Pépinière académique de mathématiques

Année 2023-2024 **Stage « filé »**

Classe terminale **Fiche numéro 3**

Parution lundi 29 janvier **Retour attendu pour le jeudi 29 février**

ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Exercice 1 – Sommes d'inverses et constante d'Euler-Mascheroni

Rappels :

- pour comparer deux nombres, on étudie le signe de la différence ;
- pour déterminer le signe d'une fonction, on peut étudier ses variations et chercher les valeurs où elle s'annule ;
- on peut additionner membre à membre des inégalités de même sens.

En algèbre, on étudie des suites définies par $S_n = \sum_{k=k_0}^{k=n} t_k$, où (t_n) est une suite de réels. Ces suites (S_n) sont appelées *séries* et certaines sont très connues. La fiche 1 faisait étudier une série convergeant vers le nombre *e*. Cet exercice fait étudier deux autres séries très classiques.

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

Pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

1. **a.** Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

b. Comparer, pour tout entier $k > 1$, les nombres $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{k(k-1)}$. En déduire une majoration du nombre u_n.

c. Montrer que la suite (u_n) converge.

On démontre en fait que la limite de la suite (u_n) est $\frac{\pi^2}{6}$.

2. **a.** Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$.

b. En déduire que, pour tout entier $k \geq 1$, un encadrement de $\ln(k+1) - \ln k$.

c. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq v_n \leq 1 + \ln n$. En déduire la limite de la suite (v_n).

3. Soit (w_n) la suite définie par, pour tout entier $n \geq 2$, $w_n = v_{n-1} - \ln n$.

a. Déterminer le sens de variation de la suite (w_n).

b. Montrer que la suite (w_n) converge.

On appelle constante d'Euler-Mascheroni la limite γ de la suite (w_n).

1. **a.** Pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ qui est un nombre strictement positif. On en déduit que **la suite (u_n) est strictement croissante.**

b. Pour tout entier $k \geq 2$, $k > k-1 > 0$ d'où, en multipliant par $k > 0$, $k^2 > k(k-1) > 0$.

On en déduit que $\boldsymbol{\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}}$ (i)

On peut remarquer que, pour tout entier $k > 1$, $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-k+1}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$. On peut alors écrire, en additionnant membre à membre les inégalités (i) en faisant varier k de 2 à n et : $u_n < 1 + \sum_{k=2}^{k=n}\left(\frac{1}{k(k-1)}\right)$.

Or $\sum_{k=2}^{k=n}\left(\frac{1}{k(k-1)}\right) = \sum_{k=2}^{k=n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$

Soit $\sum_{k=2}^{k=n}\left(\frac{1}{k(k-1)}\right) = 1 - \frac{1}{n}$.

Cela implique que **pour tout entier $\boldsymbol{n \geq 2, u_n < 2 - \frac{1}{n} < 2}$.**

c. La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 2. On en déduit qu'elle **converge vers une limite $\boldsymbol{l \leq 2}$.**

2. **a.** Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$, $g(x) = x - \ln(1+x)$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $[0, +\infty[$ et :

pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1(x+1)-x(1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$.
On a donc $f'(x) \geq 0$, pour tout $x \in [0, +\infty[$.
La fonction f est donc croissante sur $[0, +\infty[$. Or $f(0) = 0$ donc **pour tout** $\boldsymbol{x \in [0, +\infty[, f(x) \geq 0}$
Soit $\boldsymbol{\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x)}$.
De même, pour tout réel $x \geq 0$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$, quantité positive sur $[0, +\infty[$. La fonction g est donc croissante sur $[0, +\infty[$ et comme $g(0) = 0$, on en déduit que **pour tout** $\boldsymbol{x \in [0, +\infty[, \ln(1+x) \leq x}$.

b. Pour tout entier $k \geq 1$, $\ln(k+1) - \ln k = \ln\frac{k+1}{k} = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

D'après la question précédente, on a donc $\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ soit $\boldsymbol{\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}}$ (ii).

Ces inégalités s'écrivent successivement :
$\frac{1}{2} \leq \ln 2 - \ln 1 \leq \frac{1}{1}$
$\frac{1}{3} \leq \ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2}$
....
$\frac{1}{n} \leq \ln n - \ln(n-1) \leq \frac{1}{n-1}$
$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$

c. En faisant varier k de 1 à n et en additionnant membre à membre les inégalités (ii), on obtient, pour tout entier $n \geq 1$:
$v_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq v_n$. La première inégalité de cet encadrement s'écrit aussi $v_{n+1} \leq 1 + \ln(n+1)$ et comme elle est valable pour tout entier naturel non nul n, on a aussi $v_n \leq 1 + \ln n$.
On a donc bien **pour tout entier** $\boldsymbol{n \geq 1,\ \ln(n+1) \leq v_n \leq 1 + \ln n}$.
La première inégalité suffit pour affirmer que $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty}$.

3. a. Pour tout entier $n \geq 2$, $w_{n+1} - w_n = v_n - \ln(n+1) - v_{n-1} + \ln n = \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
D'après la question 2a., on en déduit que $w_{n+1} - w_n \geq 0$ et que **la suite** $\boldsymbol{(w_n)}$ **est croissante.**

b. Pour tout entier $n \geq 2$, $w_n = v_{n-1} - \ln n$ et $v_n \leq 1 + \ln n$ donc $v_{n-1} \leq 1 + \ln(n-1)$
d'où $w_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln n$ soit $w_n \leq 1 + \ln\frac{n-1}{n} \leq 1$ car $0 \leq \frac{n-1}{n} \leq 1$ donc $\ln\frac{n-1}{n} \leq 0$.
La suite (w_n) est donc croissante et majorée. On en déduit que **cette suite est convergente.**

La limite γ de cette suite, appelée constante d'Euler-Mascheroni, est approchée très lentement avec la suite (w_n). Euler en calcula pourtant 16 décimales en 1734. Ce nombre γ est encore mal connu (on ne soit toujours pas si c'est un rationnel ou non) mais il intervient dans d'autres domaines des mathématiques, notamment en arithmétique.

Exercice 2 – On retrouve l'exponentielle

On rappelle que pour tout réel a strictement positif et pour tout entier n, $a^n = \mathrm{e}^{n \ln a}$.
Cet exercice nécessite la connaissance de limites usuelles des fonctions logarithme népérien et exponentielle.

1. Déterminer, si elle existe, la limite lorsque h tend vers 0 de $\frac{\ln(1+h)}{h}$ et, pour tout nombre réel x, en déduire, si elle existe, la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

2. En déduire, pour tout nombre réel x, la limite de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(h) = \ln(1+h)$. Par composition, la fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et $f'(h) = \frac{1}{1+h}$. En particulier, $f'(0) = 1$. Or $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ et $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\ln(1+h)}{h}$.
Conclusion $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

Pour tout nombre réel x, on pose $h = \frac{x}{n}$. Pour x fixé, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$ et $\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = \frac{1}{x} \times n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$.

2. Pour tout nombre réel x, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$. Par composition de limites (les fonctions qui interviennent étant continues sur les intervalles où elles sont définies), $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$.

Exercice 3 – Suites et probabilités

Propriété : si A et B sont deux événements incompatibles, alors $p(A \cup B) = p\,(A) + p(B)$.
Cette propriété s’étend à une union finie d’événements deux à deux incompatibles.
Propriété : Soient A et B des événements tels que $p(B) \neq 0$; alors $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$.
Cette propriété permet de calculer de nombreuses probabilités en s’appuyant sur un arbre de probabilités.

Une urne contient en proportion 70% de jetons verts, 10% de jetons bleus, 20% de jetons noirs.
On extrait au hasard un jeton de l’urne et l’on note sa couleur.
Un jeu consiste à extraire un jeton de l’urne :

- Si le jeton est bleu, le jeu s’arrête et l’on a gagné.
- Si le jeton est noir, le jeu s’arrête et l’on a perdu.
- Si le jeton est vert, on le replace dans l’urne et l’on recommence l’épreuve.

Soit n un entier naturel non nul. On fixe à n le nombre le nombre de fois ou l’épreuve précédente est réalisée (épreuve qui peut s’interrompre avant le rang n si l’on a au préalable perdu ou gagné)

Pour tout entier $k \geq 1$ inférieur ou égal à n, on note :

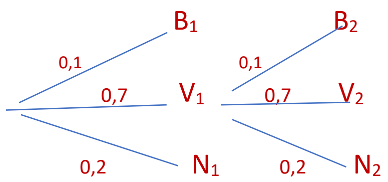
- B_k l’événement « le jeton extrait après k itérations est bleu »
- N_k l’événement « le jeton extrait après k itérations est noir »
- V_k l’événement « le jeton extrait après k itérations est vert »
- G_n l’événement « on a gagné à un rang k inférieur ou égal à n »
- P_n l’événement « on a perdu à un rang k inférieur ou égal à n »

1. On se place dans cette question dans le cas où $n = 2$.
   a. Représenter l’épreuve à l’aide d’un arbre de probabilité.
   b. Calculer la probabilité de chacun des événements V_2, G_2, P_2.

2. n désigne maintenant un entier naturel non nul quelconque. On note respectivement v_n, g_n, p_n la probabilité des événements V_n, G_n, P_n .
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique ; établir l’expression du terme général en fonction de n.
   b. Soit un entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$. Justifier que $p(B_k) = 0{,}1 \times 0{,}7^{k-1}$ et $p(N_k) = 0{,}2 \times 0{,}7^{k-1}$
   c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $g_n = \sum_{k=1}^{n} 0{,}1 \times 0{,}7^{k-1}$ et $p_n = \sum_{k=1}^{n} 0{,}2 \times 0{,}7^{k-1}$.
   d. Exprimer g_n et p_n en fonction de l’entier n.
   e. Etudier la convergence des suites $(v_n), (g_n), (p_n)$.

3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $g_n > 0{,}32$.

1. ***a.*** Le jeton est tiré au hasard, ce qui assure l’équiprobabilité, puis remis dans l’urne après chaque tirage. Les données du problème en pourcentages se traduisent donc par l’arbre de probabilité ci-dessous.



b. $p(V_2) = p(V_1 \cap V_2) = (p(V_1) \times p_{V_1}(V_2) = 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49$
$G_2 = B_1 \cup B_2$ et les événements B_1, B_2 sont incompatibles
donc $p(G_2) = p(B_1) + p(B_2) = p(B_1) + p(V_1) \times p_{V_1}(B_2) = 0{,}1 + 0{,}7 \times 0{,}1 = 0{,}17$.

$P_2 = N_1 \cup N_2$ et les événements N_1, N_2 sont incompatibles
donc $p(N_2) = p(N_1) + p(V_1) \times p_{V_1}(N_2) = 0{,}2 + 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}34$.

2. ***a.*** Pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p(V_n) = p(V_{n-1}) \times p_{V_{n-1}}(V_n) = 0{,}7 v_{n-1}$, ce qui prouve que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7. Donc $v_n = v_1 \times 0{,}7^{n-1} = 0{,}7^n$.

   b. Pour que l'événement B_k soit réalisé, il faut et il suffit que les événements $V_1, V_2, \dots, V_{k-1}, B_k$ soient réalisés dans cet ordre. Ainsi $B_k = V_{k-1} \cap B_k$ donc $p(B_k) = p_{V_{k-1}}(B_k) \times p(V_{k-1}) = 0{,}1 \times 0{,}7^{k-1}$.
   De même $p(N_k) = p_{V_{k-1}}(N_k) \times p(V_{k-1}) = 0{,}2 \times 0{,}7^{k-1}$.

   c. $G_n = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$, les événements étant deux à deux incompatibles.
   Donc $g_n = p(B_1) + p(B_2) + \cdots + p(B_n) = 0{,}1 + 0{,}1 \times v_1 + \cdots + 0{,}1 \times v_{n-1} = 0{,}1 \sum_{k=1}^{n} 0{,}7^{k-1}$
   $P_n = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_n$, les événements étant deux à deux incompatibles.
   Donc $p_n = p(N_1) + p(N_2) + \cdots + p(N_n) = 0{,}2 + 0{,}2 \times v_1 + \cdots + 0{,}2 \times v_{n-1} = 0{,}2 \sum_{k=1}^{n} 0{,}7^{k-1}$

   d. $g_n = 0{,}1 \sum_{k=1}^{n} 0{,}7^{k-1} = 0{,}1 \times \frac{1-0{,}7^n}{1-0{,}7} = \frac{1}{3}(1 - 0{,}7^n)$ et $p_n = 0{,}2 \sum_{k=1}^{n} 0{,}7^{k-1} = 0{,}2 \times \frac{1-0{,}7^n}{1-0{,}7} = \frac{2}{3}(1 - 0{,}7^n)$

   e. Puisque $0 < 0{,}7 < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}7^n = 0$. On en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = \frac{1}{3}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{3}$.

3. Pour tout entier naturel n non nul,

$g_n > 0{,}32 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(1 - 0{,}7^n) > 0{,}32 \Leftrightarrow 1 - 0{,}7^n > 0{,}96 \Leftrightarrow 0{,}04 > 0{,}7^n$

Par stricte croissance de la fonction logarithme sur $]0\,;+\infty[$ et par les propriétés du logarithme, on obtient

$0{,}04 > 0{,}7^n \Leftrightarrow \ln(0{,}04) > \ln(0{,}7^n) \Leftrightarrow \ln(0{,}04) > n\ln(0{,}7) \Leftrightarrow \frac{\ln(0{,}04)}{\ln(0{,}7)} < n$ car $\ln(0{,}7) < 0$

Une calculatrice donne pour valeur approchée : $\frac{\ln(0{,}04)}{\ln(0{,}7)} \approx 9{,}024$; donc à partir du rang $n = 10$, on aura $g_n > 0{,}32$.

N.B. Après avoir montré que la suite (g_n) est croissante (puisque $0 < 0{,}7 < 1$), on peut aussi programmer les termes de la suite (g_n) sur calculatrice ou écrire un algorithme avec une boucle « while » qui s'arrête dès que g_n dépasse 0,32.

Exercice 4 – Encadrement de $\ln(1+x)$

Rappels :

- pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de la différence ;
- pour déterminer le signe d'une fonction, on peut étudier ses variations et chercher les valeurs où elle s'annule ;
- on peut additionner membre à membre des inégalités de même sens ;
- pour déterminer une limite, on peut chercher à appliquer le théorème des gendarmes.

1. Etudier le sens de variation puis le signe des fonctions suivantes :
   a. La fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$.
   b. La fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$.
   c. La fonction h définie sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ par $h(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3}\right)$.
2. En déduire que :
   a. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
   b. Pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
3. Etudier la limite éventuelle en 0 de $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

1. ***a.*** La fonction f est, par somme et composition, dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour tout $x \in]-1, +\infty[$,
   $f'(x) = 1 - \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{3} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}(1 + x - x(1+x) + x^2(1+x) - 1)$

Soit $f'(x)=\frac{1}{1+x}(1+x-x-x^2+x^2+x^3-1)=\frac{x^3}{1+x}$.
Sur $]-1,+\infty[$, $1+x>0$ donc $f'(x)$ a le signe de x^3 c'est-à-dire de x. La fonction f est donc décroissante sur $]-1,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$. La fonction f admet donc un minimum en 0. Or $f(0)=-\ln 1=0$.
On en déduit que pour tout $x\in]-1,+\infty[$, $f(x)\geq 0$.

b. La fonction g est, par somme et composition, dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x\in[0,+\infty[$,
$g'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{1}{1+x}(1-(1-x)(1+x))=\frac{1}{1+x}\left(1-(1-x^2)\right)=\frac{x^2}{1+x}$
Pour tout $x\in[0,+\infty[$, $g'(x)\geq 0$ donc la fonction g est croissante sur $[0,+\infty[$. Or $g(0)=\ln 1=0$.
On en déduit que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $g(x)\geq 0$.

c. La fonction h est, par somme et composition, dérivable sur $\left[-\frac{1}{2},0\right]$, et pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$,
$h'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x+2x^2)=\frac{1}{1+x}\left(1-(1+x)(1-x+2x^2)\right)$
Soit $h'(x)=\frac{1}{1+x}\left(1-(1-x+2x^2+x-x^2+2x^3)\right)=\frac{1}{1+x}(1-1-x^2-2x^3)=\frac{-1}{1+x}(x^2+2x^3)$
Soit $h'(x)=\frac{-x^2}{1+x}(1+2x)$. Pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$, $\frac{-x^2}{1+x}\leq 0$ et $1+2x\geq 0$ donc $h'(x)\leq 0$.
La fonction h est donc décroissante sur $\left[-\frac{1}{2},0\right]$. Or $h(0)=\ln 1=0$.
On en déduit que pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$, $h(x)\geq 0$.

2. ***a.*** On a démontré que :
pour tout $x\in]-1,+\infty[$, $f(x)\geq 0$ soit $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\geq\ln(1+x)$
et pour tout $x\in[0,+\infty[$, $g(x)\geq 0$ soit $\ln(1+x)\geq x-\frac{x^2}{2}$. Or $[0,+\infty[\subset]-1,+\infty[$.
On en déduit que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

b. De même, on a démontré que :
pour tout $x\in]-1,+\infty[$, $f(x)\geq 0$ soit $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\geq\ln(1+x)$
et pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$, $h(x)\geq 0$ donc $\ln(1+x)\geq x-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}$. Or $\left[-\frac{1}{2},0\right]\subset]-1,+\infty[$.
Donc, pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$, $x-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}\leq\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

3. Pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$, $x-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}\leq\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ donc $-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}\leq\ln(1+x)-x\leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.
Donc pour tout $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right[$, $-\frac{1}{2}+\frac{2x}{3}\leq\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\leq-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$ car $x^2>0$.
On en déduit, par encadrement, que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$.
De même, pour tout $x\in[0,+\infty[$, $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ donc $-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)-x\leq-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.
Donc, pour tout $x\in]0,+\infty[$ $-\frac{1}{2}\leq\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\leq-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$ car $x^2>0$.
On en déduit, par encadrement, que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$.
Au final, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$.

Exercice 5 – Intégrales et inégalités
Définition : le plan étant muni d'un repère orthonormal, on définit l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ comme l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentant la fonction f et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
Du discret au continu : dans le calcul de cette intégrale, on parle de « somme continue », le principe étant de décomposer l'intervalle $[a,b]$ en intervalles infiniment petits et de sommer des aires infiniment petites. Il est donc naturel de relier ce calcul intégral à des « sommes discrètes » en décomposant cette fois-ci l'intervalle $[a,b]$ en

intervalles de longueur $\frac{1}{n}$ et de comparer les deux types de sommes. On s'appuie pour cela sur la propriété ci-dessous.

Propriété : soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$. Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. L'objectif de l'exercice est de déterminer, si elle existe, la limite lorsque n tend vers $+\infty$ du quotient $\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$.

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x^p$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = \frac{1}{n}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Montrer que $S_n \leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq S_n + \frac{1}{n}$.

2. En déduire que la suite (S_n) converge.

3. Conclure.

1. La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = px^{p-1}$ donc $f'(x) \geq 0$. La fonction f est donc croissante sur $[0,1]$. Pour tout entier $0 \leq k \leq n-1$, la fonction f est donc croissante sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ donc pour tout $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k+1}{n}\right)$. En appliquant la propriété 1 rappelée, comme f est continue sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\mathrm{d}x$

soit $\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \leq \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k+1}{n}\right)$ c'est-à-dire $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

En additionnant membre à membre ces encadrements pour k variant de 0 à $n-1$, on obtient :

$\frac{1}{n}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) \leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1)\right)$

Soit $S_n \leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq S_n + \frac{1}{n}(-f(0) + f(1))$ c'est-à-dire Soit $S_n \leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq S_n + \frac{1}{n}$.

2. L'encadrement ci-dessus s'écrit aussi $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n} \leq S_n \leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, en en déduit que la suite (S_n) converge et que sa limite est $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

3. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$.

$S_n + \frac{1}{n} = \frac{1^p+2^p+\cdots+(n-1)^p}{n^{p+1}} + \frac{1}{n} = \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_n + \frac{1}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$.

Exercice 6 : …le désordre, ça vous dérange ?

Définition : On appelle permutation des éléments de l'ensemble $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ toute liste à n éléments de E deux à deux distincts.

Propriété : le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n est $n\,! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$

Propriété : si A et B sont deux ensembles finis disjoints (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$), alors

$$\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

Soit k un entier naturel non nul et une liste ordonnée $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ de k éléments deux à deux distincts.

On appelle *dérangement* de la liste $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ toute permutation des éléments de la liste telle qu'aucun élément ne conserve la même place.

Exemple :

(2,3,4,1) est un dérangement de la liste (1,2,3,4).
(1,4,3,2) n'est pas un dérangement de la liste (1,2,3,4) car 1 et 3 conservent leurs places respectives.
On désigne par D_k le nombre de dérangements d'une liste à k éléments.

1. Ecrire tous les dérangements de chacune des listes suivantes : ***a.*** (1) ***b.*** (1,2) ***c.*** (1,2,3) ***d.*** (1,2,3,4) et donner la valeur des nombres D_1, D_2, D_3, D_4.
2. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2 et la liste des k entiers $L_k = (1,2,\dots,k)$.
   a. Montrer que le nombre de permutations laissant un unique élément de la liste L_k à sa place est kD_{k-1}.
   b. Déterminer le nombre de permutations laissant exactement deux éléments de la liste L_k à leur place.
   c. Établir la formule : $k! = 1 + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} D_{k-i}$
3. À l'entrée d'une salle de spectacle au début du XXième siècle, cinq hommes déposent au vestiaire leurs chapeaux respectifs. L'employé leur attribue les numéros de porte-manteaux 1, 2 ,3 ,4 ,5 mais en réalité dispose au hasard ces chapeaux sur les cinq porte-manteaux. Quelle est la probabilité qu'à la sortie, aucun des hommes ne se retrouve avec son propre chapeau ?

1. Il n'y a aucun dérangement de la liste (1) ; donc $D_1 = 0$
Il y a un seul dérangement de la liste (1,2) : la liste (2,1). Donc $D_2 = 1$.
Il y a deux dérangements de la liste (1,2,3) : les listes (3,1,2) et (2,3,1). Donc $D_3 = 2$.
Ecrivons les 24 permutations des entiers 1,2,3,4 et supprimons toutes les lignes pour lesquelles un nombre conserve sa place :

1	**2**	**3**	**4**	
1	2	3	4	
1	2	4	3	
1	3	2	4	
1	3	4	2	
1	4	2	3	
1	4	3	2	
2	1	3	4	
2	1	4	3	(2,1,4,3)
2	3	1	4	
2	3	4	1	(2,3,4,1)
2	4	1	3	(2,4,1,3)
2	4	3	1	
3	1	2	4	
3	1	4	2	(3,1,4,2)
3	2	1	4	
3	2	4	1	
3	4	1	2	(3,4,1,2)
3	4	2	1	(3,4,2,1)
4	1	2	3	(4,1,2,3)
4	1	3	2	
4	2	1	3	
4	2	3	1	
4	3	1	2	(4,3,1,2)
4	3	2	1	(4,3,2,1)

On trouve $D_4 = 9$.

2. ***a.*** Il y a k façons de choisir l'élément qui conserve sa place dans la liste L_k. Cet élément étant choisi, il y a D_{k-1} dérangements des $k-1$ autres éléments ne laissant aucun de ceux-là à leur place. Cela donne donc kD_{k-1}permutations laissant un seul élément à sa place.
b. Il y a $\binom{k}{2}$façons de choisir les deux éléments qui conservent leur place. Ces deux éléments étant choisis, il y a D_{k-2} dérangements des $k-2$ autres éléments ne laissant aucun de ceux-là à leur place. Cela donne donc $\binom{k}{2} D_{k-2}$ permutations laissant exactement deux éléments à leur place

c. On sait qu'il existe $k!$ permutations de la liste d'entiers $(1, 2, \ldots, k)$.
Dénombrons ces permutations en les regroupant selon le nombre d'éléments qu'elles laissent à leur place.
Pour tout entier i compris entre 0 et k, désignons par P_i l'ensemble des permutations de $(1, 2, \ldots, k)$ laissant exactement i éléments à leur place.
Soit P l'ensemble des permutations de $(1, 2, \ldots, k)$. $P = P_0 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_k$ et les ensembles $P_0, P_1, \ldots, P_k$ sont deux à deux disjoints, donc $\mathrm{Card}(P) = \mathrm{Card}(P_0) + \mathrm{Card}(P_1) + \cdots + \mathrm{Card}(P_k)$.
Or $\mathrm{Card}(P) = k!$, $\mathrm{Card}(P_k) = D_k$ puisque les éléments ne conservent aucun élément à leur place.
$\mathrm{Card}(P_1) = kD_{k-1}$ d'après la question **2.*a.***
$\mathrm{Card}(P_2) = \binom{k}{2} D_{k-2}$ d'après la question **2.*b.***
De la même manière, pour $0 \leq i \leq k-2$, $\mathrm{Card}(P_i) = \binom{k}{i} D_{k-i}$.
Observons qu'il n'existe aucune permutation laissant $k-1$ éléments à leur place (puisque si $k-1$ éléments restent à leur place, le k-ième aussi) donc $\mathrm{Card}(P_{k-1}) = 0$.
Observons enfin qu'il n'existe qu'une permutation laissant les k éléments à leur place, donc $\mathrm{Card}(P_k) = 1$.
On obtient donc $k! = D_k + kD_{k-1} + \binom{k}{2} D_{k-2} + \cdots + \binom{k}{k-2} D_2 + 0 + 1 = 1 + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} D_{k-i}$.

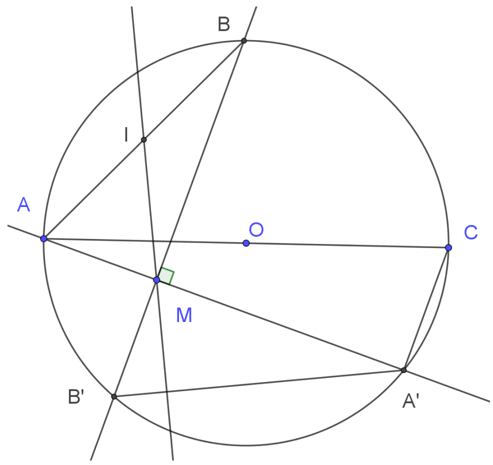
3. Déposer au hasard les cinq chapeaux 1, 2, 3, 4, 5 sur les cinq porte-manteaux 1, 2, 3, 4, 5 c'est effectuer une permutation des éléments 1, 2, 3, 4, 5. Il y a donc 5 ! =120 permutations que l'on supposera équiprobables.
L'événement « aucun des hommes ne retrouve son chapeau » est l'ensemble des dérangements de la liste (1, 2, 3, 4, 5).
D'après le résultat établi à la question **2.*c.***, $5! = 1 + D_5 + 5D_4 + \binom{5}{2} D_3 + \binom{5}{3} D_2$ ce qui équivaut à :
$120 = 1 + D_5 + 5 \times 9 + 10 \times 2 + 10 \times 1$ soit $D_5 = 120 - 1 - 45 - 20 - 10 = 44$.
La probabilité qu'aucun homme ne retrouve son chapeau est : $\frac{44}{120} = \frac{11}{30}$

Exercice 7 – Orthogonalité dans un cercle

On peut démontrer une orthogonalité en prouvant qu'un produit scalaire est nul.
Les propriétés opératoires du produit scalaire alliées à la relation de Chasles sont souvent utiles pour calculer des produits scalaires.

On considère un cercle C de centre O et de rayon R et un point M intérieur au cercle. Par le point M, on mène deux droites perpendiculaires qui coupent le cercle en A et A' pour une droite, en B et B' pour l'autre droite. On note I le milieu de [AB].

1. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}} = \mathrm{MO}^2 - R^2$.
   (On pourra introduire le point C diamétralement opposé à A sur le cercle C).
2. Montrer que la droite (IM) est la hauteur issue de M dans le triangle MA'B'.



1. Soit C le point diamétralement opposé à A sur le cercle C.

$\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\left(\overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA'}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{CA'}}$
Or le triangle AA'C a son côté [AC] diamètre du cercle C. Il est donc rectangle en A' et $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MC}}$
Soit $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$
Soit $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}} = \overrightarrow{\mathrm{MO}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{MO}}.\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) + \overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OC}}$
Or O étant le centre du cercle donc le milieu de [AC], $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$
Et $\overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}.\left(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = -R^2$
On a donc bien $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}} = \mathrm{MO}^2 - R^2$.
On a de même $\overrightarrow{\mathrm{MB}}.\overrightarrow{\mathrm{MB'}} = \mathrm{MO}^2 - R^2 = \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}}$.

2. On va montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{MI}}.\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ est nul.

I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{\mathrm{MI}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{MI}}.\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{A'M}} + \overrightarrow{\mathrm{MB'}}\right)$

Soit $\overrightarrow{\mathrm{MI}}.\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{A'M}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB'}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MB}}.\overrightarrow{\mathrm{A'M}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MB}}.\overrightarrow{\mathrm{MB'}}$.

Comme les droites (AA') et (BB') sont perpendiculaires en M, $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB'}} = \overrightarrow{\mathrm{MB}}.\overrightarrow{\mathrm{A'M}} = 0$

D'autre part, $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{A'M}} = -\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}} = -\overrightarrow{\mathrm{MB}}.\overrightarrow{\mathrm{MB'}} = R^2 - \mathrm{MO}^2$

Au final $\overrightarrow{\mathrm{MI}}.\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = 0$ et la médiane issue de M dans le triangle MAB est bien la hauteur issue de M dans le triangle $MA'B'$.

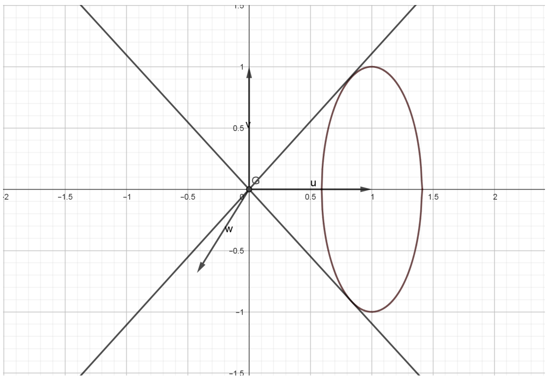
Exercice 8 - section d'un cône par un plan.

Les courbes appelées coniques (parabole ; hyperbole ; ellipse) sont connues et étudiées depuis l'antiquité. Au début du XVII[ème] siècle, Pascal s'est rendu célèbre par son *traité sur les coniques*, une œuvre de jeunesse, dans laquelle il établit certaines propriétés de ces courbes en les considérant comme des sections d'un cône et d'un plan et s'inspirant en cela des travaux de Desargues.

Dans l'exercice qui suit, on se propose d'étudier sur un exemple la courbe d'intersection d'un cône et d'un plan dans un repère orthonormé de l'espace.

- On utilisera une représentation paramétrique de droite.
- On utilisera ce résultat : si (a, b) est un couple de nombres réels tel que $a^2 + b^2 = 1$, alors il existe un nombre réel θ tel que $a = \cos(\theta)$ *et* $b = \sin(\theta)$.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Soit le point A (0,1,0) ; soit Γ le cercle contenu dans le plan d'équation $y = 1$, de centre A et de rayon 1.
L'ensemble des droites (Om) où m est un point du cercle Γ est un cône de sommet O que l'on nommera (C).
Toute droite (Om) est appelée une génératrice du cône.



<u>Partie A :</u> équation cartésienne du cône (C)

Pour tout point m du cercle Γ, il existe un nombre réel θ tel que le point m ait pour coordonnées $(\cos(\theta), 1, \sin(\theta))$.

1. Soit $m(\cos(\theta), 1, \sin(\theta))$; établir une représentation paramétrique de la droite (Om).

2. Soit $M\ (x, y, z)$ un point du cône (C). Démontrer que $y^2 = x^2 + z^2$.

3. Soit $M\ (x, y, z)$ un point de l'espace tel que $y^2 = x^2 + z^2$.

a. Montrer que si $y = 0$, alors $M = O$ (origine du repère).

b. Supposons $y \neq 0$. On pose $y = t$. Montrer qu'il existe un réel θ tel que $\begin{cases} x = t\cos(\theta) \\ y = t \\ z = t\sin(\theta) \end{cases}$.

c. En déduire qu'un point $M\ (x, y, z)$ appartient au cône (C) si et seulement si $y^2 = x^2 + z^2$.

N.B. La relation $y^2 = x^2 + z^2$ est appelée une équation cartésienne du cône (C).

<u>Partie B</u> : section du cône par un plan.

On considère le plan P d'équation $z = 1$. On désigne par (H) l'intersection du plan P et du cône (C).
Soit le point $B(0, 0, 1)$. On considère le repère orthonormé $(B\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan P : un point M du plan P de coordonnées $(x, y, 1)$ dans le repère de l'espace $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ a pour coordonnées (x, y) dans le repère $(B; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Montrer qu'une équation de (H) dans le repère $(B; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $y^2 = x^2 + 1$.

2. Montrer que si un point $M(x\,;\ y)$ appartient à (H), alors les points $M_1(-x, y), M_2(x, -y), M_3(-x, -y)$ appartiennent à (H). En déduire que (H) admet des axes et un centre de symétrie que l'on précisera.

3. Montrer que la restriction de (H) au quart du plan P défini par $x \geq 0$ et $y \geq 0$ a pour équation $y = \sqrt{x^2 + 1}$, où $x \geq 0$.

4. On considère la fonction f définie dans l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.
   a. Montrer que la fonction f admet en $+\infty$ une limite que l'on précisera.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$; en déduire l'existence d'une asymptote oblique.
   c. Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   d. Construire dans un repère orthonormé la courbe de la fonction f. En déduire l'allure (H), en précisant la construction.

N.B. La courbe (H) est une hyperbole.

Partie A :

1. Le vecteur $\overrightarrow{Om}$ a les mêmes coordonnées que le point m soit $\overrightarrow{Om}\big(\cos(\theta);1;\sin(\theta)\big)$ donc une représentation paramétrique de la droite (Om) est $\begin{cases}x=t\cos(\theta)\\ y=t \qquad\qquad t\in\mathbf{R}\\ z=t\sin(\theta)\end{cases}$
2. Soit $M(x,y,z)$ un point du cône (C). Il existe un point m du cercle Γ tel que $M\in(Om)$, donc il existe un couple $(t\,;\theta)$ de réels tel que $x=t\cos(\theta)$; $y=t$; $z=t\sin(\theta)$.
   $x^2+z^2=\big(t\cos(\theta)\big)^2+\big(t\sin(\theta)\big)^2=t^2\Big(\big(\cos(\theta)\big)^2+\big(\sin(\theta)\big)^2\Big)=t^2$, ce qui donne $y^2=x^2+z^2$.
3. Réciproquement soit $M\,(x,y,z)$ un point de l'espace tel que $y^2=x^2+z^2$.
   a. Si $y=0$, alors $x^2+z^2=0$ et puisque $x^2\geq 0$ et $z^2\geq 0$, la somme des termes n'est nulle que si les deux termes sont nuls donc $x^2=0$ et $z^2=0$; d'où $x=0$ et $y=0$. Donc $M=O\,(0{,}0{,}0)$ et O est un point du cône (C).
   b. Si $y\neq 0$, on pose $y=t$. Alors $y^2=x^2+z^2\Leftrightarrow t^2=x^2+z^2\Leftrightarrow 1=\frac{x^2}{t^2}+\frac{z^2}{t^2}\Leftrightarrow 1=\left(\frac{x}{t}\right)^2+\left(\frac{z}{t}\right)^2$
   c. Il existe donc un réel θ tel que $\frac{x}{t}=\cos(\theta)$ et $\frac{z}{t}=\sin(\theta)$. D'où $\begin{cases}x=t\cos(\theta)\\ y=t\\ z=t\sin(\theta)\end{cases}$ ce qui signifie que le point M appartient à une génératrice (Om) du cône. Donc M appartient au cône (C).
   D'après les résultats établis aux questions **2.** et **3.**, on peut conclure à l'équivalence :

Un point $M\,(x,y,z)$ appartient au cône (C) si et seulement si $y^2=x^2+z^2$.

Partie B :

1. $(H)=(C)\cap P$ donc un point $M\,(x,y,z)$ appartient à $(H)\Leftrightarrow\begin{cases}z=1\\ y^2=x^2+z^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=1\\ y^2=x^2+1\end{cases}$

Dans le repère $(B;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, une équation de (H) est $y^2=x^2+1$.

2. $\forall x\in\mathbf{R}$, $\forall y\in\mathbf{R}$, $y^2=x^2+1\Leftrightarrow y^2=(-x)^2+1\Leftrightarrow(-y)^2=x^2+1\Leftrightarrow(-y)^2=(-x)^2+1$
   ce qui prouve que si un point $M(x,y)$ appartient à (H) , alors les points $M_1(-x,y)$, $M_2(x,-y)$, $M_3(-x,-y)$ appartiennent à (H).
   (H) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère $(B\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, à l'axe des abscisses du repère $(B\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$et par rapport à l'origine B du repère $(B\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.
3. Si $y\geq 0$, alors $y^2=x^2+1\Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+1}$; donc $y=\sqrt{x^2+1}$ est une équation de la restriction de (H) dans le quart du plan P défini par $x\geq 0$ et $y\geq 0$.
4. *a.* $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$
   b. $f(x)-x$ présente une forme indéterminée en $+\infty$.
   Or, $\sqrt{x^2+1}-x=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

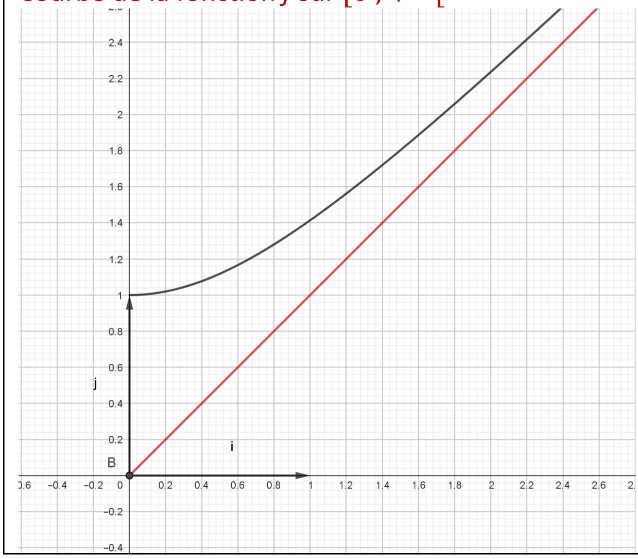
$\operatorname{Lim}\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=+\infty$
et par inverse $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ donc la droite d'équation $y=x$ est une asymptote à la courbe (H).

   c. La fonction $x\to x^2+1$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et à valeurs dans $[0\,;+\infty[$ et la fonction $X\to\sqrt{X}$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. Donc par composition f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

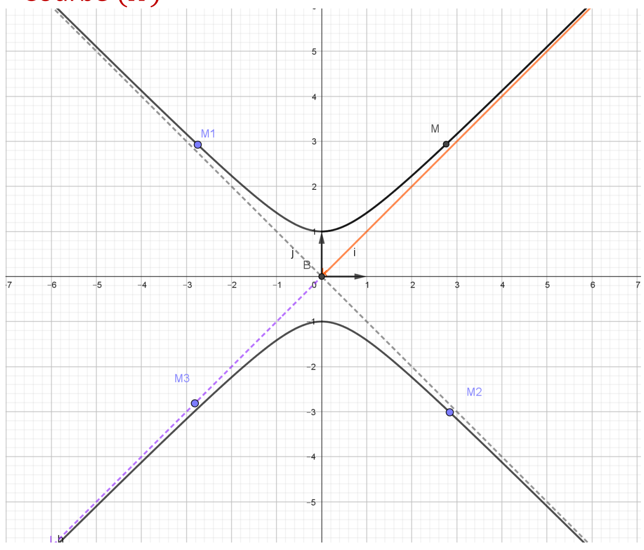
On peut aussi calculer la dérivée $\forall x \in [0;+\infty[, f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ qui est strictement positive sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et nulle en 0.

d.

Courbe de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$



Courbe (H)



À partir de la courbe de la fonction f, on obtient (H) en effectuant une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées, puis une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.