-elle pour l'équation $x^3 + 3x - 4 = 0$? Trouver une expression plus simple de ce résultat.

1. Posons $y = x - h$, développons et réorganisons selon les puissances de y :

$$ay^3 + (3ah + b)y^2 + (3ah^2 + 2bh + c)y + ah^3 + bh^2 + ch + d = 0$$

Ce qui permet de voir qu'en posant $h = \frac{b}{3a}$, l'équation en y obtenue est – une fois a mis en facteur – du type demandé. Ce ne sera évidemment pas très facile, une fois cette équation résolue, de revenir à l'inconnue de départ, car il faudra reconstituer les coefficients (en résolvant un système linéaire à trois inconnues. Lequel ?)

2. *a.* Cette fonction est monotone croissante, ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$. Elle a donc une fonction réciproque (mais attention appeler cette fonction *racine cubique* n'est pas correct : les fonctions *racine n-ième* sont définies sur **R**⁺, la formule de Cardan est antérieure à l'exponentielle…)

b. La relation liant u et v s'écrit : $u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$. D'où le résultat annoncé en tenant compte du **2. *a.***

3. $-q$ et $\frac{p^3}{27}$ sont la somme et le produit des deux racines, qui sont donc u^3et v^3. En utilisant la réciproque de la fonction *f*, on obtient deux nombres, u et v, dont la somme est l'inconnue x.

4. *a.* L'étude des variations de la fonction $t : x \longmapsto x^3 + px + q$ conduit aux résultats suivants :

* Si $p \geq 0$, t est monotone croissante, et prend des valeurs négatives puis positives. Il y a une seule solution à l'équation ;

* Si $p < 0$, t est croissante sur l'intervalle $\left]-\infty, \sqrt{-\frac{p}{3}}\right]$, décroissante sur $\left[\sqrt{-\frac{p}{3}}, -\sqrt{-\frac{p}{3}}\right]$, croissante sur $\left[-\sqrt{-\frac{p}{3}}, +\infty\right[$.

Le nombre de solutions de l'équation est donc 1, 2 ou 3 selon que le produit des extrema est positif, nul ou négatif.

4. *b.* Ce produit est $\left(-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\right)\left(\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} - p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\right) = q^2 + \frac{4p^3}{27}$

C'est le discriminant de l'équation du second degré vue plus haut. L'unicité de la solution obéit donc à la même condition, que la fonction t soit monotone ou non.

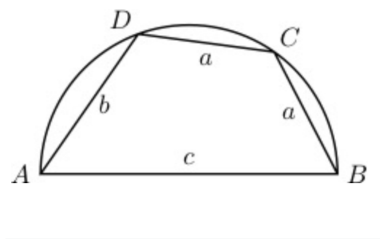
5. La formule de Cardan donne la solution (unique) $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$. On pouvait observer que 1 est aussi (pas *aussi*, il n'y en a qu'une) solution de l'équation. Donc $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 1$. C'est l'occasion d'observer que $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{5\sqrt{5}+15+3\sqrt{5}+1}{8} = \sqrt{5} + 2$…

Exercice CG 1. 3 Des entiers qui tournent en rond

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un demi-cercle de diamètre $[AB]$.

On suppose que : $BC = CD = a$, $DA = b$ où $b \neq a$, $AB = c$

Montrer que si a, b et c sont des entiers alors c ne peut pas être un nombre premier.

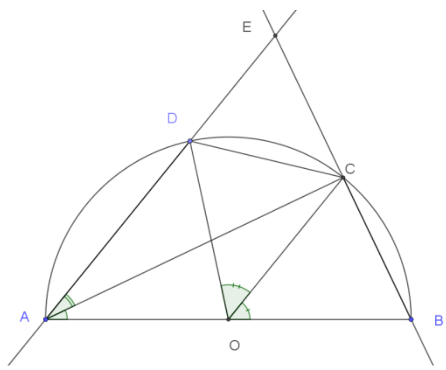


On remarque déjà que puisque les points A, B, C et D sont sur un demi-cercle de diamètre $[AB]$, les droites (DA) et (BC) ne peuvent être parallèles. On note alors E leur point d'intersection.

Le triangle ABC est rectangle en C (inscrit dans un demi-cercle de diamètre $[AB]$) donc la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (CB).

On va alors montrer que le triangle ABE est isocèle en A et pour cela que $\widehat{DAC} = \widehat{CAB}$. es deux angles inscrits interceptent des arcs de même longueur puisque $BC = CD = a$. L'angle au centre associé à l'angle $\widehat{CAB}$ est l'angle $\widehat{COB}$ où O est le milieu de $[AB]$. Dans le triangle AOC isocèle en O, si on note $\widehat{CAB} = \alpha$, on a

$\widehat{AOC} = 180° - 2\alpha$ d'où $\widehat{COB} = 180° - 180° - 2\alpha = 2\alpha$.



L'angle au centre associé à l'angle $\widehat{DAC}$ est l'angle $\widehat{DOC}$. On démontrerait de même que précédemment que $\widehat{DOB} = 2\widehat{DAB}$ ce qui s'écrit aussi $\widehat{DOC} + \widehat{COB} = 2(\widehat{DAC} + \widehat{CAB})$
soit $\widehat{DOC} + 2\alpha = 2(\widehat{DAC} + \alpha)$.

On en tire $\widehat{DOC} = 2\widehat{DAC}$. Or $\widehat{DOC}$ et $\widehat{COB}$ sont deux angles au centre interceptant des arcs de même longueur. Ils ont donc même mesure et on en déduit l'égalité $\widehat{DAC} = \widehat{CAB}$.
La droite (AC) est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$ ou encore de l'angle $\widehat{EAB}$. Cette droite étant aussi, dans le triangle EAB, la hauteur issue de A puisque le triangle ACB est rectangle en C, le triangle EAB est isocèle en A.
On en déduit, en particulier, $DE = c - b$ et $CE = a$.
Or les triangles ACB et BDE sont semblables (car $\widehat{ACB} = \widehat{BDE} = 90°$ et $\widehat{DEB} = \widehat{CBA}$ puisque ABE est isocèle en A).
Donc $\frac{BE}{AB} = \frac{DE}{CB}$ soit $\frac{2a}{c} = \frac{c-b}{a}$ soit $c(c-b) = 2a^2$.
Si c est un nombre premier, s'il divise $2a^2$ alors il divise 2 ou il divise a^2. S'il divise a^2, alors il divise a. Or ceci est impossible car $[AB]$ étant le diamètre du demi-cercle, $c > a$ (et $c > b$). Donc c doit diviser 2. Mais cela entrainerait, toujours puisque c est premier, $c = 2$ et donc $a = b = 1$, ce qui est aussi impossible.

Exercice CG 1. 4 Suite de Prouhet-Thue-Morse

On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{pour tout } n \geq 0,\ u_{2n} = u_n \text{ et } u_{2n+1} = 1 - u_n \end{cases}$
1. Montrer que les termes de cette suite valent 0 ou 1.
2. Calculer $u_{2\,021}$.
3. Pour combien d'indices n inférieurs ou égaux à 2 021 a-t-on $u_n = 0$?
4. On considère un entier p et l'entier $N = (2^p - 1)^2$. Déterminer u_N.

1. Par récurrence : $u_0 = 0, u_1 = 1$ et si on suppose que la propriété est vraie pour tous les termes de la suite d'indice inférieur à un certain n donné quelconque, alors :
- ou bien n est pair et il existe un entier p tel que $n = 2p$ d'où $u_{n+1} = u_{2p+1} = u_p$ qui vaut 0 ou 1 ;
- ou bien n est pair et il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$ d'où $u_{n+1} = u_{2p+2} = 1 - u_{p+1}$ qui vaut 0 ou 1 puisque $p + 1 < n$.
2. $2\,021 = 2 \times 1\,010 + 1$, donc $u_{2\,021} = 1 - u_{1\,010} = 1 - u_{505}$
$505 = 2 \times 252 + 1$, donc $u_{505} = 1 - u_{252} = 1 - u_{126} = 1 - u_{63}$
Résumé : $u_{2\,021} = 1 - u_{505} = u_{63}$
$u_{63} = 1 - u_{31} = u_{15}$, puis $u_{15} = 1 - u_7 = u_3 = 0$
Finalement $u_{2\,021} = 0$
3. Observons que, pour tout n, $u_{2n} + u_{2n+1} = 1$. On a donc $\sum_{n=0}^{n=2\,021} u_n = 1\,011$ et on en déduit que 1 011 des indices concernés sont égaux à 1. Attention, il n'y a pas alternance de 0 et 1, ce sont les « paquets » 01 et 10 qui font le résultat (mais il n'y a pas non plus alternance des paquets 01 et 10…)
4. On peut établir par récurrence que pour tous entiers k et n : $u_{2^k n} = u_n$.
* Si $p = 0$, $N = 0$ et donc $u_N = 0$
* Si $p \neq 0$, N est le carré d'un nombre impair, il est donc impair et on a $u_N = 1 - u_{2^{2p} - 2^{p+1}}$.
Mais $2^{2p} - 2^{p+1} = 2^{p+1}(2^{p-1} - 1)$ et, en vertu du résultat annoncé trois lignes plus haut, $u_N = 1 - u_{2^{p-1}-1}$
Si $p = 1$, on trouve $u_N = 1$, ensuite on prouve par récurrence que $u_N = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^p}{2}$.

Exercice CG 1. 5 Problèmes de maximum
Soit (C) un cercle du plan de rayon 1.
1. Déterminer les triangles ABC inscrits dans le cercle (C) pour lesquels la somme $AB^2 + BC^2 + CA^2$ est maximale.
2. Déterminer les quadrilatères $ABCD$ inscrits dans le cercle (C) pour lesquels la somme
$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$$
est maximale. Représenter un tel quadrilatère

1. Soir O le centre du cercle

$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)^2 = OB^2 + OA^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = 2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$

Ce calcul vaut pour les autres termes de la somme, et donc :

$S = AB^2 \ + \ BC^2 \ + \ CA^2 = 6 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

En remarquant que $\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2 = 3 + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$, on déduit que

$$S = 9 - \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2$$

Cette somme est donc maximale pour $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

Cette circonstance se produit seulement lorsque O est le centre de gravité du triangle ABC. Comme il est le centre de son cercle circonscrit, on en déduit que le triangle ABC est équilatéral.

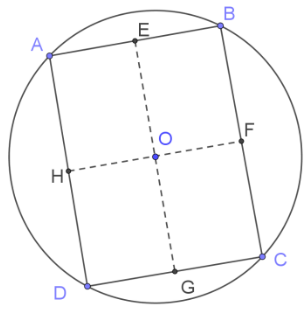
2. Le principe du calcul est le même que précédemment. La somme

$S = AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$ peut être écrite

$S = 12 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$

Et, en revenant au développement de $\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)^2$, $S = 12 - \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)^2 + 4$.

Il s'ensuit que le maximum de S est atteint lorsque O est l'isobarycentre des points A, B, C et D



Appelons E, F, G, H les milieux des côtés du quadrilatère. E, milieu de $[AB]$, appartient, comme O, à la médiatrice de $[AB]$, qui est donc (OE). Par associativité du barycentre, on prouve que E, O et G sont alignés… la médiatrice de $[AB]$ et celle de $[CD]$ sont donc confondues et les côtés $[AB]$et$[CD]$ sont parallèles. Finalement le quadrilatère est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur : c'est un rectangle.

Exercice CG 1. 6 Tout ça pour un malheureux rationnel !

Sans utiliser de calculatrice, déterminer des entiers naturels non nuls m et n pour lesquels :

$$S = (\sin 1°)^6 + (\sin 2°)^6 + (\sin 3°)^6 + \cdots + (\sin 87°)^6 + (\sin 88°)^6 + (\sin 89°)^6 = \frac{m}{n}.$$

Observons que, pour tout x (ici les fonctions trigonométriques agissent sur des nombres exprimés en degrés) compris entre 0 et 90 on a $(\sin x)^6 + (\sin(90 - x))^6 = (\sin x)^6 + (\cos x)^6$.

On sait que $(\sin x)^6 + (\cos x)^6 = ((\sin x)^2 + (\cos x)^2)((\sin x)^4 + (\cos x)^4 - (\sin x)^2(\cos x)^2)$

Et comme le premier facteur de ce produit vaut 1,

il reste $(\sin x)^6 + (\cos x)^6 = ((\sin x)^2 + (\cos x)^2)^2 - 3(\sin x)^2(\cos x)^2 = 1 - \frac{3}{4}(\sin 2x)^2$.

La somme à évaluer comporte 44 termes du type que nous venons de récrire plus le terme $(\sin 45°)^6$

On peut donc écrire : $S = 44 - \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{44}(\sin 2n)^2 + \frac{1}{8} = \frac{353}{8} - \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{22}\left(((\sin 2n)^2 + (\cos 2n)^2)\right)$ … en réutilisant la technique précédente.

Finalement $S = \frac{353}{8} - \frac{3}{4} \times 22 = \frac{221}{8}$

Exercice CG 1. 7 (Programme « mathématiques expertes ») Congruences

Déterminer, s'ils existent, les entiers naturels n tels que le nombre $A_n = \frac{2^{4n+2}+1}{65}$ soit

a. un entier

b. un nombre premier.

a. On commence par remarquer que $65 = 5 \times 13$ où 5 et 13 sont premiers. Le problème revient donc à chercher les entiers n tels 5 et 13 divisent $2^{4n+2} + 1$.

$2^{4n+2} + 1 = 16^n \times 4 + 1$. Comme $16 \equiv 1$ (modulo 5), il existe un entier k tel que le développement de $16^n \equiv 1^n$ et donc $16^n \times 4 + 1 \equiv 4 + 1 \equiv 0$ (modulo 5). Pour tout entier , 5 est donc un diviseur de $2^{4n+2} + 1$.

De même, $2^{4n+2} + 1 = (13 + 3)^n \times 4 + 1 \equiv 3^n \times 4 + 1$. Il s'agit donc de déterminer les entiers n tels que $3^n \times 4 + 1 \equiv 0$ (modulo 13).

Après avoir regardé les premières valeurs de n, on va démontrer que les seules valeurs de n qui conviennent sont celles pour lesquelles il existe un entier p tel que $n = 3p + 1$ soit $n \equiv 1$ (modulo 3).
Si $n \equiv 1$ (modulo 3), alors $3^n \times 4 + 1 \equiv 3 \times 4 + 1$ et on a bien $3^n \times 4 + 1 \equiv 0$ (modulo 13).
Si $n \equiv 2$ (modulo 3), alors $3^n \times 4 + 1 \equiv 9 \times 4 + 1$ et on a $3^n \times 4 + 1 \equiv 11$ (modulo 13).
Si $n \equiv 0$ (modulo 3), alors $3^n \times 4 + 1 \equiv 4 + 1$ et on a $3^n \times 4 + 1 \equiv 5$ (modulo 13).
Les seuls entiers naturels tels que le nombre A_n soit un entier sont donc les nombres congrus à 1 modulo 3.

$b.$ $A_n = \frac{2^{4n+2}+1}{65}$ doit déjà être un entier. Il existe donc un entier k tel que $n = 3k + 1$ et

$$A_n = \frac{4 \times (2^n)^4 + 1}{65} = \frac{(2 \times 2^{2n} - 2 \times 2^n + 1)(2 \times 2^{2n} + 2 \times 2^n + 1)}{65} = \frac{\left(2^{6k+3} - 2^{3k+2} + 1\right)\left(2^{6k+3} + 2^{3k+2} + 1\right)}{65}$$

Si A_n est un nombre premier p, alors $\left(2^{6k+3} - 2^{3k+2} + 1\right)\left(2^{6k+3} + 2^{3k+2} + 1\right) = 65\,p$.
Or, pour tout $k \geq 1$, $2^{6k+3} + 2^{3k+2} + 1 > 2^{6k+3} - 2^{3k+2} + 1 \geq 481$
car $2^{6k+3} - 2^{3k+2} + 1 = 2^{3k+2}\left(2^{3k+1} - 1\right) + 1$ et $2^{3k+2}\left(2^{3k+1} - 1\right) + 1 \geq 2^5(2^4 - 1) + 1$.
Comme p est premier, p divise $2^{6k+3} - 2^{3k+2} + 1$ ou p divise $2^{6k+3} + 2^{3k+2} + 1$. Dans les deux cas, 65 doit être le produit de l'un de ces nombres supérieurs à 481 par un entier, ce qui est impossible.
Le nombre A_n ne peut donc pas être premier.