Olympiades nationales 2020
Zone Amériques
Éléments de solution

Exercice 3
Les nombres palindromes

Partie A : Généralités

1. *a.* Dans le système décimal, les nombres s'écrivant avec deux chiffres identiques sont les palindromes à deux chiffres : 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Il y en a neuf.

b. Les nombres palindromes à trois chiffres, dans ce système, sont constitués de deux chiffres identiques encadrant un chiffre (pas nécessairement différent). Il y en a donc 9×10, car il y a dix choix possible pour le chiffre des dizaines.

c. Un nombre palindrome dont l'écriture comporte 241 chiffres nécessite le choix du 121ème puis le choix des 120 premiers (qui déterminent les 120 derniers). Pour le premier, 0 est interdit, donc il y a 9 possibilités, pour chacun des suivants 10 possibilités. Au total : $9 \times (10 \times 10 \times \ldots . \times 10 \times 10) \times 10 = 9 \times 10^{120}$.

2. *a.* $N = 11\,111\,211\,111$ est un palindrome à 11 chiffres, $N' = 33\,333\,433\,333$ aussi

b. $M = 111\,112\,211\,111$ est un palindrome à 12 chiffres, $M' = 333\,334\,433\,333$ aussi.

3. On entre l'entier n, et on charge les mémoires a, b, c et d avec $E(\frac{n}{1000})$, $E\left(\frac{(n-1\,000a)}{100}\right)$, $E\left(\frac{n-1\,000a-100b}{10}\right)$ et $n - 1\,000a - 100b - 10c$. Il s'agit ensuite de comparer a et d et, s'ils sont égaux, b et c. Si la dernière réponse est oui n est un palindrome.

a. L'écart entre 33 333 433 333 et 11 111 211 111 est 22 222 222 222

b. Si on ajoute 11 au nombre $1\,000a + 100b + 10b + a$, on obtient $1\,000a + 100b + 10(b+1) + (a+1)$, ce qui ne peut être l'écriture d'un entier de quatre chiffres palindrome que si le chiffre des milliers est $a+1$, ce qui entraîne que $b + 1 = 10$. Les nombres cherchés s'écrivent donc $a99a$, a pouvant prendre toutes les valeurs de 1 à 8.

c. Si on ajoute 10 au nombre qui s'écrit $abba$, on change le chiffre des dizaines de b en $b+1$, ce qui nécessite que $b = 9$, mais alors le chiffre des milliers passe de a à $a+1$ et on n'a toujours pas de palindrome. Ajouter un nombre inférieur à 10 soit ne provoque qu'un changement de chiffre des unités, adieu le palindrome, soit exige $b = 9$ et le passage du chiffre des milliers à $a+1$. Il faut donc au moins ajouter 11, et on a vu que c'était possible de conserver la qualité de palindrome.

Partie B : Nombres palindromes et divisibilité par 11

1. *a.* On considère le nombre $N = 123\,321$. On peut écrire $N = 100\,001 + 2\,002 + 33$

b. Comme $100\,001 = 9\,091 \times 11, 1\,001 = 7 \times 11 \times 13$, on en déduit que N est multiple de 11.

2. *a.* À partir de l'identité remarquable donnée, en changeant x en $-x$, on obtient pour tout x et pour tout entier n impair :

$$1 + x^n = (1+x)(1 - x + x^2 - \cdots + x^{n-1})$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, $n = 2k+1$ et $x = 10$. Le premier facteur du produit est 11.

b. À l'image de ce qui a été fait au **1. *a.***, tout palindrome possédant un nombre pair n de chiffres est une « combinaison linéaire » (les coefficients sont des chiffres) des $\left(1 + 10^{2k+1}\right)$ pour les entiers k compris entre 0 et $\frac{n}{2} - 1$. Chacun des $\left(1 + 10^{2k+1}\right)$ est un multiple de 11, d'où le résultat.

c. Il y a bien sûr des multiples de 11 ayant un nombre pair de chiffres qui ne sont pas des palindromes, par exemple $11 \times 123 = 1\,353$.

La dernière question parle de la réciproque d'une propriété du type « si A et B alors C ». Cette réciproque s'écrit : « si C, alors A et B ». Il y a de grandes chances qu'elle soit fausse. Dans le cas présent, elle l'est.

En revanche, on pourrait réécrire la question : dans l'ensemble des palindromes, ceux qui ont un nombre pair de chiffres sont multiples de 11. On a un « si A, alors C », B décrivant le référentiel de travail. La réciproque s'écrit : « si un palindrome est multiple de 11, alors il a un nombre pair de chiffres ».

Le contre-exemple $11 \times 11 = 121$ *montre qu'on peut être palindrome, multiple de 11 et posséder un nombre impair de chiffres.*