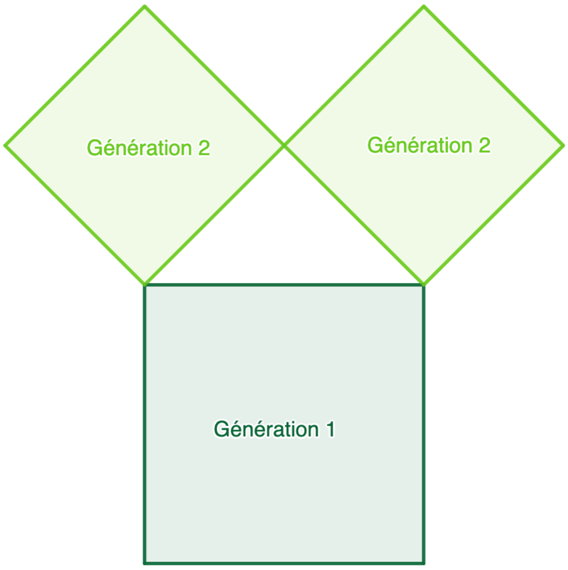
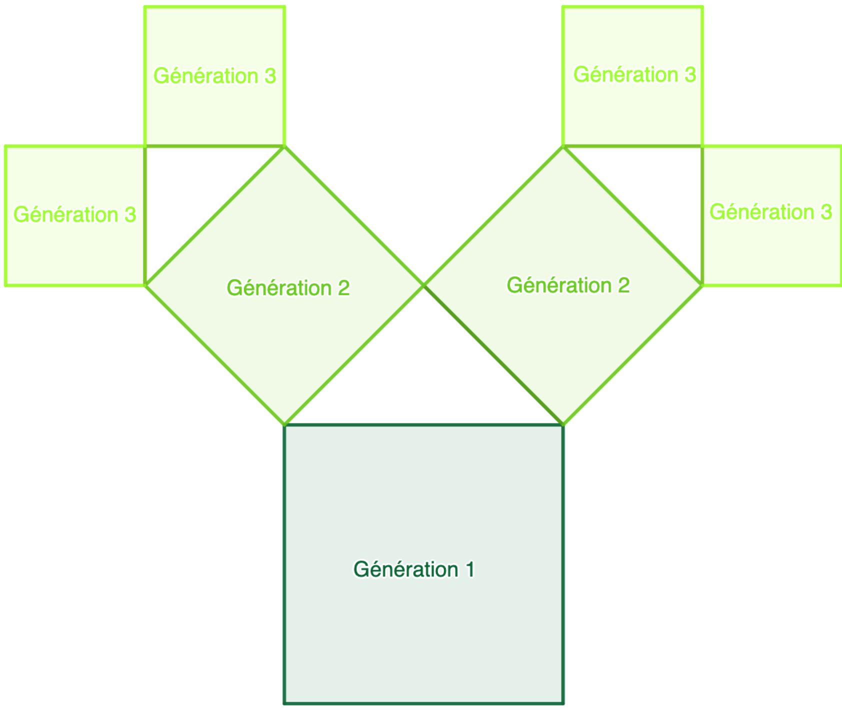
Construction et Vocabulaire

En partant d'un carré on construit notre arbre en formant un triangle rectangle isocèle puis deux carrés comme ci-dessous.



Nous ré-itérerons ce procédé de construction ce qui donnera alors à l'étape suivante :



Vocabulaire :

- Soit un carré de côté L qu'on appellera génération 1.
- Construisons les deux carrés suivants tel qu'expliqué initialement qu'on nommera génération 2.
- A l'étape 2, l'arbre a 2 générations.
- etc...

Après plusieurs étapes cela donnera

Question 1 - dans le plan

Dans la construction de notre premier arbre dans le plan, montrez qu'à chaque étape de la construction, l'aire de l'arbre augmente d'une même quantité égale à l'aire du carré initial.

En déduire que l'arbre à l'étape n a une aire totale de nL^2

Montrons la proposition suivante par récurrence.
$P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'aire totale de tous les carrés de génération n vaut L^2.

⋆ Initialisation : $n = 1$, 1 carré de côté L donc l'aire est L^2.

⋆ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
A partir d'un carré de la génération n, on crée deux carrés de génération $n+1$ ce qui forme un triangle isocèle rectangle.
D'après le théorème de Pythagore on obtient que la somme des deux aires des petits carrés de génération $n+1$ est égale à l'aire du carré de génération n. D'après l'hypothèse de récurrence cette aire vaut L^2.

⋆ Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Ainsi à l'étape n il y a n générations d'aire totale : L^2. Donc l'aire totale de l'arbre (toute génération confondue) est $n \times L^2$

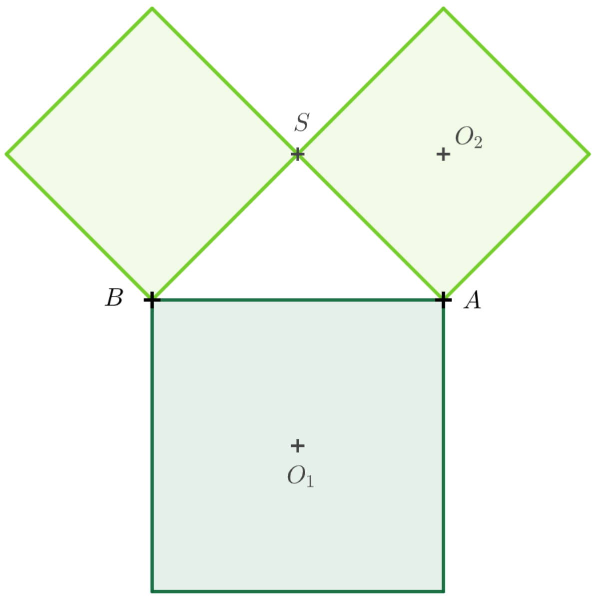
Remarque : Le fait de créer des triangles isocèles n'intervient pas dans le raisonnement, la conclusion reste donc la même dans le cas où les triangles ne seraient pas isocèles ce qui donnerait un arbre dissymétrique.

Question 2 - dans le plan

Montrons qu'on a beau continuer la construction autant de fois qu'on veut, l'arbre obtenu restera à l'intérieur d'un même disque dont on estimera le rayon.

Soit un carré de côté L, prenons pour cela le carré de génération 1, notons :

- O_1 le centre du carré de génération 1
- O_2 le centre du carré de génération 2
- O_n le centre du carré de génération n
- S le sommet du triangle isocèle rectangle
- A le point qui est à la fois sur le carré de génération 1 et sur le carré de génération 2
- B l'autre point qui est à la fois sur le carré de génération 1 et sur le carré de génération 2



La diagonale d'un losange est la bissectrice de l'angle dont elle est issue ainsi dans le carré de génération 1 on aura $\widehat{BAO_1} = 45°$.
De plus SAB est isocèle rectangle en S donc par la propriété des angles on trouve que $\widehat{SAB} = 45°$.
Ainsi $\widehat{SAO_1} = 90°$ par conséquent SAO_1 est rectangle en A.

La diagonale du carré de génération 1 est de longueur $\sqrt{2}L$ or O_1 centre du carré donc $O_1A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}L$.

Enfin dans le carré de génération 2 son aire est de $\dfrac{L^2}{2}$ voir question précédente, donc son côté vaut

$$SA = \sqrt{\frac{L^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}L$$

Dans le triangle SAO_1 :

- $\widehat{BAO_1} = 45°$ car (O_1A) est la bissectrice de l'angle droit $\widehat{A}$.
- De plus SAB est rectangle isocèle en S donc $\widehat{SAB} = 45°$.
- Ainsi SAO_1 est un triangle rectangle et isocèle en A (en effet $AO_1 = SA$)

En appliquant le théorème de Pythagore dans SAO_1 on trouve

$$\begin{aligned} SO_1^2 &= AO_1^2 + SA^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}L\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}L\right)^2 \\ &= L^2 \end{aligned}$$

Dans le triangle SAO_2 :

- SAO_2 est un triangle rectangle isocèle en O_2 par propriété du carré.
- côté $SA = \dfrac{\sqrt{2}}{2}L$ donc la diagonale est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}L \times \sqrt{2} = L$, O_2 milieu des diagonales donc $SO_2 = \dfrac{L}{2}$

En appliquant le théorème de Pythagore, on trouve :

$$\begin{aligned} O_2O_1^2 &= SO_2^2 + SO_1^2 \\ &= \left(\frac{L}{2}\right)^2 + L^2 \\ &= \frac{5}{4}L^2 \\ O_2O_1 &= \frac{\sqrt{5}}{2}L \end{aligned}$$

On peut généraliser ce raisonnement aux générations suivantes, et poser des suites.

- côté du carré de génération 1 : L
- côté du carré de génération 2 : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}L$

Ainsi pour le côté du carré de génération $n+1$ correspond à $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ fois le côté du carré de génération n.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, (c_n)$ le côté du carré de génération n.
On a donc (c_n) qui est une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $c_1 = L$ ainsi

$$c_n = L \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

- Distance $O_1O_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}L$,

  ce qui revient à multiplier la longueur du côté du carré de génération 1 qui vaut $L = c_1$ par $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, ainsi

$$O_1O_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}c_1$$

- Distance $O_2O_3 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}c_2$,

  ce qui revient à multiplier la longueur du côté du carré de génération 2 qui vaut c_2 par $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, (d_n)$ la distance O_nO_{n+1}, ainsi $d_n = \dfrac{\sqrt{5}}{2}c_n = \dfrac{\sqrt{5}}{2}L \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

Calculons la somme, soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} d_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{5}}{2}L \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{i-1} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}L \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{i-1} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}L \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{k} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}L \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}
\end{aligned}$$

Calculons la limite de S_n, on a $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\sqrt{5}}{2}L \times \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2 - \sqrt{2}}L = \frac{\sqrt{5}\left(2 + \sqrt{2}\right)}{2}L \simeq 3,82L \qquad \text{à } 10^{-2} \text{ près}$$

Toute la construction reste donc à l'intérieur d'un disque de rayon $r = 3,82L$ dépendant du côté du carré de génération 1 : L.

Remarque : S_n correspond à une approximation du rayon du disque contenant les carrés de génération 1 à $n+1$, bien qu'il reste une demi-longueur de côté sur le dernier carré qui ne serait pas dans le disque.
Par passage à la limite ce problème disparait puisque la limite est finie, on a alors une approximation du rayon du disque recherché par excès. Ceci est du au fait que S_n ne correspond pas au rayon mais à une majoration du rayon.

Question 3 - dans le plan

En déduire qu'à partir d'une certaine étape, les carrés de l'arbre finissent par se chevaucher. Pouvez vous préciser cette étape.

A partir du moment où l'aire de l'arbre est plus grande que l'aire du disque dans lequel il est contenu alors il y a chevauchement.
Chaque génération a une aire de L^2 donc l'arbre de génération n a une aire totale de nL^2. Or cet arbre est contenu dans un disque de rayon $r = 3,82L$ donc d'aire πr^2.
On cherche donc l'étape n tel que l'aire de l'arbre est supérieure à l'aire du disque.

$$\begin{aligned}
nL^2 &\geqslant \pi r^2 \\
nL^2 &\geqslant \pi \times (3,82L)^2 \\
n &\geqslant \pi \times 3,82^2
\end{aligned}$$

Or $\pi \times 3,82^2 \simeq 45,84$ donc les carrés se chevaucheront à l'étape 46.

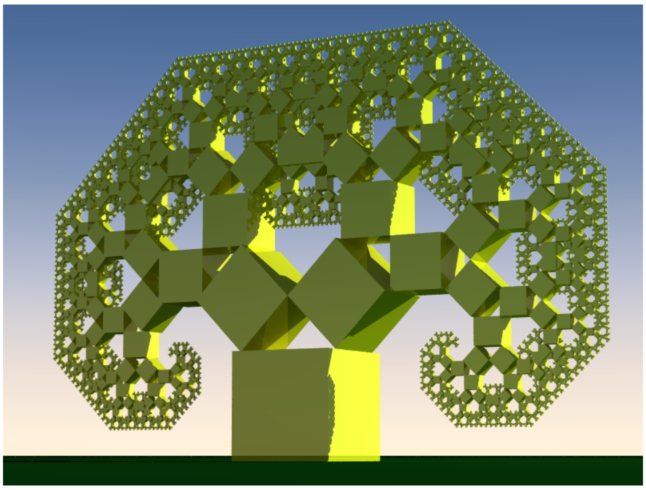
Passons à l'arbre dans l'espace

Pour cela empiler des cubes et non des carrées faisons les tourner de 90° à chaque étape.

Question 4 - dans l'espace

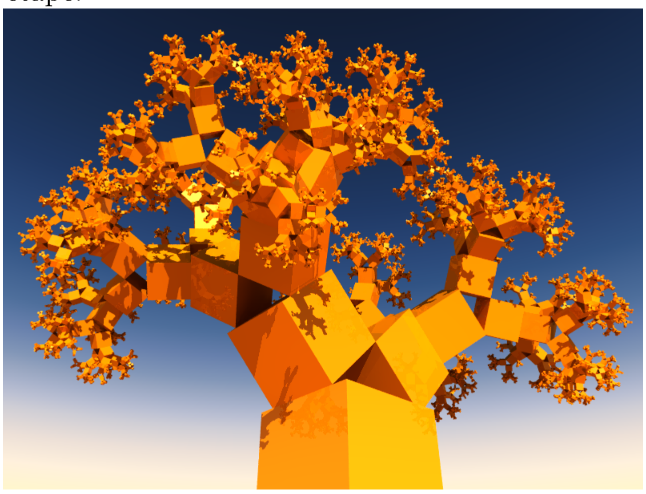
Montrer qu'on a beau continuer la construction autant de fois qu'on le veut, l'arbre restera à l'intérieur d'une boule dont on estimera le rayon

- Empilons des cubes



Dans le plan on calcule les distances $d_n = O_nO_{n+1}$, ce qui reste exactement la mêmes chose comme calcul que pour l'arbre ci-dessus, car les points (O_n) sont coplanaires.

- Pivotons de 90° à chaque étape.



A l'étape $n+1$ le centre du cube de génération n et les deux centres des cubes de générations $n+1$ sont coplanaires ceci est dû à la symétrie de l'arbre. Faire pivoter les cubes ne modifient la distance entre les centres des cubes. Ainsi on peut se ramener aux calculs de distance comme dans le plan $d_n = O_nO_{n+1}$. En pivotant les cubes restent dans la boule de rayon $r \simeq 3,82L$ ainsi l'arbre est contenu dans cette boule.

Question 5 - dans l'espace

Montrer qu'à la $n^{\text{ième}}$ étape de la construction, le volume de l'arbre augmente d'une quantité égale à $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \times L^3$

On note V_n le volume ajouté à l'arbre l'étape n.

A l'étape n, il y a 2^{n-1} cubes de génération n qui ont une côte de $c_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} L$ (voir raisonnement du plan pour la côte (c_n)).

$$\begin{aligned}
V_n &= \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \times L\right)^3 \times 2^{n-1} \\
&= \frac{\sqrt{2}^{3n-3}}{2^{3n-3}} \times L^3 \times 2^{n-1} \\
&= \frac{\sqrt{2}^{3n-3}}{2^{2n-2}} \times L^3 \\
&= \frac{\sqrt{2}^{3n-3}}{\sqrt{2}^{4n-4}} \times L^3 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^{n-1}} \times L^3 \\
&= \frac{\sqrt{2}^{n-1}}{2^{n-1}} \times L^3 \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \times L^3
\end{aligned}$$

Question 6 - dans l'espace

Etudier le volume total de l'arbre à l'étape $n+1$ et regardons quand n tend vers l'infini.

Somme des volumes : $V_1 + V_2 + \cdots + V_{n+1}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} V_i &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{i-1} L^3 \\
&= L^3 \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{i-1} \\
&= L^3 \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{i} \\
&= L^3 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= 2L^3 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{2 - \sqrt{2}} \\
&= L^3 \times \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) (2 + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

On a alors $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n+1} V_i = (2+\sqrt{2})L^3 \simeq 3,4L^3$ or la boule dans lequel est l'arbre est de rayon $\approx 3,82L$ ce qui donne un volume de $\pi r^3 \approx 175,1L^3$.

Ainsi il n'y a pas de contre-argument quand au fait que la boule ne contiendrait pas l'arbre. On ne peut donc pas conclure comme précédemment que les cubes finissant par se chevaucher.
Une conjecture est que d'ailleurs ils ne se chevauchent pas, ce qui est encore à démontrer...