



**ACADÉMIE
DE VERSAILLES**

Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Stage « en ligne » de novembre et décembre 2020

Fiche numéro 4

Les propositions de solution de chaque exercice doivent être renvoyées d'ici le lundi 11 janvier à l'adresse euler.pepiniere@ac-versailles.fr, sous forme numérique (format .pdf ou image), en pièce jointe ou avec un système de transfert, par les professeurs selon les modalités précisées dans le courrier envoyé dans les lycées (envoi des propositions d'au plus deux équipes).

Exercice 4. 1 Une fraction irréductible

Les entiers strictement positifs a et b n'ont aucun diviseur commun supérieur à 1.

Sachant que a et b ont une différence de 15 et que $\frac{5}{9} < \frac{a}{b} < \frac{4}{7}$, quelle est la valeur de $\frac{a}{b}$?

Exercice 4. 2 Cours moyen

Eva s'amuse à écrire sur son tableau la suite des entiers naturels à partir de 1 et jusqu'à un certain nombre n .

Elle en a oublié un...

La moyenne des nombres écrits est 40,75.

Quel est le nombre oublié ?

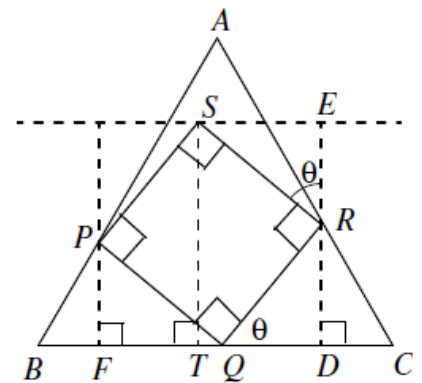
Exercice 4. 3 Sac à chapeaux

Dans un sac, il y a des chapeaux bleus et des chapeaux verts. À chaque tour, Julie enlève un chapeau du sac, sans regarder, chaque chapeau du sac ayant la même chance d'être choisi. Si le chapeau choisi est vert, elle prend un chapeau bleu de sa réserve de chapeaux et l'ajoute au sac. Si le chapeau choisi est bleu, elle prend un chapeau vert de sa réserve et l'ajoute au sac. Au départ, le sac contient 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts.

Quelle est la probabilité qu'après deux tours, le sac contienne de nouveau 4 chapeaux bleus et 2 chapeaux verts ?

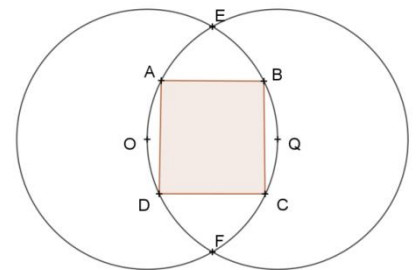
Exercice 3. 4 Un carré dans un triangle

Soit ABC un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur 2. On construit un carré $PQRS$ tel que les points P, Q appartiennent respectivement aux segments $[AB]$ et $[BC]$ et les points R et S appartiennent tous les deux au segment $[AC]$. On suppose qu'en faisant bouger les points P, Q, R et S de manière que P, Q et R demeurent sur les côtés du triangle, tandis que le point S se déplace du segment $[AC]$ au segment $[AB]$ en passant par l'intérieur du triangle. Si les points P, Q, R et S forment continuellement les sommets d'un carré, démontrer que le chemin tracé par le point S est un segment de droite parallèle au côté $[BC]$.



Exercice 4. 5 Un carré entre deux cercles

Les cercles de centres O et Q , de rayon 1, passent l'un par le centre de l'autre. Le carré $ABCD$ a deux côtés parallèles à la ligne des centres, deux sommets sur un des cercles, deux sommets sur l'autre. Quel est le côté de ce carré ?



Problème 4. 6 Extra-terrestres

La planète Valse est peuplée d'habitants, les Quarts, qui ont un mode de déplacement particulier sur un sol que l'on assimile à un plan : un Quart ne se déplace qu'en faisant une succession de quarts de cercles complets de longueur 1m, deux quarts de cercles successifs ne pouvant pas avoir le même centre (le Quart ne fait pas de demi-cercle). Lorsqu'il parcourt un quart de cercle on dira que le Quart fait un « pas ».

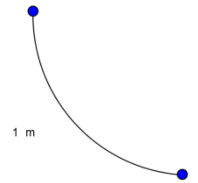
1. Un Quart souhaite se déplacer d'un point A à un point B.

a. Vérifier que, s'il n'a fait qu'un pas pour aller de A à B, la distance AB est d'environ 90 cm.

b. Un Quart part d'un point A. Quel est l'ensemble des points du plan qu'il peut atteindre en un seul pas ?

c. Deux points A et B étant distants de 0,5 m, un Quart veut aller de A à B en une succession de pas. Décrivez et dessinez un itinéraire en deux pas puis un itinéraire en trois pas.

d. Un Quart part d'un point A. Quel est l'ensemble des points qu'il peut atteindre en deux pas ?



2. Un Quart veut aller d'un point A à un point B distant de 2017 m.

a. Quel est le nombre de pas minimum qu'il faudra effectuer pour aller de A à B.

b. La planète Valse est peuplée de 1 000 milliards de milliards de Quarts. Est-il possible que chaque Quart puisse emprunter un chemin différent pour aller de A à B ?

3. Un Quart se promène sur un chemin rectiligne de largeur d , égale à 0,90 m, sans en sortir et en faisant en sorte que les extrémités de ses pas restent sur l'axe central (D) du chemin. Mais ce chemin est coupé par un énorme arbre tombé perpendiculairement à cet axe et ne laissant qu'un petit passage sur un des bords du chemin qui l'oblige à changer sa trajectoire. Cette situation est modélisée sur la figure suivante, où l'arbre est représenté par le segment [EF] et le passage étant considéré comme étant le point E et où A est la dernière position du Quart sur l'axe (D) avant de franchir l'obstacle. Le Quart projette ainsi une trajectoire représentée par l'arc de cercle d'extrémités A et B passant par E.

a. Démontrer que le centre O de l'arc de cercle décrit par le Quart doit se situer sur la droite (EF).

b. Déterminer à quelle distance AH du segment [EF] doit se trouver le point A si le Quart veut pouvoir franchir l'obstacle de cette façon.

c. Le Quart réussit à franchir l'obstacle et, parti de A, revient ainsi en deux pas sur l'axe (D) du chemin en un point A'. Déterminer la distance A'H.

