ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Stage « en ligne » de janvier et février 2021

Fiche numéro 4

Les propositions de solution de chaque exercice doivent être envoyées d'ici le vendredi 12 mars à l'adresse euler.pepiniere@ac-versailles.fr, sous forme numérique (format .pdf ou image), en pièce jointe ou avec un système de dépôt pour les fichiers volumineux, par les professeurs selon les modalités précisées dans le courrier envoyé dans les lycées (envoi des propositions d'au plus deux équipes).

Exercice CG 4. 1 Des entiers ?

Trouver tous les triplets (p,q,r) de nombres premiers tels que les trois nombres $\frac{p^2+2q}{q+r}, \frac{q^2+9r}{r+p}, \frac{r^2+3p}{p+q}$ sont des entiers naturels.
Avertissement : Pour savoir si un nombre entier en divise un autre, une méthode naïve peut être de travailler sur le quotient du second par le premier. Dans cet exercice, les quotients ne sont qu'une manière de poser le problème, les raisonnements se font sur des entiers et la relation « divise ».

Exercice CG4. 2 Une équation fonctionnelle
Déterminer toutes les fonctions de **R** dans **R** telles que :
(*) pour tous réels distincts x et y, $f(x) \neq f(y)$
(**) pour tous réels x et y,$f\left(x+f\big(f(-y)\big)\right) = f(x)+f(f(y))$.

Exercice CG 4. 3 Un ensemble de nombres
On considère l'ensemble A des nombres réels x pour lesquels existent des entiers relatifs a et b tels que

$$x = a + b\sqrt{2}.$$

a. Montrer que cette écriture est unique (si $x \in A$ et si $x = a + b\sqrt{2}$ et $x = \alpha + \beta\sqrt{2}$ où a, b, α et β sont des entiers relatifs, alors $a = \alpha$ et $b = \beta$).
b. Montrer que le produit de deux éléments de A est un élément de A.
c. On appelle *conjugué* de $x = a + b\sqrt{2}$ le nombre $\bar{x} = a - b\sqrt{2}$ et *norme* de x le nombre $N(x) = a^2 - 2b^2$.
Montrer que la norme du produit de deux éléments de A est le produit de leurs normes.
d. À quelle condition sur $N(x)$ le nombre x possède-t-il un inverse dans A ?

Exercice CG4. 3 *bis* Une équation de Pell-Fermat
a. On appelle $\mathcal{H}$ l'ensemble des couples (x,y) de réels vérifiant $|x^2 - 2y^2| = 1$.
$\mathcal{H}$ est la réunion de deux sous-ensembles, $\mathcal{H}^+$, ensemble des couples pour lesquels $x^2 - 2y^2 = 1$, et $\mathcal{H}^-$, ensemble des couples pour lesquels $x^2 - 2y^2 = -1$. Représenter $\mathcal{H}^+$et $\mathcal{H}^-$ sur un même graphique.
b. À tout entier n on associe les entiers $a_n$et b_n pour lesquels $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Prouver que pour tout n le couple (a_n, b_n) appartient à $\mathcal{H}$.
c. On considère l'application $\varphi\colon \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+2y, x+y) \end{pmatrix}$. Montrer que φ est bijective, expliciter son inverse.
d. Montrer que $(a_{n+1}, b_{n+1}) = \varphi(a_n, b_n)$
e. Démontrer finalement que les couples d'entiers naturels (a,b) solutions de l'équation $|a^2 - 2b^2| = 1$ sont les couples (a_n, b_n).

Exercice CG 4. 4 Une minoration
On considère la fonction $f = \begin{pmatrix} R^{+*} \to R^{+*} \\ x \mapsto x^x \end{pmatrix}$
1. Déterminer le minimum de la fonction f.
2. Pour tout couple de réels strictement positifs (x,y), montrer que $x^y + y^x > 1$.

Exercice CG 4. 5 De la vie sur Mars !
La dernière sonde, envoyée sur Mars par l'Union Européenne, a réussi à observer ce que l'on attendait depuis longtemps : des traces de vie sur la Planète Rouge ! Il s'agit évidemment d'une forme primitive et les êtres observés ne mesurent pas plus d'un millième de millimètre, ce qui explique la difficulté que la sonde a eue à remarquer ce que nous appellerons des cellules.
Avec des informations aussi partielles, les scientifiques ont toutefois pu observer les faits suivants :
- Il y a trois espèces de cellules, que l'on désignera par A, B et C.
- La reproduction des cellules implique la participation de trois cellules « parents ».
- Il ne peut y avoir reproduction que lorsque les trois parents sont « compatibles », c'est-à-dire qu'au moins deux sont de la même espèce.

On a observé des proportions respectives a, b et c de cellules des différentes espèces, $a+b+c=1$.
1. ***a.*** Quelle est la probabilité p que trois cellules prises au hasard soient compatibles ?
b. Montrer que $p \geq \frac{7}{9}$. On pourra établir une inégalité à c fixé.

Les scientifiques ont établi que lorsque les trois espèces de parents sont les mêmes, la descendance est de la même espèce que ses parents. En revanche, lorsque deux parents sont d'une espèce α et que le trosième, parent est d'une espèce β, les scientifiques hésitent entre deux modèles :
- Modèle 1 : le descendant est du type de l'espèce majoritaire α,
- Modèle 2 : le descendant est du type de l'espèce minoritaire β.
Pour comparer ces modèles, on va estimer l'évolution des proportions de cellules des différentes espèces au cours du temps. On note $a_0 > b_0 > c_0$ les proportions des différentes espèces de la génération 0 et, pour tout entier naturel n, a_n, b_n, c_n les proportions des différentes espèces de la génération n. Pour déterminer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$, on prend trois cellules au hasard suivant les proportions a_n, b_n, c_n et a_{n+1} sera la probabilité que la descendance soit de type A, sachant que les trois parents sont compatibles. Il en est de même pour b_{n+1} et c_{n+1}.
2. Étude du premier scénario. On suppose dans cette question que la génétique des cellules martiennes suit le premier modèle.
a. Vérifier que $a_{n+1} = \frac{a_n^2(3-2a_n)}{1-6a_nb_nc_n}$, $\quad b_{n+1} = \frac{b_n^2(3-2b_n)}{1-6a_nb_nc_n}$ et $c_{n+1} = \frac{c_n^2(3-2c_n)}{1-6a_nb_nc_n}$.
b. On rappelle dans cette question et les suivantes que $a_0 > b_0 > c_0$. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $a_n > b_n > c_n$. En déduire que $a_n > \frac{1}{3}$, $b_n < \frac{1}{2}$ et $c_n < \frac{1}{3}$.
c. Vérifier que les suites $(a_n - b_n)_{n\geq 0}$ et $(a_n - c_n)_{n\geq 0}$ sont croissantes.
d. Prouver que les suites $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ convergent et déterminer leurs limites.

3. Étude du second scénario. On suppose maintenant que c'est le deuxième modèle qui est privilégié.
a. Déterminer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n.
b. On suppose à partir de maintenant que $1 > a_0 > b_0 > c_0 > 0$.
Montrer que pour tout n, on a $1 > a_n > b_n > c_n > 0$.
c. On pose $f(c) = \frac{3}{2} - 3c + \frac{5}{2}c^2$ et $g(c) = 1 - 6c^2 + 12c^3$. Vérifier que $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq \frac{f(c_n)}{g(c_n)}$.
d. Déterminer les limites des suites $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$.
e. Quel scénario vous semble le plus pertinent ?

Exercice CG 4. 6 Comme à la fête foraine
On donne dans le plan un disque D de rayon 1.
1. Avec deux disques identiques de rayon r avec $r < 1$, est-il possible de recouvrir le disque D ?
2. Quelle est la plus petite valeur du rayon r de trois disques identiques permettant le recouvrement de D ?

Exercice CG 4 . 7 (mathématiques expertes) La racine du carré

On considère l'ensemble $U_m = \left\{\exp\left(\frac{\mathrm{i}2k\pi}{m}\right), 0 \leq k \leq m-1\right\}$.

1. Montrer que U_m est l'ensembles des racines n-ièmes de 1, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $z^m = 1$.

On se donne un entier naturel non nul n et on cherche s'il existe une fonction $f : U_{2n} \to U_{2n}$ vérifiant :

$$\text{pour tout } z \in U_{2n}\,, f\big(f(z)\big) = z^2$$

2. Montrer que l'ensemble $\{z^2 \,/ z \in U_{2n}\}$ est égal à U_n et qu'il est inclus dans U_{2n}.

3. On suppose qu'il existe une fonction f solution du problème posé.

a. Vérifier que pour tout $z \in U_{2n}$, $f(z^2) = \big(f(z)\big)^2$.

b. Montrer que $f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'$ ou $z = -z'$ et que $f(1) = f(-1) = 1$

4. Selon la valeur de n, existe-t-il un élément z de U_{2n} qui vérifie $z^2 = -1$? Si oui, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction f solution.

5. Selon la valeur de n, existe-t-il un élément z de U_{2n} qui vérifie $z^3 = 1$ et $z \neq 1$? Si oui, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction f solution.

6. On suppose dans toute la suite de l'énoncé que l'entier n est impair.

a. Vérifier que la fonction g de U_n dans lui-même qui à z appartenant à U_n associe z^2 est bijective (c'est-à-dire tout élément de U_n a un unique antécédent par g dans U_n).

b. On suppose qu'il existe une solution f du problème. Vérifier qu'il existe une fonction $\varphi : U_n \to U_n$ telle que $\varphi \circ \varphi = g$.

c. Réciproquement, on suppose qu'il existe une fonction $\varphi : U_n \to U_n$ telle que $\varphi \circ \varphi = g$. Construire alors une solution au problème.