



ACADÉMIE
DE VERSAILLES

Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Stage « en ligne » de novembre et décembre 2020

Fiche numéro 1

Les propositions de solution de chaque exercice doivent être renvoyées d'ici le lundi 7 décembre à l'adresse euler.pepiniere@ac-versailles.fr sous forme numérique (format .pdf ou image) par les professeurs selon les modalités précisées dans le courrier envoyé dans les lycées (envoi des propositions d'au plus deux équipes).

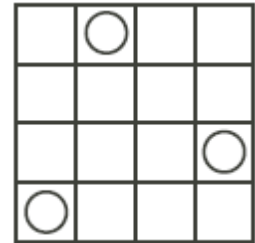
Exercice 1. 1 Un impair

L'écriture décimale du nombre impair m comporte trois chiffres distincts. Le chiffre des centaines – non nul comme il se doit – est le produit du chiffre des dizaines par le chiffre des unités. Déterminer m .

Exercice 1. 2 Pas vu, pas pris

On a placé trois pièces de monnaie, au hasard, sur trois cases différentes du quadrillage 4×4 ci-contre.

Déterminer la probabilité pour qu'il n'y ait pas deux pièces dans la même ligne, ni dans la même colonne.



Exercice 1. 3 Fonction réciproque

Soit f la fonction affine définie sur \mathbf{R} par $f(x) = 2x - 4$.

1. Montrer que tout réel b a un unique antécédent a par la fonction f et exprimer b en fonction de a .

2. On note g la fonction qui à b associe le nombre a défini dans la question précédente. On dit que g est la fonction réciproque de la fonction f .

Montrer que pour tout nombre réel x , $f(g(x)) = x$ et $g(f(x)) = x$.

3. Montrer qu'il existe une fonction h définie sur \mathbf{R} et telle que pour tout réel x , $f(h(g(x))) = 2x^2 + 16x + 26$. Calculer $h(\pi)$.

Exercice 1. 4 Pollution sonore

On aligne les microphones A, B et C en ligne droite de manière que A soit situé à 1 km à l'ouest de B et que C soit situé à 2 km à l'est de B. Un grand bruit est produit à un point P, ce dernier n'étant pas situé sur cette ligne. Le son voyage à une vitesse de $\frac{1}{3}$ km. s⁻¹ et a été capté par chacun des trois microphones.

Le microphone B est le premier à capter le son. Le microphone A capte le son $\frac{1}{2}$ s après le microphone B tandis que le microphone C le capte 1 s après le microphone A.

Déterminer la distance entre le microphone B et le point P.

Exercice 1. 5 Bissectrices d'un parallélogramme

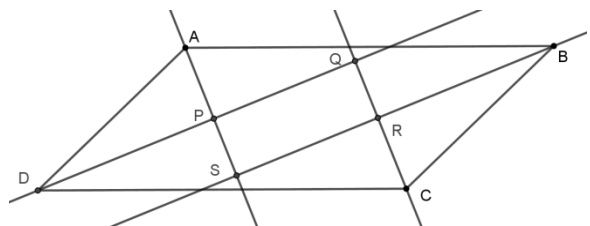
On considère un parallélogramme ABCD. On note $AB = a$ et $BC = b$ et on suppose que $a > b$.

Les points d'intersection des bissectrices intérieures des angles du parallélogramme forment un quadrilatère PQRS.

1. Démontrer que PQRS est un rectangle.

2. Démontrer que $PR = a - b$.

3. Pour quelle valeur du rapport $\frac{a}{b}$ l'aire du rectangle PQRS est-elle égale à celle du parallélogramme ABCD ?



Problème 1. 6 Des carrés et des cubes

Partie A : Somme de deux carrés

1. On cherche à savoir s'il existe deux entiers naturels a et b tels que : $a \leq b$ et $2018 = a^2 + b^2$.

a. Justifier que $a \leq 31$.

b. Démontrer que si a et b sont pairs alors $a^2 + b^2$ est un multiple de 4.

c. Démontrer que a et b ne peuvent pas être de parités différentes. Que peut-on en déduire pour a et b ?

d. Quels sont les chiffres des unités possibles pour le carré d'un entier naturel impair ? En déduire que le chiffre des unités de a ne peut-être ni 1, ni 5, ni 9.

2. Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $2018 = a^2 + b^2$.

Partie B : Somme de deux cubes

1. Soient a et b deux entiers naturels non nuls, on pose $N = a^3 + b^3$.

a. Démontrer que $N = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ et $4N - (a + b)^3 = 3(a + b)(a - b)^2$

b. En déduire que N possède un diviseur d tel que $N \leq d^3 \leq 4N$.

c. Existe-t-il deux entiers naturels a et b tels que $2018 = a^3 + b^3$? On rappelle que 1009 est un nombre premier.

2. Dans cette question $N = 62558$.

a. Vérifier que N est un multiple de 2018.

b. On suppose qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que $N = a^3 + b^3$. Quelles sont les valeurs de $a + b$ et $a^2 - ab + b^2$?

c. Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $62558 = a^3 + b^3$.

2. Ecrire un algorithme qui permet de montrer que 62558 est le plus petit multiple de 2018 qui peut s'écrire comme somme de deux cubes d'entiers naturels non nuls.