Pépinière académique de mathématiques : stage en ligne de novembre et décembre 2020 : fiche numéro 3.

Exercice 3.1 Pour réviser sa table des nombres premiers :

Soit $f(x)$ le nombre de nombres premiers p qui vérifient $x \leq p \leq x+10$.

Cherchons $f(f(2021))$?

- Chercher $f(2021)$ consiste à trouver le nombre de nombres premiers entre 2021 et 2031.

2022, 2024, 2026, 2028 et 2030 sont des nombres pairs donc ils ne sont pas premiers.

2025 est divisible par 5 donc il n'est pas premier.

2031 est divisible par 3 car la somme de ses chiffres est divisible par 3 donc il n'est pas premier.

$2021 = 43 \times 47$ donc il n'est pas premier.

$2023 = 7 \times 289$ donc il n'est pas premier.

Les seuls nombres premiers entre 2021 et 2031 sont 2027 et 2029.

Donc $f(2021) = 2$

Cherchons $f(2)$, c'est à dire le nombre de nombres premiers entre 2 et 12. Ce sont 2, 3, 5, 7 et 11.

Donc $f(2) = 5$ et donc $\boxed{f(f(2021)) = 5}$

Exercice 3.2 Tournoi entre amis

Dave a une probalité p de gagner contre Alain, Bianca et Chen.

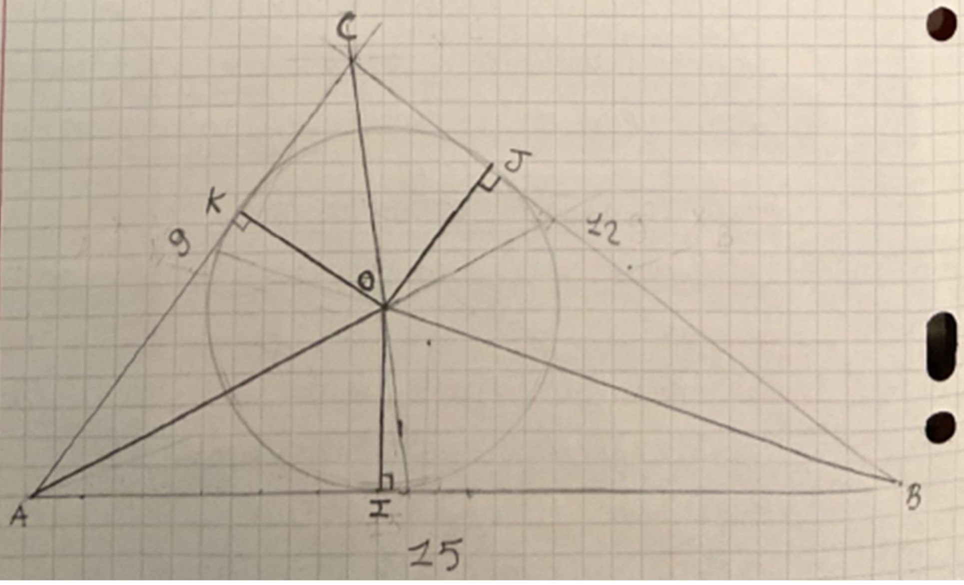
Au premier tour Dave a une probabilité p de gagner contre chacun des 3 adversaires.

En finale, il a aussi une probabilité p de gagner contre chacun des 3 adversaires.

Les deux évènements étant indépendants, Dave a une probabilité de $(p \times p)$ de gagner le tournoi, soit p^2.
On cherche la probabilité pour Bianca de gagner le tournoi sachant que Alain, Chen et Bianca ont le même niveau, soit une probabilité de $\frac{1}{2}$ quand ils se rencontrent.
Donc Alain, Bianca et Chen ont la même probabilité de gagner le tournoi. C'est à dire, $\frac{1}{3}$ de la probabilité qu'il reste en prenant en compte la probabilité de gain, P_{Dave}, de Dave.
Comme $P_{Dave} = p^2$,

$$\boxed{P_{Bianca} = \frac{1}{3}(1-p^2)}$$

Exercice 3.3 En suspension.
Soit ABC un triangle dont les côtés sont de longueur 9, 12 et 15 représentant les 3 tiges dans un plan horizontal. On place la sphère de rayon 5 de façon à ce qu'elle soit tangente à chacun des côtés.



Dans le plan horizontal du triangle ABC, la sphère forme donc un cercle inscrit dans le triangle, tangent à chacun des 3 côtés du triangle. On sait que O, centre du cercle inscrit est le point d'intersection des 3 bissectrices du triangle. Le cercle est tangent en I, J et K. Donc $(OI) \perp (AB)$, $(OJ) \perp (BC)$, $(OK) \perp (AC)$.

Soit r le rayon du cercle. Calculons surfa des 3 triangles ABO, BCO, ACO, sachant que les hauteurs sont égales à r.

$$\mathcal{A}_{ABO} = \frac{AB \times r}{2} = \frac{15r}{2}$$

$$\mathcal{A}_{BCO} = \frac{BC \times r}{2} = \frac{12r}{2} = 6r$$

$$\mathcal{A}_{ACO} = \frac{AC \times r}{2} = \frac{9r}{2}$$

Comme $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABO} + \mathcal{A}_{BCO} + \mathcal{A}_{ACO}$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{15+12+9}{2} = 18r$$

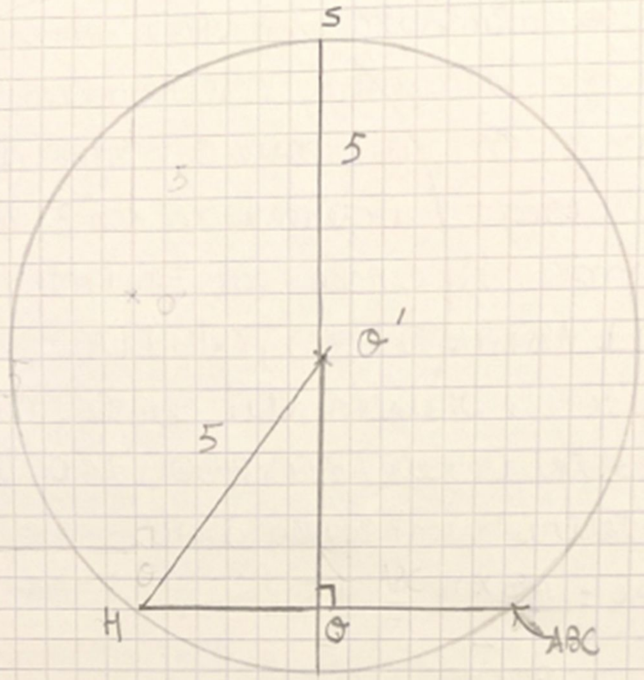
donc $r = \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{18}$

Comme ABC est rectangle en C, $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AC \times BC}{2}$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{9 \times 12}{2} = 54$$

donc $r = \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{18} = \frac{54}{18} = 3$

· Plaçons nous dans le plan vertical par rapport au plan horizontal du triangle ABC



Pour calculer à quelle hauteur du haut de la sphère se trouve le plan du triangle, il faut calculer la distance OO'. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOO' rectangle en O.

$O'O^2 + r^2 = 5^2$

$O'O^2 = 25 - 9 = 16$

$O'O = 4$

Donc $OS = OO' + O'S = 4 + 5 = 9$.

Le plan du triangle se trouve à 9 du sommet de la sphère.

Exercice 3.4 Solutions pour une solution.

$\sqrt{x-127} + \sqrt{K-x} = 13$

Pour que l'équation soit définie il faut que : $x - 127 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 127$

et $K - x \geqslant 0 \Leftrightarrow K \geqslant x$

Comme $\sqrt{x-127} \geq 0$ et $\sqrt{K-x} \geq 0$,
On doit aussi avoir : $\sqrt{x-127} \leq 13$

$\Longleftrightarrow x-127 \leq 169$

$\Longleftrightarrow x \leq 296$

Donc $x \in [127, 296]$ et $K \geq x$ avec K entier naturel.

$\sqrt{x-127} + \sqrt{K-x} = 13$

$\Longleftrightarrow \sqrt{K-x} = 13 - \sqrt{x-127}$

$\Longleftrightarrow K-x = 169 - 26\sqrt{x-127} + x - 127$

$\Longleftrightarrow K = 2x + 42 - 26\sqrt{x-127}$

Cherchons pour quelle valeur de x, K est minimum sachant que K est un entier.

Soit $f(x) = 2x + 42 - 26\sqrt{x-127}$

Étudions les variations de $f(x)$ sur l'intervalle $[127, 296]$

$f'(x) = 2 - \dfrac{26}{2\sqrt{x-127}} = 2 - \dfrac{13}{\sqrt{x-127}}$

Etudions le signe de $2 - \dfrac{13}{\sqrt{x-127}}$ avec $x \neq 127$

$2 - \dfrac{13}{\sqrt{x-127}} = \dfrac{2\sqrt{x-127} - 13}{\sqrt{x-127}}$

On cherche donc la valeur qui annule le numérateur car c'est lui qui détermine le signe sachant que le dénominateur est positif. On a donc :

$2\sqrt{x-127} - 13 = 0$

$\sqrt{x-127} = \dfrac{13}{2}$

$x = \dfrac{169}{4} + 127 = \dfrac{677}{4}$

On en déduit le tableau de variation de $f(x)$.

x	127		$\frac{677}{4}$		296
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(\frac{677}{4}\right)$	$\nearrow$	

Le minimum de la fonction est atteint pour $x = \frac{677}{4}$, $f\left(\frac{677}{4}\right) \simeq 211,5$

On cherche K entier le plus petit possible, donc $\boxed{K = 212}$

Cherchons les valeurs de x pour $K = 212$.

$\sqrt{x-127} + \sqrt{212-x} = 13$

$\cancel{x} - 127 + 212 - \cancel{x} + 2\sqrt{x-127}\sqrt{212-x} = 169$

$\sqrt{x-127}\sqrt{212-x} = 42$

$\Leftrightarrow (x-127)(212-x) = 1764$

$\Leftrightarrow -x^2 + 127x + 212x - 127 \times 212 = 1764$

$\Leftrightarrow -x^2 + 339x - 28688 = 0$

$\Delta = 169 = 13^2$

$x_1 = \frac{-339+13}{-2} \boxed{= 163}$

$x_2 = \frac{-339-13}{-2} \boxed{= 176}$

Les solutions correspondant à cette valeur sont 163 et 176.

<u>Exercice 3.5 Suite d'entiers</u>

Soit $x_{n+1} = (x_n)^2 + 1$ avec x_0 entier positif ou nul et n entier.

1. Soit x_0 entier de départ

$x_1 = x_0^2 + 1$

$x_2 = (x_1)^2 + 1 = (x_0^2+1)^2 + 1 = x_0^2 + 2x_0 + 2$

$x_2 - x_0 = x_0^2 + x_0 + 2$

Si x_0 est pair, alors x_0^2 est paire et $(x_0^2 + x_0)$ est pair, donc $x_2 - x_0$ est pair.

Si x_0 impair, x_0^2 est impaire et donc $(x_0^2 + x_0)$ est la somme de deux nombres impairs et est donc pair. Donc $x_2 - x_0$ est pair.

Donc $\forall x_0$ $x_2 - x_0$ est pair.

2, Cherchons pour quel x_0, $x_6 - x_0$ est un multiple de 10.

Il suffit de montrer que $x_6 - x_0$ se termine par 0 et donc que x_6 et x_0 se terminent par le même chiffre.

Si x_0 se finit par 0, $x_1 = x_0^2 + 1$ se finit par 1, $x_2 = x_1^2 + 1$ se finit par 2, $x_3 = (x_2)^2 + 1$ se finit par $2 \times 2 + 1 = 5$, $x_4 = (x_3)^2$ se finit par $(5 \times 5)^2 + 1 = 26$ donc par 6, $x_5 = (x_4)^2 + 1$ donne $(6 \times 6) + 1 = 37$, se se finit par 7 et $x_6 = (x_5)^2 + 1$ donne $(7 \times 7) + 1 = 50$ et se finit par 0.

Donc $x_6 - x_0$ se finit par 0. Le cycle du chiffre des 0, 1, 2, 5, 6, 7, 0 va se continuer.

Si x_0 se finit par 1, on va retomber sur le même cycle 1, 2, 5, 6, 7, 0, 1. Donc x_6 finit par 1 donc $x_6 - x_0$ se finit par 0.

Il en est de même pour x_6, se finissant par 2, 5, 6 et 7.

Cependant, si x_0 se finissant par 3 est égal à 3, $x_1 = x_0^2 + 1$ va se finir par $3 \times 3 + 1 = 10$ donc par 0 et on retrouve le cycle 0, 1, 2, 5, 6. Donc x_6 ne se terminera pas par 3 donc $x_6 - x_0$ non multiple de 10.

Pour x_0 se terminant par 4, $x_1 = x_0^2 + 1$ se terminera par $4 \times 4 + 1 = 17$ et on retrouve le cycle donc x_6 ne se terminera pas par 4.

De même pour x_0 se finissant par 8, $8^2 + 1 = 65$ donc se termine 5. De même pour x_0 se finissant par 9, $9 \times 9 + 1 = 82$, donc se terminera par 2.

Au final, $x_6 - x_0$ est un multiple de 10 pour tout x_0 nombre entier se finissant par 0, 1, 2, 5, 6, 7.

Problème 3.6 Passage de canards

Soit $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ x et y entiers naturels

1.a. $f(3x+4y, 2x+3y) = (3x+4y)^2 - 2(2x+3y)^2$

$$= 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 8x^2 - 18y^2 - 24xy$$

$$= x^2 - 2y^2$$

1.b. $f(x,y) f(u,v) = (x^2 - 2y^2)(u^2 - 2v^2)$

$$= x^2u^2 - 2y^2u^2 - 2x^2v^2 + 4y^2v^2$$

$f(xu + 2yv, xv + yu) = (xu + 2yv)^2 - 2(xv + yu)^2$

$$= x^2u^2 + 4xyuv + 4y^2v^2 - 2x^2v^2 - 2y^2u^2 - 4xvyu$$

2.a. $f(45, 2) = 45^2 - 2 \times 2^2 = 2025 - 8 = 2017$

donc $(45, 2)$ solution de $f(x,y) = 2017$

D'après 1.a., $f(x,y) = f(3x+4y, 2x+3y)$,

donc $f(45, 2) = f(3 \times 45 + 4 \times 2, 2 \times 45 + 3 \times 2) = 2017$

$$= f(143, 96) = 2017$$

$(143, 96)$ est solution de $f(x,y) = 2012$

De même avec le 1.a, $f(143 \times 3 + 4 \times 96, 2 \times 143 + 3 \times 96) = 2017$

$f(813, 574) = 2012$

$(813, 574)$ est solution de $f(x,y) = 2017$

2.b. D'après le 2.a. $f(42,2) = 2017$

. D'après le 1.b. $f(x,y)f(u,v) = f(xu+2yv, xv+yu)$

Prenons $u = 2$ et $v = 1$ $f(2,1) = 4-2 = 2$

donc $f(45,2) \times f(2,1) = 2 \times 2017 = f(45\times2+2\times2, 45\times1+2\times2)$

donc $4034 = f(94, 49)$

donc $(94, 49)$ solution de $f(x,y) = 4034$.

- si on prend $u = 1$ et $v = 1$ $f(1,1) = -1$

donc $-2017 = f(45,2) \times f(1,1) = f(45\times1+4, 45+2)$

$-2017 = f(49,47)$

donc $(49,47)$ solution de $f(x,y) = -2017$

3. a. Si (a,b) est solution de $f(a,b) = 3$

$3 = a^2 - 2b^2$

Comme $2b^2$ est pair, a^2 doit être impair pour que $a^2 - 2b^2$ soit un nombre impaire. Donc a est impair.

3. b.

soit $a = 2a^2+1$

$3 = (2a'+1)^2 = 4a'^2 + 4a' + 1 - 2b^2$

$= 2(2a'^2 + 2a' - b) + 1$

$2 = (2a'^2 + 2a - b)^2$

$2a' + 2a - b = 1$

Or, $2a' + 2a$ est pair b impair

3. c. On cherche a et b tels que $f(a,b) = 3$

D'après 3.b, $a = 2a'+1$ car a est impair.

D'après le 3.b on a montré que b est impair

donc $b = 2b'+1$

$f(a,b) = 3$

$\Longleftrightarrow a^2 - 2b^2 = 3$

$\Longleftrightarrow (2a'+1)^2 - 2(2b'+1)^2 = 3$

$\Longleftrightarrow 4a'^2 + 4a' + 1 - 8b'^2 - 8b - 2 = 3$

$\Longleftrightarrow 4(a'^2 + a' - 2b'^2 - 2b) = 4$

$\Longleftrightarrow a'^2 + a' - 2b' - 2b = 1$

On sait que $-2b'$ est impair. Il faut donc que $a'^2 + a'$ soit impair pour vérifier l'égalité à 1. Or, si a est pair $a'^2 + a'$ est pair. Si a est impair a'^2 est impair et $(a'^2 + a')$ est pair.

Donc l'équation n'a pas de solution

4. a.

On sait que $T_a = 2T_b$

donc $\dfrac{a(a+1)}{2} = \dfrac{2b(b+1)}{2}$

$a(a+1) = 2b(b+1)$

$f(2a+1, 2b+1) = (2a+1)^2 - 2(2b+1)^2$

$= 4a^2 + 4a + 1 - 8b^2 - 8b - 2$

$= 4a(a+1) - 4 \times 2b(b+1) - 1$

$= 4[a(a+1) - 2b[b+1)] - 1$

Comme $a(a+1) = 2b(b+1)$,

alors $f(2a+1, 2b+1) = -1$

b. On sait que n le nombre de canards aperçus par Tartarin est compris entre 100 et 1000.

$T_{13} = 91$

$T_{14} = 105$ et $T_{44} = 990$ et $T_{45} = 1035$

Donc $14 \leq a \leq 35$ On sait que $b < a$

donc $b \leq 35$

Pour chercher a et b on peut faire un algorithme.

Pour a de 14 à 33, et b de 1 à 35
Calculer $f(2a+1, 2b+1)$
si résultat $= -1$
renvoyer (a, b)

On trouve une seule solution $(20, 14)$
donc $a = 20$ et n le nombre de canards est égal à $\frac{20 \times 21}{2} = 210$

5. Soit n le nombre de canards le lendem[ain]
On sait que $1000 \leq n \leq 2000$
Or, $T_{44} = 990$ $T_{45} = 1035$ $T_{62} = 1953$ $T_{63} = 2016$
Donc, soit a le nombre de rangés du triangle initial.
$45 \leq a \leq 62$

- Après le coup de fusil les canards forment un carré... Donc il faut calculer pour $45 \leq a \leq 62$ et trouver les solutions donnant un nombre entier.

On peut faire un algorithme.

Pour a de 45 à 62
Calculer $\sqrt{\frac{a(a+1)}{2}} = S$
Si S entier
renvoyer a

On trouve une seule solution : $a = 49$.
et donc $n = \frac{49 \times 50}{2} = 1225$
Cherchons les effectifs dans chaque triangle à la fin du vol.
Il faut trouver b et c tels que
T_a + T[illegible] − T[illegible] = 1225

On sait que $a = 45$ donc $a \leq 45$

et $b \leq 45$

Faisons un algorithme.

Pour b de 1 à 45 et c de 1 à 45

Calculer $\frac{b(b+1)}{2} + \frac{c(c+1)}{2} = S$

si $S = 1035$

renvoyer (a, b)

- On trouve deux couples de solutions :

$(19, 45)$ et $(34, 35)$

Les effectifs sont respectivement $(190, 1035)$ et $(595, 630)$.