Laboratoire de mathématiques du lycée Bascan, Rambouillet
A rendre le 10 mai 2019

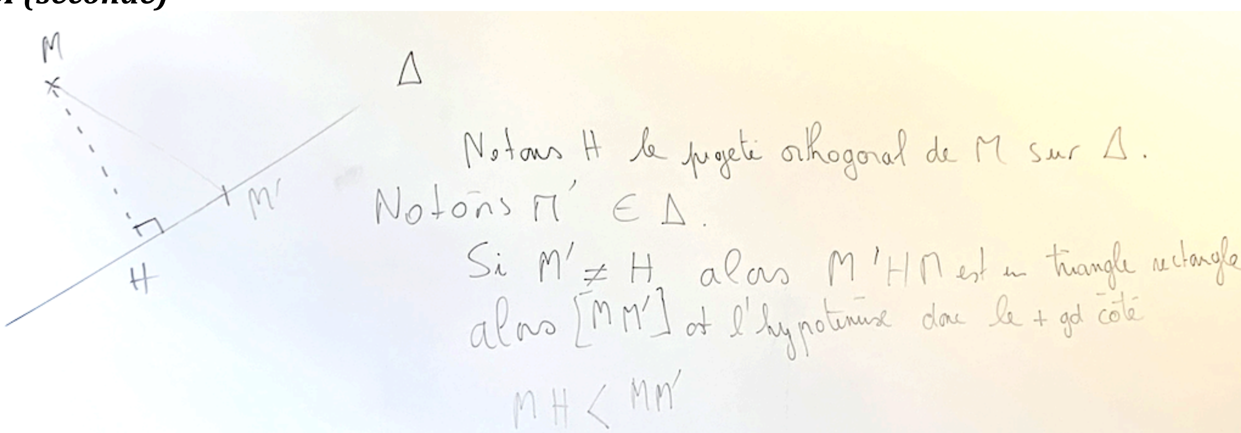
Devoir de vacances

1 Projeté orthogonal

Dans le plan affine euclidien, soient P un point et D une droite. Montrer que le projeté orthogonal de P sur D est le point de D qui est le plus proche de P.

1.1 La preuve de référence

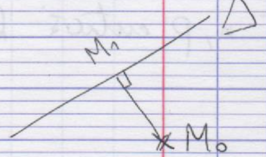
- ***Le projeté orthogonal du point M sur Δ est le point de la droite Δ le plus proche de M (seconde)***



1.2 Autres preuves

1.2.1

Soit Δ une droite, Soit M_0 un pt du plan.
Montrons que le pt de Δ le plus proche de M_0 est son projeté orthogonal sur Δ.



1er cas : $M_0 \notin \Delta$.

On choisit un repère orthonormé de telle sorte que Δ ne soit pas parallèle à l'axe des ordonnées.

Ainsi dans ce repère, $\Delta : y = ax+b$.
$M_0 : (x_0, y_0)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, Soit $M(x, ax+b)$ un pt qcq de Δ.

$$MM_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (ax+b-y_0)^2} = f(x).$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto (x-x_0)^2+(ax+b-y_0)^2$ est dérivable et strictement positive ($M_0 \notin \Delta$) sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{2(x-x_0)+2a(ax+b-y_0)}{2\,f(x)} = \frac{x - x_0 + a^2x + ab - ay_0}{2f(x)}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = \boxed{\frac{-ab+ay_0+x_0}{a^2+1} = x_1}$$

$f'(x)$ a le même signe que $(a^2+1)x - x_0 + ab - ay_0$.

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

car $a^2+1>0$. Ainsi f présente un minimum en x_1.

Notons M_1 le pt de Δ d'abscisse x_1.

Soit y_1 l'ordonnée de M_1.

$$y_1 = ax_1+b = a\left(\frac{-ab+ay_0+x_0}{a^2+1}\right) + b = \frac{\cancel{-a^2b} + a^2y_0 + ax_0 + \cancel{ba^2} + b}{a^2+1}$$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de Δ.

Calculons
$$\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\vec{u} = \left(\frac{-ab+ay_0+x_0}{a^2+1} - x_0\right)\times 1 + \left(\frac{a^2y_0+ax_0+b}{a^2+1} - y_0\right)a$$

$$= \frac{1}{a^2+1}\left(\cancel{-ab} + \cancel{ay_0} + \cancel{x_0} - \cancel{a^2x_0} - \cancel{x_0} + \cancel{a^3y_0} + \cancel{a^2x_0} + \cancel{ab} - \cancel{a^3y_0} - \cancel{ay_0}\right)$$

$\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\vec{u} = 0$ Ainsi M_1 est le projeté orthogonal de M_0 sur Δ

2e cas : $M_0 \in \Delta$. Dans ce cas, le pt de Δ le plus proche de M_0 est M_0, qui est son projeté orthogonal sur Δ.

1.2.2

On choisit un repère orthonormé du plan $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ dans lequel D a pour équation $y = 0$ et P a pour coordonnées $(0, p)$ où $p \in \mathbb{R}$. Si $M(x, 0) \in D$, alors $\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{u} = 0$ et $PM = \sqrt{x^2 + p^2} \geq |p| = PO$. Puisque D est portée par $\overrightarrow{u}$, cela montre que O est le projeté orthogonal de P sur D et que PO minimise la distance de P à un point de D.

2 Irrationnalité

Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2.1 La preuve de référence

Propriété : $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel

Démonstration : *(« Par l'absurde » : On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, et on montre que c'est impossible.)*

Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel.

Par définition des nombres rationnels, $\sqrt{2}$ peut donc s'écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers, qui peut être simplifiée en une fraction irréductible.

Il existe donc deux nombres entiers n et d tels que $\sqrt{2}=\frac{n}{d}$ tels que $\frac{n}{d}$ soit irréductible.

Observons alors $(\sqrt{2})^2$:

Comme $\sqrt{2}=\frac{n}{d}$, on a alors $(\sqrt{2})^2=\left(\frac{n}{d}\right)^2=\frac{n^2}{d^2}$

Mais, par la définition de la racine carrée, $(\sqrt{2})^2=2$.

Ainsi, on a $\frac{n^2}{d^2}=2$, c'est à dire $n^2=2\times d^2$.

Comme n^2 et $2\times d^2$ sont égaux, ils ont le même chiffre des unités. Regardons alors les possibilités :

Lorsque l'unité de n est	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Alors l'unité de n^2 est	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Lorsque l'unité de d est	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Alors l'unité de d^2 est	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
Donc l'unité de $2\times d^2$ est	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

En comparant les tableaux, on remarque que les seules possibilités pour que n^2 et $2\times d^2$ aient le même chiffre des unités sont que n finisse par un 0 et que d finisse par un 0 ou un 5.

Mais dans ce cas, n et d sont tous les deux dans la table de 5, donc la fraction $\frac{n}{d}$ n'est pas irréductible, ce qui contredit notre hypothèse de départ. Il n'est donc pas possible d'écrire $\sqrt{2}$ comme fraction irréductible de deux nombres entiers.

Conclusion : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. Il est donc irrationnel.

2.2 Autres preuves

2.2.1

Montrons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Raisonnons par l'absurde : Supposons qu'il existe p et q entiers naturels non nuls tq $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. (*)

Si $\mathrm{pgcd}(p,q) = d \neq 1$, $\exists\, p', q' \in \mathbb{N}^*$, $p = dp'$ et $q = dq'$.

$d = \mathrm{pgcd}(p,q) = \mathrm{pgcd}(dp', dq') = d\,\mathrm{pgcd}(p', q')$

d'où $\mathrm{pgcd}(p', q') = 1$ et $\sqrt{2} = \frac{dp'}{dq'} = \frac{p'}{q'}$.

On peut donc imposer $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$

(*) donne $2q^2 = p^2$ ainsi 2 divise p^2

or $\forall p \in \mathbb{Z}$, p impair $\Rightarrow p^2$ impair

Par contraposée p^2 pair $\Rightarrow p$ pair

On en déduit : $\exists\, p_1 \in \mathbb{N}$, $p = 2p_1$

$2q^2 = p^2$ donne alors : $2q^2 = 4p_1^2$ d'où $q^2 = 2p_1^2$

Ainsi q^2 est pair, d'où q est pair

$\exists\, q_1 \in \mathbb{N}$, $q = 2q_1$ Contradiction avec $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$

Conclusion : $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$

2.2.2

$\boxed{\text{Propriété} \quad \sqrt{2} \text{ est irrationnel.}}$

Démonstration : Par définition, $\sqrt{2}$ est le nombre positif dont le carré est 2.
Nous allons montrer que X^2-2 n'a pas de racine rationnelle.

Lemme : Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$.
Alors toute racine rationnelle de $P(X)$ écrite sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $\begin{cases}(p,q)\in\mathbb{Z}^2\\ p\wedge q = 1\end{cases}$ vérifie $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.

Démonstration du Lemme :

Soit $\frac{p}{q}$ une racine de $P(X)$ telle que $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ et $p\wedge q = 1$.

- Comme $\frac{p}{q}$ est racine de $P(X)$, $P(X)$ se factorise par $(X-\frac{p}{q})$ (Car $\mathbb{Z}[X]$ factoriel ?)

  c'est à dire $P(X) = (X-\frac{p}{q})\, Q(X)$ pour un certain polynôme $Q(X) \in \mathbb{Z}[X]$

  Ainsi $P(0) = a_0 = \left(-\frac{p}{q}\right) Q(0)$
  c'est à dire $-q a_0 = p\, Q(0)$ d'où $p \mid q \cdot a_0$
  or $p\wedge q = 1$ donc $\boxed{p \mid a_0}$

- De plus, comme $\frac{p}{q}$ est racine de $P(X)$, $P(\frac{p}{q}) = 0$

  c'est à dire $\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{p^i}{q^i} = 0$ d'où $a_n \frac{p^n}{q^n} = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{p^i}{q^i}$

  et ainsi $a_n p^n = -\sum_{i=0}^{n-1} p^i q^{n-i}$

  c'est à dire $a_n p^n = -q \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} p^i q^{n-1-i}}_{\text{(entier)}}$

  Ainsi $q \mid a_n p^n$.
  or $q\wedge p = 1$ donc $\boxed{q \mid a_n}$

Ainsi, toute racine rationnelle de X^2-2 s'écrit sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p\wedge q = 1$; $p \mid (-2)$ et $q \mid 1$.
Les seules racines envisageables sont (-2) ; (-1), 1 et 2 mais aucune ne vérifie l'équation $X^2-2=0$.
Pourtant $\sqrt{2}$ est racine de X^2-2 donc $\boxed{\sqrt{2} \text{ n'est pas rationnel.}}$

2.2.3

Pour l'irrationalité de $\sqrt{2}$ sans démonstration par l'absurde, après quelques recherches, j'ai trouvé que l'on peut démontrer que :

$$\text{pour tous } p,\ q \text{ des entiers non nuls premiers entre eux, } p^2 \neq 2q^2.$$

Si $\sqrt{2}$ était rationnel : $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec p, q des entiers non nuls premiers entre eux alors p et q vérifieraient l'égalité $p^2 = 2q^2$.

Soient p et q sont premiers entre eux alors on a les deux cas suivants :

(1) soit p est pair et q impair

Si p est pair alors 4 divise p^2. Or, q est impair donc q^2 aussi. Alors 2 divise $2q^2$ mais 4 ne divise pas $2q^2$.
On en déduit que p^2 ne peut pas être égal à $2q^2$.

(2) soit p est impair

Si p est impair alors p^2 aussi. Comme $2q^2$ est pair, il ne peuvent pas être égaux.

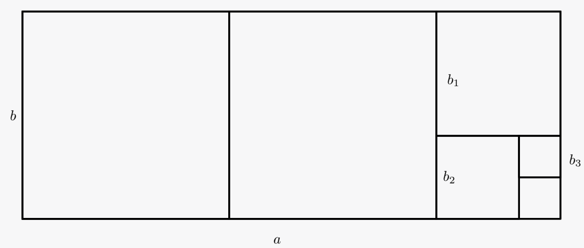
En conclusion, pour tous p, q des entiers non nuls, si p et q sont premiers entre eux alors $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 \neq 2$.
Il n'existe donc pas de fractions dont le carré est 2.
Cette démonstration n'utilise pas de raisonnement par l'absurde (et n'est pas de moi).

2.2.4

Supposons que p et q soient entiers et que $p - q\sqrt{2} = 0$. Alors, $p^2 = 2q^2$. En particulier, $2|p^2$. Puisque 2 est un nombre premier, cela entraîne que $2|p$. En reportant dans l'équation $p^2 = 2q^2$, on obtient que q^2 est pair, et donc que q l'est aussi. Ainsi, on a montré que si p et q sont des entiers tels que $p-q\sqrt{2} = 0$, il ont nécessairement 2 pour facteur commun. Cela entraîne que $p = q = 0$.

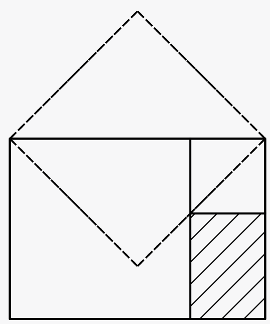
2.2.5

On peut aussi le faire par une méthode géométrique permettant de montrer que 1 et $\sqrt{2}$ sont incommensurables (souvenir du programme de L spé maths de 2004). Ce procédé utilise l'algorithme d'Euclide : les nombres ont une commune mesure (comme des entiers ou des rationnels) si, et seulement si, l'algorithme s'arrête.
On en déduit que si l'algorithme ne s'arrête pas, c'est que les nombres sont incommensurables.



Dans le rectangle ci-dessus, les longueurs sont des entiers a et b (mais on peut aussi le faire avec des rationnels : la figure est faite avec des décimaux). On pave le rectangle par des carrés.
On a : $a = 2b + b_1$, $b = b_1 + b_2$, $b_1 = b_2 + b_3$ et $b_2 = 2b_3$.
en remontant, on a : $a = 13b_3$ et $b = 5b_3$.
L'algorithme s'arrête : les longueurs sont commensurables.

Si on fait la même chose avec un rectangle dont la longueur est la diagonale d'un carré et la largeur la longueur du côté du carré, l'algorithme ne s'arrête pas.



Le rectangle hachuré est de même format que le rectangle de départ (rapport de la longueur par la largeur). On peut découper indéfiniment le rectangle, on retombe toujours sur un rectangle de même format que le rectangle de départ.

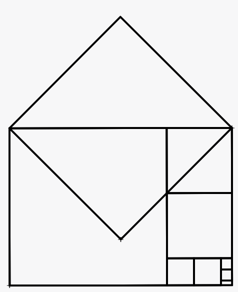
On peut aussi le faire par le calcul : la méthode par le calcul s'inspire de la détermination du pgcd pas les différences.
On initialise avec $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$: $\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$.

$b_1 = a - b = \sqrt{2} - 1$: $\dfrac{b}{b_1} = \sqrt{2} + 1$

$b_2 = b - b_1 = 2 - \sqrt{2}$: $\dfrac{b_2}{b_1} = \sqrt{2}$

$b_3 = b_2 - b_1 = 3 - 2\sqrt{2}$: $\dfrac{b_1}{b_3} = \sqrt{2} + 1$

$b_4 = b_1 - b_3 = 3\sqrt{2} - 4$: $\dfrac{b_4}{b_3} = \sqrt{2}$...



On obtient des rectangles de même format (alternativement $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2} + 1$) ; l'algorithme ne s'arrête pas. Les longueurs ne sont donc pas commensurables. Et $\sqrt{2}$ n'est donc pas rationnel.

3 Multiples de 5

Montrer que la somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5.

3.1 La preuve de référence

Soit n un entier. Il s'agit de montrer que $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4)$ est un multiple de 5. Or, $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5(n+2)$: c'est un multiple de 5.

3.2 Autres preuves

3.2.1

Montrons que la somme de cinq entiers consécutifs est divisible par 5

Soit $n \in \mathbb{Z}$, $(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2) = 5n$: multiple de 5.

4 Croissance

Montrer que l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$.

4.1 La preuve de référence

Proposition

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
f	0	$\nearrow$

Preuve

Soient a et b deux réels positifs tels que $a < b$. On peut démontrer ce résultat de deux manières différentes.

∘ En utilisant les variations de la fonction carrée

On suppose par l'absurde que $a < b$ et que $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$. Par définition de la racine carrée d'un nombre positif, elle est positive donc $\sqrt{a} \geq 0$ et $\sqrt{b} \geq 0$.
On a donc $\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \geq 0$. Or la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$.
On obtient donc $\sqrt{a}^2 \geq \sqrt{b}^2$, soit $a \geq b$.
Or, $a < b$. On obtient une contradiction et on a bien montré que :

$$\text{si } a < b \text{ alors } \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$

∘ En utilisant l'expression conjuguée

Remarquons tout d'abord que, si $\sqrt{b} = 0$ alors $\left(\sqrt{b}\right)^2 = 0$. Or, $\left(\sqrt{b}\right)^2 = b$. Donc $b = 0$.
Par contraposée, on obtient que :

$$\boxed{\text{si } b \neq 0 \text{ alors } \sqrt{b} \neq 0 \qquad (1).}$$

On démontre ensuite que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq 0$.

Comme $0 \leq a < b$ alors $\sqrt{a} \geq 0$ et, d'après (1), $\sqrt{b} > 0$.
De $\sqrt{b} > 0$, on tire $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a}$.
Comme $\sqrt{a} \geq 0$ alors $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$.Donc :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq 0.$$

Calculons et étudions le signe de $f(b) - f(a)$.

On a $f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a}$. Comme on ne sait pas étudier directement le signe de $f(b) - f(a)$, on va multiplier et diviser par l'expression conjuguée de $\sqrt{b} - \sqrt{a}$ qui est $\sqrt{b} + \sqrt{a}$; cette opération est possible car on vient de montrer que $\sqrt{b} + \sqrt{a} \neq 0$.
On a alors :

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sqrt{b} - \sqrt{a} \\ &= \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{\sqrt{b}^2 - \sqrt{a}^2}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Comme on a supposé que $a < b$ alors $b - a > 0$.
De plus, on a démontré plus haut que $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$.
Alors $\dfrac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} > 0$. On en déduit que $f(b) - f(a) > 0$. On retrouve le résultat déjà démontré :

$$\text{si } a < b \text{ alors } f(a) < f(b).$$

4.2 Autres preuves

4.2.1

Soient x et y deux réels positifs ou nuls et distincts. Alors,

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} > 0.$$

Cela montre que $x \mapsto \sqrt{x}$ est (strictement) croissante sur $[0, +\infty[$.

5 Gauß

Soient a, b et c des entiers. Montrer que si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

5.1 La preuve de référence

Thm de Gauss :

Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Si $\begin{cases} \text{pgcd}(a,b) = 1 \\ a \text{ divise } bc \end{cases}$ Alors a divise c

demo : Comme $\text{pgcd}(a,b) = 1$

d'après le thm de Bezout : $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2$, $au + bv = 1$ $\times c$

$acu + bcv = c$ $(*)$

De plus a divise bc

donc $\exists q \in \mathbb{Z}$, $bc = aq$

En utilisant $(*)$, on obtient $c = acu + aqv = a(cu + qv)$, ce qui montre que a divise c.

5.2 Autres preuves

5.2.1

Si x est un entier non nul et si p est un nombre premier, on note $v_p(x)$ la p-valuation de x. Dire que a divise bc signifie que $v_p(a) \leq v_p(b) + v_p(c)$, pour tout premier p. Par ailleurs, dire que a et b sont étrangers signifie que $v_p(a)v_p(b) = 0$, pour tout premier p. Ainsi, supposons que p soit un nombre premier, que $a|bc$ et que a et b soient étrangers. Alors, nécessairement, $v_p(a) \leq v_p(c)$. Puisque p est arbitraire, cela montre que a divise c.

6 Positions relatives

Etudier les positions relatives des graphes des trois fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$.

6.1 La preuve de référence

Propriété :
Soient $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ la courbe d'équations respectives $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$.

- ◇ Sur $[0\,;1]$, la courbe $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_2$ qui est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_3$.
  Autrement dit, pour tout x de $[0\,;1]$, on a : $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$.
- ◇ Sur $[1\,;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_1$ est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_2$ qui est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_3$.
  Autrement dit, pour tout x de $[1\,;+\infty[$, on a : $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$.

Démonstration 1 :

- ◇ Si $0 \leqslant x \leqslant 1$:
  En multipliant chaque membre de l'inégalité par x qui est positif, on obtient $0 \times x \leqslant x \times x \leqslant 1 \times x$ soit
  $$0 \leqslant x^2 \leqslant x \quad (1).$$
  En multipliant chaque membre de l'inégalité (1) par x qui est positif, on obtient $0 \times x \leqslant x^2 \times x \leqslant x \times x$ soit
  $$0 \leqslant x^3 \leqslant x^2 \quad (2).$$
  Finalement, de (1) et (2), on déduit que $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$.
  Donc, sur l'intervalle $[0\,;1]$, la courbe $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_2$ qui est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_3$.
- ◇ Si $x \geqslant 1$:
  En multipliant chaque membre de l'inégalité par x qui est positif, on obtient $x \times x \geqslant x \times 1$ soit
  $$x^2 \geqslant x \quad (1).$$
  En multipliant chaque membre de l'inégalité (1) par x qui est positif, on obtient $x^2 \times x \geqslant x \times x$ soit
  $$x^3 \geqslant x^2 \quad (2).$$
  Finalement, de (1) et (2), on déduit que $x^3 \geqslant x^2 \geqslant x$.
  Donc, sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_1$ est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_2$ qui est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_3$.

Démonstration 2 :

- ◇ Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - x$.
  Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, on a : $f(x) = x^2 - x = x(x-1)$.
  Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, on a :
  - $x = 0$;
  - $x - 1 = 0 \iff x = 1$.

x	0		1		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	

Donc :

- si $x \in [0\,;1]$ alors $f(x) \leqslant 0$ soit $x^2 - x \leqslant 0$ donc $x^2 \leqslant x$;
- si $x \in [1\,;+\infty[$ alors $f(x) \geqslant 0$ soit $x^2 - x \geqslant 0$ donc $x^2 \geqslant x$.

◇ Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - x^2$.
Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, on a : $g(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$.
Pour tout x de $[0\,;+\infty[$, on a :

- $x^2 = 0 \iff x = 0$;
- $x - 1 = 0 \iff x = 1$.

x	0		1		$+\infty$
x^2	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$-$	0	$+$	

Donc :

- si $x \in [0\,;1]$ alors $g(x) \leqslant 0$ soit $x^3 - x^2 \leqslant 0$ donc $x^3 \leqslant x^2$;
- si $x \in [1\,;+\infty[$ alors $g(x) \geqslant 0$ soit $x^3 - x^2 \geqslant 0$ donc $x^3 \geqslant x^2$.

◇ Des deux points précédents, on en déduit que :

- si $x \in [0\,;1]$ alors $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$.
  Donc, sur l'intervalle $[0\,;1]$, la courbe $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_2$ qui est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_3$.
- si $x \in [1\,;+\infty[$ alors $x^3 \geqslant x^2 \geqslant x$.
  Donc, sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_1$ est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_2$ qui est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_3$.

6.2 Autres preuves

6.2.1

Soit $x \geq 0$. Les nombres $x^2 - x = x(x-1)$ et $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ sont du signe de $x-1$.
Cela montre que :

$$(i)\ \text{ si } 0 \leq x \leq 1, \text{ alors } x^3 \leq x^2 \leq x \text{ ;}$$
$$(ii)\ \text{ si } x \geq 1, \text{ alors } x^3 \geq x^2 \geq x.$$

7 Un tiers

Montrer que $\dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal.

7.1 La preuve de référence

Montrons que $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe n, p entiers tq.

$$\frac{1}{3} = n \times 10^{-p} \quad (*)$$

Comme $0 < \frac{1}{3} < 1$, $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$

on a d'après $(*)$ $3n = 10^p$.

Ainsi 10^p est divisible par 3, or la somme de ses chiffres est 1

et 1 n'est pas divisible par 3. Contradiction.

Conclusion : $\boxed{\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}}$

7.2 Autres preuves

7.2.1

Si $\frac{1}{3}$ était décimal, il s'écrirait sous la forme $\frac{n}{10^p}$ où n et p sont entiers naturels. On aurait alors $3n = 10^p$ ce qui est interdit par le théorème de Gauss puisque 3 et 10 sont premiers entre eux.