Livret de liaison Seconde – Première
Correction des exercices

Table des matières

Laboratoire
de
Mathématiques
BASCAN
RAMBOUILLET

I Fiche 1 – Symboles $\in$, $\notin$, $\cap$, $\cup$

Exercice 1 :

1) L'ensemble F possède 1 361 milliers d'éléments.
2) Concrètement, dans cet exemple, l'ensemble de tous les éléments étudiés est l'ensemble de tous les chômeurs.
   Le nom donné à cet ensemble dans le tableau est C. Il possède 2 812 milliers d'éléments.
   On peut écrire : $F \subset C$.
3) $H \cap C_2$ est l'ensemble des hommes au chômage ayant entre 25 et 49 ans. Cet ensemble possède 816 milliers d'éléments.
4) $F \cup C_3$ est l'ensemble des femmes de plus de 15 ans au chômage ou des personnes au chômage ayant entre 50 et 64 ans. Cet ensemble possède $1\,361 + 272 = 1\,633$ milliers d'éléments.
5) $\overline{F}$ est l'ensemble des hommes de plus de 15 ans au chômage. Il possède 1 451 milliers d'éléments.
6) $\overline{C_1}$ est l'ensemble des personnes au chômage ayant plus de 25 ans. Cet ensemble possède $2\,812 - 658 = 2\,154$ milliers d'éléments.

Exercice 2 :

1) $3 \in \mathbb{N}$; $-3{,}1 \notin \mathbb{N}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$; $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.
2) Soit x un nombre compris entre 1 et 2 mais différent de 2 alors $x \in [1\,;2[$ et $[1\,;2[\subset \mathbb{R}$.
3) $[1\,;3[\cap [0\,;2[= [1\,;2[$.
4) $[1\,;3[\cup [0\,;2[= [0\,;3[$.
5) Les deux intervalles $[1\,;3]$ et $[4\,;+\infty[$ sont disjoints.
6) L'ensemble de tous les nombres réels qui ne sont pas strictement supérieurs à 4 est l'intervalle $]-\infty\,;4]$.
7) Soit x un nombre réel. Si $x \notin [1\,;3[$ alors $x \in]-\infty\,;1[\cup [3\,;+\infty[$. Le complémentaire de l'ensemble $[1\,;3[$ dans $\mathbb{R}$ est donc $]-\infty\,;1[\cup [3\,;+\infty[$.
8) Le complémentaire de l'ensemble des réels x tels que $x > -1$ est l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.

Exercice 3 :

1) a) On a : $2x_A + 1 = 2 \times (-1) + 1 = -2 + 1 = -1 = y_A$ donc le point A appartient à $\mathscr{D}_1$ et on peut écrire $A \in \mathscr{D}_1$.
   b) On a : $-x_A + 3 = -(-1) + 3 = 1 + 3 = 4 \neq y_A$ donc $A \notin \mathscr{D}_2$.
   c) Pour tous réels x et y, on a :

$$\begin{cases} y = 2x+1 \\ y = -x+3 \end{cases} \iff \begin{cases} -x+3 = 2x+1 \\ y = -x+3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -3x+3 = 1 \\ y = -x+3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -3x = -2 \\ y = -x+3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{2}{3}+3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{7}{3} \end{cases}.$$

   Donc $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \left\{\left(\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{7}{3}\right)\right\}$.

2) a) $F \notin (EGB)$. b) $(FG) \subset (FBC)$. c) $(EHB) \cap (ABD) = (BC)$.
   d) $(EHB) \cap (FG) = \varnothing$. e) $(HD) \cap (ABC) = \{D\}$.

II Fiche 2 – Calcul numérique

Exercice 1 :

1) Pour tout $x \neq -1$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x - 3 + \frac{1}{x+1} \\
&= \frac{(2x-3)(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} \\
&= \frac{2x^2 + 2x - 3x - 3}{x+1} + \frac{1}{x+1} \\
&= \frac{2x^2 - x - 3}{x+1} + \frac{1}{x+1} \\
&= \frac{2x^2 - x - 3 + 1}{x+1} \\
&= \frac{2x^2 - x - 2}{x+1}.
\end{aligned}$$

2) a) On a :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{2}{3}\right) &= \frac{2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} - 2}{\frac{2}{3} + 1} \\
&= \frac{\frac{8}{9} - \frac{2}{3} - 2}{\frac{5}{3}} \\
&= \frac{\frac{8}{9} - \frac{6}{9} - \frac{18}{9}}{\frac{5}{3}} \\
&= \frac{-\frac{16}{9}}{\frac{5}{3}} \\
&= -\frac{16}{9} \times \frac{3}{5} \\
&= -\frac{16 \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times 3 \times 5} \\
&= -\frac{16}{15}.
\end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}
f\left(\sqrt{5}\right) &= \frac{2 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 - \sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 1} \\
&= \frac{10 - \sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 1} \\
&= \frac{8 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 1} \\
&= \frac{\left(8 - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5} - 1\right)}{\left(\sqrt{5} + 1\right)\left(\sqrt{5} - 1\right)} \\
&= \frac{8\sqrt{5} - 8 - 5 + \sqrt{5}}{5 - 1} \\
&= \frac{9\sqrt{5} - 13}{4}.
\end{aligned}$$

c) On a :

$$\begin{aligned}
f\left(\sqrt{3}-1\right) &= \frac{2\times\left(\sqrt{3}-1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)-2}{\sqrt{3}-1+1}\\
&= \frac{2\left(3-2\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{3}+1-2}{\sqrt{3}}\\
&= \frac{2\left(4-2\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\\
&= \frac{8-4\sqrt{3}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\\
&= \frac{7-5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\\
&= \frac{\left(7-5\sqrt{3}\right)\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\\
&= \frac{7\sqrt{3}-15}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

a) On a :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\\
&= \frac{6}{12}-\frac{4}{12}+\frac{3}{12}\\
&= \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}
B &= \frac{2}{3}-\frac{3}{4}+3\left(\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right)\\
&= \frac{8}{12}-\frac{9}{12}+3\left(\frac{24}{30}-\frac{25}{30}\right)\\
&= -\frac{1}{12}+3\times\left(-\frac{1}{30}\right)\\
&= -\frac{1}{12}-\frac{1}{10}\\
&= -\frac{5}{60}-\frac{6}{60}\\
&= -\frac{11}{60}.
\end{aligned}$$

c) On a :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{\frac{3}{2}-\frac{7}{5}}{\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}+1}\\
&= \frac{\frac{15}{10}-\frac{14}{10}}{\frac{8}{15}+\frac{15}{15}}\\
&= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{23}{15}}\\
&= \frac{1}{10}\times\frac{15}{23}\\
&= \frac{1\times\cancel{5}\times 3}{\cancel{5}\times 2\times 23}\\
&= \frac{3}{46}.
\end{aligned}$$

d) On a :

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{48} \\ &= \sqrt{16 \times 3} \\ &= \sqrt{16} \times \sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

e) On a :

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{36+64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10. \end{aligned}$$

f) On a :

$$\begin{aligned} F &= 5\sqrt{27} - 3\sqrt{48} \\ &= 5\sqrt{9 \times 3} - 3 \times 4\sqrt{3} \\ &= 5 \times \sqrt{9} \times \sqrt{3} - 12\sqrt{3} \\ &= 5 \times 3\sqrt{3} - 12\sqrt{3} \\ &= 15\sqrt{3} - 12\sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

g) On a :

$$\begin{aligned} G &= \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{25}} \\ &= \frac{9}{\sqrt{121 \times 2}} \times \frac{\sqrt{49 \times 2}}{5} \\ &= \frac{9}{\sqrt{121} \times \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{49} \times \sqrt{2}}{5} \\ &= \frac{9}{11\sqrt{2}} \times \frac{7\sqrt{2}}{5} \\ &= \frac{9 \times 7 \times \cancel{\sqrt{2}}}{11 \times \cancel{\sqrt{2}} \times 5} \\ &= \frac{63}{55}. \end{aligned}$$

Exercice 3 :

a) Pour tous réels a et b non nuls, on a :

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2\left(-a\right)^3\left(-b^2\right)b^5a}{\left(-b\right)^4 a^5 \left(ab\right)^2} \\ &= \frac{\cancel{a^2} \times \left(-a^3\right) \times \left(\left(-1\right)\cancel{b^2}\right) \times b^5 \times a}{b^4 \times a^5 \times \cancel{a^2} \times \cancel{b^2}} \\ &= \frac{a^4 \times b^5}{b^4 \times a^5} \\ &= \frac{\cancel{a^4} \times \cancel{b^4} \times b}{\cancel{b^4} \times a \times \cancel{a^4}} \\ &= \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}B &= \frac{16^{25}}{2^{100}}\\ &= \frac{\left(2^4\right)^{25}}{2^{100}}\\ &= \frac{2^{100}}{2^{100}}\\ &= 1.\end{aligned}$$

c) Pour tous réels a et b tels que $b^2+ab \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}C &= \frac{a^2+ab}{b^2+ab}\\ &= \frac{a\cancel{(a+b)}}{b\cancel{(a+b)}}\\ &= \frac{a}{b}.\end{aligned}$$

d) On a :

$$\begin{aligned}D &= \sqrt{2^6\left(1+2^3\right)}\\ &= \sqrt{2^6}\times\sqrt{1+2^3}\\ &= 2^3\times\sqrt{1+8}\\ &= 2^3\times\sqrt{9}\\ &= 8\times 3\\ &= 24.\end{aligned}$$

e) On a :

$$\begin{aligned}E &= \frac{\frac{1}{1-\pi}-\frac{1}{1+\pi}}{1+\frac{1}{\pi^2-1}}\\ &= \frac{\frac{1+\pi}{(1-\pi)(1+\pi)}-\frac{1-\pi}{(1-\pi)(1+\pi)}}{\frac{\pi^2-1}{\pi^2-1}+\frac{1}{\pi^2-1}}\\ &= \frac{\frac{1+\pi}{1-\pi^2}-\frac{1-\pi}{1-\pi^2}}{\frac{\pi^2-1+1}{\pi^2-1}}\\ &= \frac{\frac{1+\pi-1+\pi}{1-\pi^2}}{\frac{\pi^2}{\pi^2-1}}\\ &= \frac{\frac{2\pi}{1-\pi^2}}{\frac{\pi^2}{\pi^2-1}}\\ &= \frac{2\pi}{1-\pi^2}\times\frac{\pi^2-1}{\pi^2}\\ &= \frac{2\times\cancel{\pi}\times(-1)\times\cancel{(1-\pi^2)}}{\cancel{(1-\pi^2)}\times\cancel{\pi}\times\pi}\\ &= -\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Exercice 4 :

a) On a :

$$\begin{aligned}A &= \frac{3}{\sqrt{5}+1}\\ &= \frac{3\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}\\ &= \frac{3\sqrt{5}-3}{5-1}\\ &= \frac{3\sqrt{5}-3}{4}.\end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}B &= \frac{-2}{\sqrt{7}-2}\\ &= \frac{-2\left(\sqrt{7}+2\right)}{\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)}\\ &= \frac{-2\sqrt{7}-4}{7-4}\\ &= \frac{-2\sqrt{7}-4}{3}.\end{aligned}$$

c) On a :

$$\begin{aligned}C &= \frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\\ &= \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}\\ &= \frac{3+\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5}{9-5}\\ &= \frac{8+4\sqrt{5}}{4}\\ &= \frac{\cancel{4}\left(2+\sqrt{5}\right)}{\cancel{4}}\\ &= 2+\sqrt{5}.\end{aligned}$$

d) On a :

$$\begin{aligned}D &= \frac{6-\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}\\ &= \frac{\left(6-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)}{\left(4-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)}\\ &= \frac{24+6\sqrt{2}-4\sqrt{2}-2}{16-2}\\ &= \frac{22+2\sqrt{2}}{14}\\ &= \frac{\cancel{2}\left(11+\sqrt{2}\right)}{\cancel{2}\times 7}\\ &= \frac{11+\sqrt{2}}{7}.\end{aligned}$$

Exercice 5 :

1) On a :

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{1+\sqrt{2}} &= 1+\frac{1-\sqrt{2}}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}\\ &= 1+\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}\\ &= 1+\frac{1-\sqrt{2}}{-1}\\ &= 1-1+\sqrt{2}\\ &= \sqrt{2}.\end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned}
\varphi^2-\varphi-1 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1\\
&= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}-\frac{2+2\sqrt{5}}{4}-\frac{4}{4}\\
&= \frac{6+2\sqrt{5}-2-2\sqrt{5}-4}{4}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

3) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} &= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)}\\
&= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)}\\
&= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-n-1}\\
&= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{-1}\\
&= -\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\\
&= \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.
\end{aligned}$$

4) On a :

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{12-3\sqrt{7}}+\sqrt{12+3\sqrt{7}}\right)^2 &= \left(\sqrt{12-3\sqrt{7}}\right)^2+2\sqrt{12-3\sqrt{7}}\times\sqrt{12+3\sqrt{7}}+\left(\sqrt{12+3\sqrt{7}}\right)^2\\
&= 12-3\sqrt{7}+2\sqrt{\left(12-3\sqrt{7}\right)\left(12+3\sqrt{7}\right)}+12+3\sqrt{7}\\
&= 24+2\sqrt{12^2-\left(3\sqrt{7}\right)^2}\\
&= 24+2\times\sqrt{144-63}\\
&= 24+2\times\sqrt{81}\\
&= 24+2\times 9\\
&= 24+18\\
&= 42.
\end{aligned}$$

Exercice 6 :
Pour tous réels a et b, on a :

$$\begin{aligned}
(a-b)^3 &= (a-b)^2(a-b)\\
&= \left(a^2-2ab+b^2\right)(a-b)\\
&= a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+ab^2-b^3\\
&= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\alpha^3 &= \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3 \\
&= \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^3 - 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^2 \times \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \times \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3 \\
&= \sqrt{5}+2 - 3 \times \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \times \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} \times \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) - \left(\sqrt{5}-2\right) \\
&= \sqrt{5}+2 - 3\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) - \sqrt{5}+2 \\
&= 4 - 3\sqrt[3]{5-4}\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) \\
&= 4 - 3\sqrt[3]{1}\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) \\
&= 4 - 3 \times 1 \times \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) \\
&= 4 - 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) \\
&= 4 - 3\alpha.
\end{aligned}$$

Donc on en déduit que : $\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$.

Exercice 7 :

a) On a :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{3^{27} - 3^{29}}{3^{28}} \\
&= \frac{3^{27}\left(1 - 3^2\right)}{3^{28}} \\
&= \frac{1 - 3^2}{3} \\
&= \frac{1 - 9}{3} \\
&= -\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\left(2^5\right)^3 \times 4^{-5}}{8} \\
&= \frac{2^{15} \times \left(2^2\right)^{-5}}{2^3} \\
&= \frac{2^{15} \times 2^{-10}}{2^3} \\
&= \frac{2^5}{2^3} \\
&= 2^2 \\
&= 4.
\end{aligned}$$

c) On a :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{3^{-6} \times 5^5}{\left(5^2\right)^3 \times 3^{-5}} \\
&= \frac{3^{-6}}{3^{-5}} \times \frac{5^5}{5^6} \\
&= 3^{-1} \times 5^{-1} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{15}.
\end{aligned}$$

d) On a :

$$\begin{aligned}
D &= \frac{8^2 \times 9^{-5}}{3^{-11} \times 2^8} \\
&= \frac{\left(2^3\right)^2 \times \left(3^2\right)^{-5}}{3^{-11} \times 2^8} \\
&= \frac{2^6 \times 3^{-10}}{3^{-11} \times 2^8} \\
&= \frac{2^6}{2^8} \times \frac{3^{-10}}{3^{-11}} \\
&= 2^{-2} \times 3 \\
&= \frac{1}{4} \times 3 \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

e) On a :

$$\begin{aligned}
E &= \frac{3^{1\,505} + 3^{1\,505} + 3^{1\,505}}{3^{1\,506}} \\
&= \frac{3 \times 3^{1\,505}}{3^{1\,506}} \\
&= \frac{3^{1\,506}}{3^{1\,506}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Exercice 8 :

a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
A &= 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n \\
&= 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \left(\frac{2}{5}\right) - 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n \times 1 \\
&= 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \left(\frac{2}{5} - 1\right) \\
&= 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \left(\frac{2}{5} - \frac{5}{5}\right) \\
&= 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \left(-\frac{3}{5}\right) \\
&= -\frac{9}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n.
\end{aligned}$$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
B &= -2 \times 5^{n+1} + 2 \times 5^n \\
&= -2 \times 5^n \times 5 + 2 \times 5^n \times 1 \\
&= 2 \times 5^n \times (-5 + 1) \\
&= 2 \times 5^n \times (-4) \\
&= -8 \times 5^n.
\end{aligned}$$

c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
C &= (n+1) \times 2^{n+1} - n \times 2^n \\
&= (n+1) \times 2^n \times 2 - n \times 2^n \\
&= 2^n \times ((n+1) \times 2 - n) \\
&= 2^n \times (2n + 2 - n) \\
&= (n+2) \times 2^n.
\end{aligned}$$

Exercice 9 :
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} 2^n + 2^n &= 2 \times 2^n \\ &= 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Exercice 10 :
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} 12 \times \frac{1 - \frac{1}{5^{n+1}}}{1 - \frac{1}{5}} &= 12 \times \frac{1 - \frac{1}{5^{n+1}}}{\frac{5}{5} - \frac{1}{5}} \\ &= 12 \times \frac{1 - \frac{1}{5^{n+1}}}{\frac{4}{5}} \\ &= 12 \times \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right) \times \frac{5}{4} \\ &= \frac{\cancel{4} \times 3 \times 5}{\cancel{4}} \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right) \\ &= 15 \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right) \\ &= 15 - \frac{15}{5^{n+1}} \\ &= 15 - \frac{\cancel{5} \times 3}{\cancel{5} \times 5^n} \\ &= 15 - \frac{3}{5^n}. \end{aligned}$$

Exercice 11 :
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n} &= \frac{3^n \times 3}{n+1} - \frac{3^n}{n} \\ &= 3^n \left(\frac{3}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 3^n \left(\frac{3n}{n\,(n+1)} - \frac{n+1}{n\,(n+1)}\right) \\ &= \frac{3^n\,(3n - n - 1)}{n\,(n+1)} \\ &= \frac{3^n\,(2n-1)}{n\,(n+1)}. \end{aligned}$$

Or, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $3^n > 0$; $2n - 1 > 0$; $n > 0$ et $n + 1 > 0$ donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{3^n\,(2n-1)}{n\,(n+1)} > 0$.
Donc $\dfrac{3^{n+1}}{n+1} - \dfrac{3^n}{n} > 0$ pour tout n entier naturel non nul.

III Fiche 3 – Pourcentages

Exercice 1 :
On a : $\dfrac{700}{1\,200} \approx 0{,}583$.
Donc le pourcentage de filles dans ce lycée est d'environ 58,3 %.

Exercice 2 :

1) On a : $\dfrac{54}{450} = 0{,}12$ donc 12 % des adhérents de ce club pratiquent le volley-ball.
2) On a : $1 - 0{,}12 = 0{,}88$ donc 88 % des adhérents de ce club ne pratiquent pas le volley-ball.

Exercice 3 :
On a : $900 \times \dfrac{27}{100} = 243$.
Donc 243 habitants de ce village achètent chaque jour le journal local.

Exercice 4 :
On a : $224 \div \dfrac{35}{100} = 640$.
Donc il y a 640 élèves de Première dans ce lycée.

Autre méthode :
Soit n le nombre d'élèves de Première dans ce lycée.
On a :

$$\begin{aligned} n \times \frac{35}{100} = 224 &\iff n = 224 \times \frac{100}{35} \\ &\iff n = 640. \end{aligned}$$

Donc il y a 640 élèves de Première dans ce lycée.

Exercice 5 :

1) On a :
   - $800 \times \dfrac{15}{100} = 120$ élèves qui sont des filles de Première ;
   - $120 \div \dfrac{48}{100} = 250$ élèves de Premières ;
   - $120 \div \dfrac{25}{100} = 480$ filles dans ce lycée.

Classe \ Sexe	Filles	Garçons	Total
Premières	120	130	250
Autres	360	190	550
Total	480	320	800

2) On a : $\dfrac{250}{800} = 0{,}312\,5$.
   Donc il y a 31,25 % d'élèves de Première dans ce lycée.

Exercice 6 :

1) Soit P le prix initial. Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 10 % est 1,1. Celui pour une diminution de 10 % est 0,9. La prix final sera donc $P \times 1,1 \times 0,9 = P \times 0,99$ ce qui correspond à une diminution de 1 %. Le prix final sera donc inférieur au prix initial.
2) Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 20 % est $CM = 1,2$. L'évolution réciproque a donc pour coefficient multiplicateur $\dfrac{1}{CM} = \dfrac{1}{1,2} \approx 0,833$ à 10^{-3} près qui est le coefficient multiplicateur d'une diminution de 16,3 % à $0,1$ % près.

3) Soit CM_g le coefficient multiplicateur global de ces évolutions successives.
$CM_g = (1+0,07)(1+0,15)(1-0,10)(1-0,20)(1+0,12) \approx 0,9923$ à 10^{-4} près, ce qui correspond à une baisse de $0,77$ %.

Exercice 7 :

Prix initial	**Prix final**	**Pourcentage de variation**	**Coefficient multiplicateur**
17 €	19,38 €	$+14$ %	$1,14$
150 €	120 €	-20 %	$0,8$
544 €	497,76 €	$-8,5$ %	$0,915$
8,90 €	11 €	$+23,7$ %	$1,237$
4 €	4,29 €	$+7,3$ %	$1,073$
123 €	132 €	$+7,3$ %	$1,073$
11 €	$9,5$ €	$-13,6$ %	$0,864$

IV Fiche 4 – Calcul littéral

Exercice 1 :

a) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} A &= (3x-5)(3x+2) \\ &= 9x^2+6x-15x-10 \\ &= 9x^2-9x-10. \end{aligned}$$

b) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} B &= (3x+7)(4x+7) \\ &= 12x^2+21x+28x+49 \\ &= 12x^2+49x+49. \end{aligned}$$

c) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} C &= \left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{7}\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}x\right) \\ &= \frac{1}{2}x-\frac{9}{20}x^2-\frac{2}{21}+\frac{3}{35}x \\ &= -\frac{9}{20}x^2+\frac{35}{70}x+\frac{6}{70}x-\frac{2}{21} \\ &= -\frac{9}{20}x^2+\frac{41}{70}x-\frac{2}{21}. \end{aligned}$$

d) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{8}{7}x-\frac{7}{9}\right)^2 \\ &= \left(\frac{8}{7}x\right)^2-2\times\frac{8}{\cancel{7}}x\times\frac{\cancel{7}}{9}+\left(\frac{7}{9}\right)^2 \\ &= \frac{64}{49}x^2-\frac{16}{9}x+\frac{49}{81}. \end{aligned}$$

e) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} E &= \left(5+\frac{4}{3}x\right)^2 \\ &= 5^2+2\times5\times\frac{4}{3}x+\left(\frac{4}{3}x\right)^2 \\ &= \frac{16}{9}x^2+\frac{40}{3}x+25. \end{aligned}$$

f) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} F &= \left(x+2\sqrt{5}\right)\left(x-5\sqrt{3}\right) \\ &= x^2-5x\sqrt{3}+2x\sqrt{5}-2\times5\times\sqrt{5}\times\sqrt{3} \\ &= x^2+x\left(2\sqrt{5}-5\sqrt{3}\right)-10\sqrt{15}. \end{aligned}$$

Exercice 2 :

a) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} A &= (2x+7)^2-(3-4x)^2 \\ &= 4x^2+28x+49-\left(9-24x+16x^2\right) \\ &= 4x^2+28x+49-9+24x-16x^2 \\ &= -12x^2+52x+40. \end{aligned}$$

b) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}
B &= \frac{3}{5}(x-5) - x(4-3x) \\
&= \frac{3}{5}x - 3 - 4x + 3x^2 \\
&= 3x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{20}{5}x - 3 \\
&= 3x^2 - \frac{17}{5}x - 3.
\end{aligned}$$

c) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}
C &= (x+3)^2 + \left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) \\
&= x^2 + 6x + 9 + x^2 - \frac{1}{9} \\
&= 2x^2 + 6x + \frac{81}{9} - \frac{1}{9} \\
&= 2x^2 + 6x + \frac{80}{9}.
\end{aligned}$$

d) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}
D &= (1-2x)^2 - (5-x)(3-2x) \\
&= 1 - 4x + 4x^2 - \left(15 - 10x - 3x + 2x^2\right) \\
&= 1 - 4x + 4x^2 - \left(15 - 13x + 2x^2\right) \\
&= 1 - 4x + 4x^2 - 15 + 13x - 2x^2 \\
&= 2x^2 + 9x - 14.
\end{aligned}$$

Exercice 3 :

a) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{5}{3}x + \frac{2}{7}\right)(-x-3) - x + (2x+1)(2x-1) \\
&= -\frac{5}{3}x^2 - 5x - \frac{2}{7}x - \frac{6}{7} - x + 4x^2 - 1 \\
&= -\frac{5}{3}x^2 + \frac{12}{3}x^2 - \frac{35}{7}x - \frac{2}{7}x - \frac{7}{7}x - \frac{6}{7} - \frac{7}{7} \\
&= \frac{7}{3}x^2 - \frac{44}{7}x - \frac{13}{7}.
\end{aligned}$$

b) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}
B &= \left(\frac{3}{2}x + 2\right)\left(1 - \frac{5}{2}x\right)\left(\frac{11}{2} - \frac{4}{3}x\right) \\
&= \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}x^2 + 2 - 5x\right)\left(\frac{11}{2} - \frac{4}{3}x\right) \\
&= \left(-\frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{10}{2}x + 2\right)\left(\frac{11}{2} - \frac{4}{3}x\right) \\
&= \left(-\frac{15}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 2\right)\left(\frac{11}{2} - \frac{4}{3}x\right) \\
&= -\frac{165}{8}x^2 + 5x^3 - \frac{77}{4}x + \frac{14}{3}x^2 + 11 - \frac{8}{3}x \\
&= 5x^3 - \frac{495}{24}x^2 + \frac{112}{24}x^2 - \frac{231}{12}x - \frac{32}{12}x + 11 \\
&= 5x^3 - \frac{383}{24}x^2 - \frac{263}{12}x + 11.
\end{aligned}$$

c) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} C &= (2x+1)^2(2x-1) \\ &= \left(4x^2+4x+1\right)(2x-1) \\ &= 8x^3-4x^2+8x^2-4x+2x-1 \\ &= 8x^3+4x^2-2x-1. \end{aligned}$$

d) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} D &= (7x+2)^3 \\ &= (7x)^3+3\times(7x)^2\times 2+3\times 7x\times 2^2+2^3 \\ &= 343x^3+294x^2+84x+8. \end{aligned}$$

Remarque :
On pourra retenir les résultats suivants :
Pour tous réels a et b, on a : $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ et $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
Le second résultat a été démontré dans l'exercice 6 de la fiche 2. Le premier résultat se démontre de manière analogue.

Exercice 4 :

a) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} A &= 12x^3-3x \\ &= 3x\left(4x^2-1\right) \\ &= 3x\left((2x)^2-1^2\right) \\ &= 3x(2x-1)(2x+1). \end{aligned}$$

b) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} B &= 27x^3-36x^2+12x \\ &= 3x\left(9x^2-12x+4\right) \\ &= 3x\left((3x)^2-2\times 3x\times 2+2^2\right) \\ &= 3x(3x-2)^2. \end{aligned}$$

c) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} C &= (x+1)(4x+3)-(x+1)(7x-8) \\ &= (x+1)[4x+3-(7x-8)] \\ &= (x+1)(4x+3-7x+8) \\ &= (x+1)(-3x+11). \end{aligned}$$

d) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} D &= (2x+1)(2x-6)+(x-2)(x-3) \\ &= (2x+1)\times 2(x-3)+(x-2)(x-3) \\ &= (x-3)[(2x+1)\times 2+x-2] \\ &= (x-3)(4x+2+x-2) \\ &= (x-3)\times 5x \\ &= 5x(x-3). \end{aligned}$$

e) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} E &= (3x+8)(x-1)-1+x \\ &= (3x+8)(x-1)+(x-1)\times 1 \\ &= (x-1)(3x+8+1) \\ &= (x-1)(3x+9) \\ &= 3(x-1)(x+3). \end{aligned}$$

f) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}F &= (4x-3)^2 - 25x^2\\ &= (4x-3)^2 - (5x)^2\\ &= (4x-3-5x)(4x-3+5x)\\ &= (-x-3)(9x-3)\\ &= -(x+3)\times 3(3x-1)\\ &= -3(x+3)(3x-1).\end{aligned}$$

g) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}G &= x^2 - 4 - (x+2)^2\\ &= x^2 - 2^2 - (x+2)^2\\ &= (x-2)(x+2) - (x+2)(x+2)\\ &= (x+2)(x-2-(x+2))\\ &= (x+2)(x-2-x-2)\\ &= (x+2)(-4)\\ &= -4(x+2).\end{aligned}$$

h) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}H &= (2x+3)^2 - (7x-5)^2\\ &= (2x+3-(7x-5))(2x+3+7x-5)\\ &= (2x+3-7x+5)(9x-2)\\ &= (-5x+8)(9x-2).\end{aligned}$$

Exercice 5 :

a) Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{8}\,;-\frac{3}{4}\right\}$, on a :

$$\begin{aligned}A &= \frac{9}{8x+5} + \frac{5}{4x+3}\\ &= \frac{9(4x+3)}{(8x+5)(4x+3)} + \frac{5(8x+5)}{(8x+5)(4x+3)}\\ &= \frac{36x+27}{(8x+5)(4x+3)} + \frac{40x+25}{(8x+5)(4x+3)}\\ &= \frac{76x+52}{(8x+5)(4x+3)}.\end{aligned}$$

b) Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\left\{0\,;\frac{7}{2}\right\}$, on a :

$$\begin{aligned}B &= \frac{6}{2x-7} + \frac{10}{9x}\\ &= \frac{6\times 9x}{9x(2x-7)} + \frac{10(2x-7)}{9x(2x-7)}\\ &= \frac{54x}{9x(2x-7)} + \frac{20x-70}{9x(2x-7)}\\ &= \frac{74x-70}{9x(2x-7)}.\end{aligned}$$

c) Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{7}{6}\,;-\frac{3}{4}\right\}$, on a :

$$\begin{aligned}C &= \frac{2x}{-4x-3} + \frac{3x}{6x+7}\\ &= \frac{2x(6x+7)}{(-4x-3)(6x+7)} + \frac{3x(-4x-3)}{(-4x-3)(6x+7)}\\ &= \frac{12x^2+14x}{(-4x-3)(6x+7)} + \frac{-12x^2-9x}{(-4x-3)(6x+7)}\\ &= \frac{5x}{(-4x-3)(6x+7)}.\end{aligned}$$

Exercice 6 :
On rappelle que l'aire d'un trapèze est donné par la formule :

$$\mathscr{A}_{\text{trapèze}} = \frac{\text{hauteur} \times (\text{petite base} + \text{grande base})}{2}.$$

On connaît les longueurs suivantes :

- $AB = BC = CD = DA = 6$ cm ;
- $BM = CN = x$ cm ;
- $MC = DN = 6 - x$ cm ;
- $AI = ID = 3$ cm.

On a :

- $\mathscr{A}\,(ABCD) = AB^2 = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$;
- $\mathscr{A}\,(AIMB) = \dfrac{AB \times (BM + AI)}{2} = \dfrac{6 \times (x+3)}{2} = 3\,(x+3) = (3x+9) \text{ cm}^2$;
- $\mathscr{A}\,(DIN) = \dfrac{DI \times DN}{2} = \dfrac{3 \times (6-x)}{2} = \dfrac{18-3x}{2} = \left(9 - \dfrac{3}{2}x\right) \text{ cm}^2$;
- $\mathscr{A}\,(CMN) = \dfrac{CN \times CM}{2} = \dfrac{x \times (6-x)}{2} = \dfrac{6x - x^2}{2} = \left(3x - \dfrac{1}{2}x^2\right) \text{ cm}^2$ ·

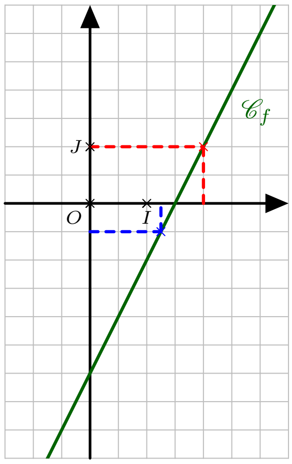
Donc, on a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\,(IMN) &= \mathscr{A}\,(ABCD) - \mathscr{A}\,(AIMB) - \mathscr{A}\,(DIN) - \mathscr{A}\,(CMN) \\
&= 36 - (3x+9) - \left(9 - \frac{3}{2}x\right) - \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right) \\
&= 36 - 3x - 9 - 9 + \frac{3}{2}x - 3x + \frac{1}{2}x^2 \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{6}{2}x - \frac{6}{2}x + \frac{3}{2}x + 18 \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + 18.
\end{aligned}$$

Donc l'aire du triangle IMN est de $\left(\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{9}{2}x + 18\right) \text{ cm}^2$ ·

V Fiche 5 – Fonctions

Exercice 1 :

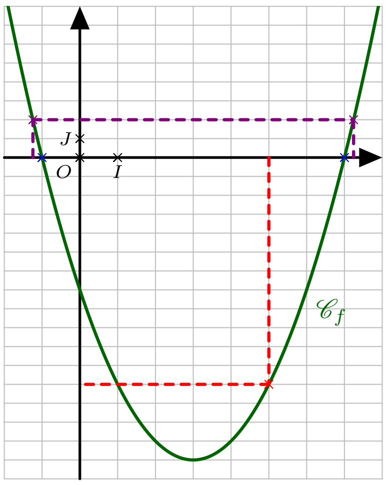


1) a) Graphiquement, l'image de 2 par la fonction f est 1.
   b) On a : $f(2) = 2 \times 2 - 3 = 4 - 3 = 1$.
   Donc l'image de 2 par la fonction f est 1.
2) a) Graphiquement, l'antécédent de $-0{,}5$ par la fonction f est 1,25.
   b) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = -0{,}5 &\iff 2x - 3 = -0{,}5 \\ &\iff 2x = 2{,}5 \\ &\iff x = 1{,}25. \end{aligned}$$

   Donc l'antécédent de $-0{,}5$ par la fonction f est 1,25.

Exercice 2 :



1) a) Graphiquement, l'image de 5 par la fonction f est -12.
   b) On a : $f(5) = 5^2 - 6 \times 5 - 7 = 25 - 30 - 7 = -12$.
   Donc l'image de 5 par la fonction f est -12.
2) a) Graphiquement, les antécédents de 0 par la fonction f sont -1 et 7.
   b) On a : $a = 1$; $b = -6$ et $c = -7$ d'où :
   - $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{2 \times 1} = 3$;
   - $\beta = f(\alpha) = f(3) = 3^2 - 6 \times 3 - 7 = 9 - 18 - 7 = -16$.

   Donc, pour tout x réel, on a : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = (x - 3)^2 - 16$.

Remarque :

Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}(x-3)^2-16 &= x^2-6x+9-16\\ &= x^2-6x-7\\ &= f(x).\end{aligned}$$

c) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}f(x)=0 &\iff (x-3)^2-16=0\\ &\iff (x-3)^2-4^2=0\\ &\iff (x-3-4)(x-3+4)=0\\ &\iff (x-7)(x+1)=0\\ &\iff x-7=0 \text{ ou } x+1=0\\ &\iff x=7 \text{ ou } x=-1.\end{aligned}$$

Donc les antécédents de 0 par la fonction f sont -1 et 7.

3) Le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est le suivant :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f		$\searrow$	-16	$\nearrow$	

4) Pour tout x réel, on a :

- $x-7=0 \iff x=7$;
- $x+1=0 \iff x=-1$

Donc le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est le suivant :

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5) a) Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x)=2$ sont $-1{,}2$ et $7{,}2$.

b) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}f(x)=2 &\iff (x-3)^2-16=2\\ &\iff (x-3)^2-18=0\\ &\iff (x-3)^2-\left(\sqrt{18}\right)^2=0\\ &\iff (x-3)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2=0\\ &\iff \left(x-3-3\sqrt{2}\right)\left(x-3+3\sqrt{2}\right)=0\\ &\iff x-3-3\sqrt{2}=0 \text{ ou } x-3+3\sqrt{2}=0\\ &\iff x=3+3\sqrt{2} \text{ ou } x=3-3\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\left\{3-3\sqrt{2}\,;3+3\sqrt{2}\right\}$.

Exercice 3 :

1) Voici ces deux algorithmes écrits en Python :

Algorithme 1	Algorithme 2

`def algo1(x):`
`    a=x**2`
`    b=-6*x`
`    c=a+b+8`
`    return(c)`
	`def algo2(x):`
	`    a=x-3`
	`    b=a**2`
	`    c=b-1`
	`    return(c)`

2) Il semble que ces deux algorithmes donnent le même résultat.

Algorithme 1	Algorithme 2
$a = x^2$ $b = -6x$ $c = x^2 - 6x + 8$	$a = x - 3$ $b = (x-3)^2$ $c = (x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 9 - 1 = x^2 - 6x + 8$

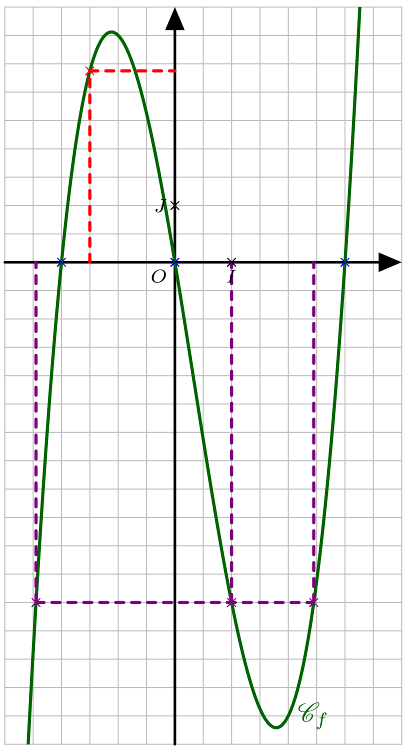
On retrouve donc bien le même résultat pour les deux algorithmes.

3) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}
(x-3)^2 - 1 = 48 &\iff (x-3)^2 - 49 = 0 \\
&\iff (x-3)^2 - 7^2 = 0 \\
&\iff (x-3-7)(x-3+7) = 0 \\
&\iff (x-10)(x+4) = 0 \\
&\iff x - 10 = 0 \text{ ou } x + 4 = 0 \\
&\iff x = 10 \text{ ou } x = -4.
\end{aligned}$$

On doit entrer -4 ou 10 dans ce programme pour obtenir 48 comme résultat.

Exercice 4 :



1) a) Graphiquement, l'image de $-\dfrac{3}{2}$ par la fonction f est environ 3,4.

b) On a :

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{3}{2}\right) &= \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= -\frac{27}{8} - \frac{9}{4} + 9 \\ &= -\frac{27}{8} - \frac{18}{8} + \frac{72}{8} \\ &= \frac{27}{8} \\ &= 3{,}375. \end{aligned}$$

Donc l'image de $-\frac{3}{2}$ par la fonction f est $\frac{27}{8}$.

2) a) Graphiquement, les antécédents de 0 par la fonction f sont -2 ; 0 et 3.

b) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} (x-3)(x+2) &= x^2 + 2x - 3x - 6 \\ &= x^2 - x - 6. \end{aligned}$$

Donc, pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 - 6x \\ &= x\left(x^2 - x - 6\right) \\ &= x(x-3)(x+2). \end{aligned}$$

c) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x(x-3)(x+2) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \text{ ou } x + 2 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } x = -2. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S} = \{-2\,;0\,;3\}$.

3) Pour tout x réel, on a : $f(x) = x(x-3)(x+2)$.

Pour tout x réel, on a :

- $x - 3 = 0 \iff x = 3$;
- $x + 2 = 0 \iff x = -2$.

Donc le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est le suivant :

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

4) a) Graphiquement, les antécédents de -6 par la fonction f sont $-2{,}5$; 1 et 2,5.

b) Pour tout x réel, on a :

- $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$;
- $-6x + 6 = -6(x-1)$.

c) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = -6 &\iff x^3 - x^2 - 6x = -6 \\ &\iff x^3 - x^2 - 6x + 6 = 0 \\ &\iff x^2(x-1) - 6(x-1) = 0 \\ &\iff (x-1)\left(x^2-6\right) = 0 \\ &\iff x - 1 = 0 \text{ ou } x^2 - 6 = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x^2 = 6 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = -\sqrt{6} \text{ ou } x = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{6}\,;1\,;\sqrt{6}\right\}$.

Remarque :
On a : $\sqrt{6} \approx 2{,}45$ à 10^{-2} près.

Exercice 5 :

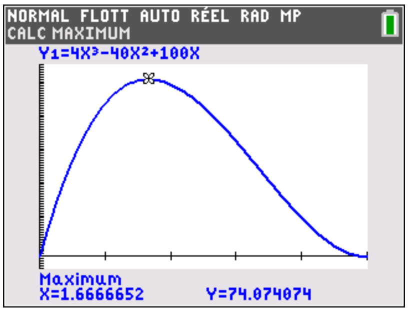
1) • Comme x est une longueur, on a : $x \geqslant 0$.
   • Comme on enlève x cm de chaque côté, on doit avoir : $2x \leqslant 10$ c'est-à-dire $x \leqslant 5$.

   Donc $x \in [0\,;5]$.

2) Pour tout x de $[0\,;5]$, on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(x) &= (10-2x)\times(10-2x)\times x \\ &= \left(100-40x+4x^2\right)\times x \\ &= 100x-40x^2+4x^3 \\ &= 4x^3-40x^2+100x.\end{aligned}$$

3) À l'aide de la calculatrice, on trouve que le volume maximal est de 74,1 cm^3 pour une valeur $x \approx 1{,}7$ cm.



Exercice 6 :

a) $x < 10$

b) $\dfrac{1}{9} < x < 3$

c) $x \in \left]-2\sqrt{5};-\sqrt{5}\right[\cup\left]\sqrt{5};2\sqrt{5}\right[$.

d) $x \in]-15;0[$

e) $x \in \mathbb{R}$.

f) $x \in \left]-\infty;-\dfrac{1}{8}\right[\cup]4;+\infty[$.

VI Fiche 6 – Équations

Exercice 1 :

a) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} 2x+3=-3x+7 &\iff 5x+3=7 \\ &\iff 5x=4 \\ &\iff x=\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\left\{\frac{4}{5}\right\}$.

b) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} -4x+1=9 &\iff -4x=8 \\ &\iff x=-2. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\{-2\}$.

c) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} -x=x+16 &\iff -2x=16 \\ &\iff x=-8. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\{-8\}$.

d) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} (-x-4)(-x+7)=0 &\iff -x-4=0 \text{ ou } -x+7=0 \\ &\iff x=-4 \text{ ou } x=7. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\{-4\,;7\}$.

e) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} 9(-4x+1)(6x-36)=0 &\iff (-4x+1)(6x-36)=0 \\ &\iff -4x+1=0 \text{ ou } 6x-36=0 \\ &\iff 4x=1 \text{ ou } 6x=36 \\ &\iff x=\frac{1}{4} \text{ ou } x=6. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{4}\,;6\right\}$.

f) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} -x(x+16)(2-5x)=0 &\iff -x=0 \text{ ou } x+16=0 \text{ ou } 2-5x=0 \\ &\iff x=0 \text{ ou } x=-16 \text{ ou } 5x=2 \\ &\iff x=0 \text{ ou } x=-16 \text{ ou } x=\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\left\{-16\,;0\,;\frac{2}{5}\right\}$.

g) Pour tout x réel, on a : $x-2=0 \iff x=2$ Valeur interdite.
Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{5-8x}{x-2}=3 &\iff 5-8x=3(x-2) \\ &\iff 5-8x=3x-6 \\ &\iff 5-11x=-6 \\ &\iff -11x=-11 \\ &\iff x=1. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\{1\}$.

h) Pour tout x réel, on a : $8-5x=0 \iff -5x=-8 \iff x=\dfrac{8}{5}$ Valeur interdite.

Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{8}{5}\right\}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{-3x-1}{8-5x}=0 &\iff -3x-1=0\\ &\iff -3x=1\\ &\iff x=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.

i) Pour tout x réel, on a :

- $2x+4=0 \iff 2x=-4 \iff x=-2$ Valeur interdite ;
- $x-4=0 \iff x=4$ Valeur interdite.

Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-2\,;4\}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{-2+10x}{2x+4}=\frac{5x}{x-4} &\iff (-2+10x)(x-4)=5x(2x+4)\\ &\iff -2x+8+\cancel{10x^2}-40x=\cancel{10x^2}+20x\\ &\iff 8-42x=20x\\ &\iff 8=62x\\ &\iff x=\frac{4}{31}.\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\left\{\dfrac{4}{31}\right\}$.

Exercice 2 :

a) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}(5x-1)(x-9)-(x-9)(2x-1)=0 &\iff (x-9)(5x-1-(2x-1))=0\\ &\iff (x-9)(5x-1-2x+1)=0\\ &\iff 3x(x-9)=0\\ &\iff 3x=0 \text{ ou } x-9=0\\ &\iff x=0 \text{ ou } x=9.\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\{0\,;9\}$.

b) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}2(x-1)(x-3{,}5)=4x^2-28x+49 &\iff 2(x-1)(x-3{,}5)=(2x)^2-2\times 2x\times 7+7^2\\ &\iff 2(x-1)(x-3{,}5)=(2x-7)^2\\ &\iff (x-1)(2x-7)-(2x-7)^2=0\\ &\iff (2x-7)(x-1-(2x-7))=0\\ &\iff (2x-7)(x-1-2x+7)=0\\ &\iff (2x-7)(-x+6)=0\\ &\iff 2x-7=0 \text{ ou } -x+6=0\\ &\iff 2x=7 \text{ ou } x=6\\ &\iff x=\frac{7}{2} \text{ ou } x=6.\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\left\{\dfrac{7}{2}\,;6\right\}$.

c) Pour tout x réel, on a : $x+1=0 \iff x=-1$ Valeur interdite.
Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, on a :

$$\begin{aligned} x+1=\frac{9}{x+1} &\iff (x+1)^2=9 \\ &\iff (x+1)^2-9=0 \\ &\iff (x+1)^2-3^2=0 \\ &\iff (x+1-3)(x+1+3)=0 \\ &\iff (x-2)(x+4)=0 \\ &\iff x-2=0 \text{ ou } x+4=0 \\ &\iff x=2 \text{ ou } x=-4. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\{-4\,;2\}$.

d) Pour tout x réel, on a : $x-5=0 \iff x=5$ Valeur interdite.
Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{0\,;5\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{x-5}=\frac{3x-4}{x} &\iff x(3x-1)=(x-5)(3x-4) \\ &\iff \cancel{3x^2}-x=\cancel{3x^2}-4x-15x+20 \\ &\iff -x=-19x+20 \\ &\iff 18x=20 \\ &\iff x=\frac{10}{9}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\left\{\frac{10}{9}\right\}$.

e) Pour tout x réel, on a : $2x-3=0 \iff 2x=3 \iff x=\frac{3}{2}$ Valeur interdite.
Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{16x^2-25}{2x-3}=\frac{4x-5}{3} &\iff 3\left(16x^2-25\right)=(2x-3)(4x-5) \\ &\iff 3\left((4x)^2-5^2\right)-(2x-3)(4x-5)=0 \\ &\iff 3(4x-5)(4x+5)-(2x-3)(4x-5)=0 \\ &\iff (4x-5)(3(4x+5)-(2x-3))=0 \\ &\iff (4x-5)(12x+15-2x+3)=0 \\ &\iff (4x-5)(10x+18)=0 \\ &\iff 4x-5=0 \text{ ou } 10x+18=0 \\ &\iff 4x=5 \text{ ou } 10x=-18 \\ &\iff x=\frac{5}{4} \text{ ou } x=-\frac{9}{5}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\left\{-\frac{9}{5}\,;\frac{5}{4}\right\}$.

f) Pour tout x réel, on a : $(x-3)^2=0 \iff x-3=0 \iff x=3$ Valeur interdite.
Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{x^2-3x}{(x-3)^2}=4 &\iff x^2-3x=4(x-3)^2 \\ &\iff x(x-3)-4(x-3)^2=0 \\ &\iff (x-3)(x-4(x-3))=0 \\ &\iff (x-3)(x-4x+12)=0 \\ &\iff (x-3)(-3x+12)=0 \\ &\iff x-3=0 \text{ ou } -3x+12=0 \\ &\iff x=3 \text{ ou } -3x=-12 \\ &\iff x=3 \text{ ou } x=4. \end{aligned}$$

Or 3 n'appartient pas à l'ensemble de définition de l'équation donc $\mathscr{S}=\{4\}$.

Exercice 3 :

1) a) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} x^2+2x &= x^2+2\times x\times 1+1^2-1^2 \\ &= (x+1)^2-1. \end{aligned}$$

b) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} x^2+2x-8=0 &\iff (x+1)^2-1-8=0 \\ &\iff (x+1)^2-9=0 \end{aligned}$$

c) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} x^2+2x-8=0 &\iff (x+1)^2-9=0 \\ &\iff (x+1)^2-3^2=0 \\ &\iff (x+1-3)(x+1+3)=0 \\ &\iff (x-2)(x+4)=0 \\ &\iff x-2=0 \text{ ou } x+4=0 \\ &\iff x=2 \text{ ou } x=-4 \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\{-4\,;2\}$.

2) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} x^2+12x+11=0 &\iff x^2+2\times x\times 6+6^2-6^2+11=0 \\ &\iff (x+6)^2-36+11=0 \\ &\iff (x+6)^2-25=0 \\ &\iff (x+6)^2-5^2=0 \\ &\iff (x+6-5)(x+6+5)=0 \\ &\iff (x+1)(x+11)=0 \\ &\iff x+1=0 \text{ ou } x+11=0 \\ &\iff x=-1 \text{ ou } x=-11 \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\{-11\,;-1\}$.

VII Fiche 7 – Inéquations

Exercice 1 :

a) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} 6x+7>4x+8 &\iff 2x+7>8 \\ &\iff 2x>1 \\ &\iff x>\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

b) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} x+1\geqslant 9x+25 &\iff -8x+1\geqslant 25 \\ &\iff -8x\geqslant 24 \\ &\iff x\leqslant -3. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=]-\infty\,;-3]$.

c) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} -7\leqslant 4x+9 &\iff -16\leqslant 4x \\ &\iff -4\leqslant x. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}=[-4\,;+\infty[$.

d) Pour tout x réel, on a :

- $x-8=0 \iff x=8$;
- $-1-10x=0 \iff -10x=1 \iff x=-\dfrac{1}{10}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{10}$		8		$+\infty$
$x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
$-1-10x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-8)(-1-10x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\mathscr{S}=\left]-\infty\,;-\frac{1}{10}\right]\cup[8\,;+\infty[$.

e) Pour tout x réel, on a :

- $x-1=0 \iff x=1$;
- $9x+27=0 \iff 9x=-27 \iff x=-3$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$9x+27$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)(9x+27)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathscr{S}=]-\infty\,;-3[\cup]1\,;+\infty[$.

f) Pour tout x réel, on a :

- $-7x=0 \iff x=0$;
- $x+9=0 \iff x=-9$;
- $2-x=0 \iff x=2$.

x	$-\infty$		-9		0		2		$+\infty$
$-7x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x\,+\,9$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2\,-\,x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$-7x\,(x+9)\,(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathscr{S} = [-9\,;0] \cup [2\,;+\infty[$.

g) Pour tout x réel, on a :

- $3x+9=0 \iff 3x=-9 \iff x=-3\,;$
- $x-2=0 \iff x=2$ Valeur interdite.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$3x+9$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{3x+9}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Donc $\mathscr{S} = [-3\,;2[$.

h) Pour tout x réel, on a :

- $-2x+3=0 \iff -2x=-3 \iff x=\dfrac{3}{2}\,;$
- $x+4=0 \iff x=-4$ Valeur interdite.

x	$-\infty$		-4		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-2x+3}{x-4}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc $\mathscr{S} = \left]-4\,;\dfrac{3}{2}\right]$.

i) Pour tout x réel, on a :

- $-6x+7=0 \iff -6x=-7 \iff x=\dfrac{7}{6}\,;$
- $1-x=0 \iff x=1$ Valeur interdite.

x	$-\infty$		1		$\dfrac{7}{6}$		$+\infty$
$-6x+7$		$+$		$+$	0	$-$	
$1-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{-6x+7}{1-x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\mathscr{S} =]-\infty\,;1[\cup \left]\dfrac{7}{6}\,;+\infty\right[$.

Exercice 2 :

a) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}(3x+2)^2-(3x+2)(5x+1)\leqslant 0 &\iff (3x+2)(3x+2-(5x+1))\leqslant 0\\ &\iff (3x+2)(3x+2-5x-1)\leqslant 0\\ &\iff (3x+2)(-2x+1)\leqslant 0.\end{aligned}$$

Pour tout x réel, on a :

- $3x+2=0 \iff 3x=-2 \iff x=-\dfrac{2}{3}$;
- $-2x+1=0 \iff -2x=-1 \iff x=\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x+2)(-2x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\mathscr{S}=\left]-\infty\,;-\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

b) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}(2-x)^2>36 &\iff (2-x)^2-36>0\\ &\iff (2-x)^2-6^2>0\\ &\iff (2-x-6)(2-x+6)>0\\ &\iff (-x-4)(8-x)>0\end{aligned}$$

Pour tout x réel, on a :

- $-x-4=0 \iff x=-4$;
- $8-x=0 \iff x=8$.

x	$-\infty$		-4		8		$+\infty$
$-4-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$8-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(-x-4)(8-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathscr{S}=]-\infty\,;-4[\cup]8\,;+\infty[$.

c) Pour tout x réel, on a : $x+3=0 \iff x=-3$ Valeur interdite.
Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$, on a :

$$\begin{aligned}5+\frac{2}{x+3}\leqslant 0 &\iff \frac{5(x+3)}{x+3}+\frac{2}{x+3}\leqslant 0\\ &\iff \frac{5x+15}{x+3}+\frac{2}{x+3}\leqslant 0\\ &\iff \frac{5x+17}{x+3}\leqslant 0.\end{aligned}$$

Pour tout x réel, on a : $5x+17=0 \iff 5x=-17 \iff x=-\dfrac{17}{5}$.

x	$-\infty$		$-\frac{17}{5}$		-3		$+\infty$
$5x+17$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{5x+17}{x+3}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Donc $\mathscr{S} = \left[-\dfrac{17}{5}\,;-3\right[$.

d) Pour tout x réel, on a :

- $2x-1=0 \iff 2x=1 \iff x=\dfrac{1}{2}$ Valeur interdire ;
- $-3x+15=0 \iff -3x=-15 \iff x=5$ Valeur interdite.

Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\,;5\right\}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{3}{2x-1} \geqslant \frac{2}{-3x+15} &\iff \frac{3}{2x-1}-\frac{2}{-3x+15} \geqslant 0\\ &\iff \frac{3\,(-3x+15)}{(-3x+15)\,(2x-1)}-\frac{2\,(2x-1)}{(-3x+15)\,(2x-1)} \geqslant 0\\ &\iff \frac{-9x+45}{(-3x+15)\,(2x-1)}-\frac{4x-2}{(-3x+15)\,(2x-1)} \geqslant 0\\ &\iff \frac{-9x+45-4x+2}{(-3x+15)\,(2x-1)} \geqslant 0\\ &\iff \frac{-13x+47}{(-3x+15)\,(2x-1)} \geqslant 0.\end{aligned}$$

Pour tout x réel, on a : $-13x+47=0 \iff -13x=-47 \iff x=\dfrac{47}{13}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{47}{13}$		5		$+\infty$
$-13x+47$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$-3x+15$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{-13x+47}{(-3x+15)\,(2x-1)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Donc $\mathscr{S} = \left]\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{47}{13}\right] \cup \left]5\,;+\infty\right[$.

Exercice 3 :

1) Pour tous réels x et y tels que $x+y=20$, on a : $y=20-x$.

2) Pour tous réels x et y tels que $x+y=20$, on a :

$$\begin{aligned}P \geqslant 91 &\iff xy \geqslant 91\\ &\iff x\,(20-x) \geqslant 91\\ &\iff 20x-x^2 \geqslant 91\\ &\iff -x^2+20x-91 \geqslant 0.\end{aligned}$$

De plus, pour tout x réel, on a : $(7-x)\,(x-13)=7x-91-x^2+13x=-x^2+20x-91$.
Donc, pour tous réels x et y tels que $x+y=20$, on a :

$$P \geqslant 91 \iff (7-x)\,(x-13) \geqslant 0.$$

3) Pour tout x réel, on a :

- $7-x=0 \iff x=7$;
- $x-13=0 \iff x=13$.

x	$-\infty$		7		13		$+\infty$
$7-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-13$		$-$		$-$	0	$+$	
$(7-x)\,(x-13)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\mathscr{S} = [7\,;13]$.

Ainsi les réels x et y tels que $\begin{cases} x+y=20 \\ xy \geqslant 91 \end{cases}$ sont les réels tels que $\begin{cases} x \in [7\,;13] \\ y = 20-x \end{cases}$.

Exercice 4 :

a) • Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} x^2-16=0 &\iff x^2-4^2=0 \\ &\iff (x+4)(x-4)=0 \\ &\iff x+4=0 \text{ ou } x-4=0 \\ &\iff x=-4 \text{ ou } x=4. \end{aligned}$$

• Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} 9-4x^2=0 &\iff 3^2-(2x)^2=0 \\ &\iff (3-2x)(3+2x)=0 \\ &\iff 3-2x=0 \text{ ou } 3+2x=0 \\ &\iff -2x=-3 \text{ ou } 2x=-3 \\ &\iff x=\frac{3}{2} \text{ ou } x=-\frac{3}{2} \quad \text{Valeurs interdites.} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-4		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$3+2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{x^2-16}{9-4x^2}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc $\mathscr{S} = \left[-4\,;-\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}\,;4\right]$.

b) Pour tout x réel, on a :

• $x+1=0 \iff x=-1$ Valeur interdite ;

• $2x+3=0 \iff 2x=-3 \iff x=-\frac{3}{2}$ Valeur interdite.

Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\,;-1\right\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{x+1} \leqslant \frac{x+1}{2x+3} &\iff \frac{2x+3}{x+1} - \frac{x+1}{2x+3} \leqslant 0 \\ &\iff \frac{(2x+3)^2}{(2x+3)(x+1)} - \frac{(x+1)^2}{(2x+3)(x+1)} \leqslant 0 \\ &\iff \frac{(2x+3)^2-(x+1)^2}{(2x+3)(x+1)} \leqslant 0 \\ &\iff \frac{(2x+3-(x+1))(2x+3+x+1)}{(2x+3)(x+1)} \leqslant 0 \\ &\iff \frac{(2x+3-x-1)(3x+4)}{(2x+3)(x+1)} \leqslant 0 \\ &\iff \frac{(x+2)(3x+4)}{(2x+3)(x+1)} \leqslant 0. \end{aligned}$$

Pour tout x réel, on a :

• $x+2=0 \iff x=-2$;

• $3x+4=0 \iff 3x=-4 \iff x=-\frac{4}{3}$.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{4}{3}$		-1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$3x+4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{(x+2)(3x+4)}{(2x+3)(x+1)}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Donc $\mathscr{S} = \left[-2\,;-\dfrac{3}{2}\right[\cup \left[-\dfrac{4}{3}\,;-1\right[$.

VIII Fiche 8 – Équations de droites

Exercice 1 :

1) • On a : $m_{(AB)} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{4-2}{4+3} = \dfrac{2}{7}$ et $p_{(AB)} = y_B - mx_B = 4 - \dfrac{2}{7} \times 4 = \dfrac{28}{7} - \dfrac{8}{7} = \dfrac{20}{7}$.
Donc : $(AB) : y = \dfrac{2}{7}x + \dfrac{20}{7}$.

• On a : $m_{(AC)} = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{-2-2}{4+3} = -\dfrac{4}{7}$ et $p_{(AC)} = y_C - mx_C = -2 + \dfrac{4}{7} \times 4 = -\dfrac{14}{7} + \dfrac{16}{7} = \dfrac{2}{7}$.
Donc : $(AC) : y = -\dfrac{4}{7}x + \dfrac{2}{7}$.

• Les points B et C ont la même abscisse 4 ainsi la droite (BC) est parallèle à l'axe des ordonnées.
Donc : $(BC) : x = 4$.

2) a) Soit M le point d'intersection de (AB) avec l'axe des abscisses ainsi $M\,(x\,;0)$ où x est un réel.
Comme $M \in (AB)$, on a : $y_M = \dfrac{2}{7}x_M + \dfrac{20}{7}$ c'est-à-dire $0 = \dfrac{2}{7}x + \dfrac{20}{7}$.
Or

$$\begin{aligned} 0 = \frac{2}{7}x + \frac{20}{7} &\iff \frac{2}{7}x = -\frac{20}{7} \\ &\iff x = -\frac{20}{7} \times \frac{7}{2} \\ &\iff x = -10. \end{aligned}$$

Donc $M\,(-10\,;0)$.
Soit N le point d'intersection de (AB) avec l'axe des ordonnées ainsi $N\,(0\,;y)$ où y est un réel.
Comme $N \in (AB)$, on a :

$$\begin{aligned} y_N = \frac{2}{7}x_N + \frac{20}{7} \text{ donc } y &= \frac{2}{7} \times 0 + \frac{20}{7} \\ \text{donc } y &= \frac{20}{7}. \end{aligned}$$

Donc $N\left(0\,;\dfrac{20}{7}\right)$.

b) Soit P le point de (AB) d'ordonnée 5 ainsi $P\,(x\,;5)$ où x est un réel.
Comme $P \in (AB)$, on a : $y_P = \dfrac{2}{7}x_P + \dfrac{20}{7}$ c'est-à-dire $5 = \dfrac{2}{7}x + \dfrac{20}{7}$.
Or

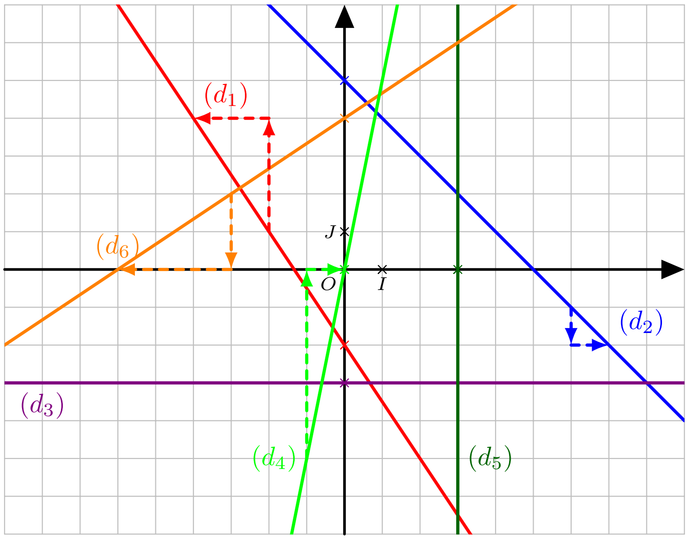
$$\begin{aligned} 5 = \frac{2}{7}x + \frac{20}{7} &\iff \frac{2}{7}x = 5 - \frac{20}{7} \\ &\iff \frac{2}{7}x = \frac{15}{7} \\ &\iff x = \frac{15}{7} \times \frac{7}{2} \\ &\iff x = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Donc $P\left(\dfrac{15}{2}\,;5\right)$.

3) a) On a : $-\dfrac{4}{7}x_D + \dfrac{2}{7} = -\dfrac{4}{7} \times 1 + \dfrac{2}{7} = -\dfrac{4}{7} + \dfrac{2}{7} = -\dfrac{2}{7} \neq y_D$ donc $D \notin (AC)$.

b) La droite (Δ) est parallèle à la droite (AC) donc ces deux droites ont le même coefficient directeur ainsi $(\Delta) : y = -\dfrac{4}{7}x + p$ où p est un réel.
De plus, $D \in (\Delta)$ donc : $p = y_D + \dfrac{4}{7}x_D = -4 + \dfrac{4}{7} \times 1 = -\dfrac{28}{7} + \dfrac{4}{7} = -\dfrac{24}{7}$.
Donc $(\Delta) : y = -\dfrac{4}{7}x - \dfrac{24}{7}$.

Exercice 2 :



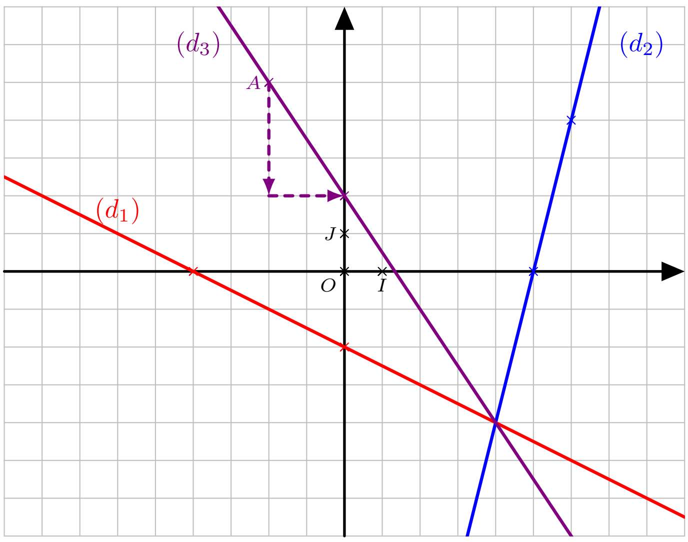
- On a : $m_1 = \dfrac{+3}{-2} = -\dfrac{3}{2}$ et $p_1 = -2$ donc $(d_1) : y = -\dfrac{3}{2}x - 2$.
- On a : $m_2 = \dfrac{-1}{+1} = -1$ et $p_2 = 5$ donc $(d_2) : y = -x + 5$.
- On a : $m_3 = 0$ et $p_2 = -3$ donc $(d_3) : y = -3$.
- On a : $m_4 = \dfrac{+5}{+1} = 5$ et $p_4 = 0$ donc $(d_4) : y = 5x$.
- On a : (d_5) parallèle à l'axe des ordonnées donc $(d_5) : x = 3$.
- On a : $m_6 = \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$ et $p_6 = 4$ donc $(d_6) : y = \dfrac{2}{3}x + 4$.

Exercice 3 :

1)

$(d_1) : y = -0{,}5x - 2$		
x	0	-4
y	-2	0

$(d_2) : y = 4x - 20$		
x	5	6
y	0	4



2) a) Voir figure ci-dessus.

b) On a : $m = -\dfrac{3}{2}$ et $p = y_A - mx_A = 5 + \dfrac{3}{2} \times (-2) = 5 - 3 = 2$.

Donc $(d_3) : y = -\dfrac{3}{2}x + 2$.

3) a) Le coefficient directeur de (d_1) est : $m = -0{,}5$ et le coefficient directeur de (d_2) est : $m' = 4$.
Ainsi $m \neq m'$ donc (d_1) et (d_2) sont sécantes.

b) Pour tous réels x et y, on a :

$$\begin{cases} y = -0{,}5x - 2 \\ y = 4x - 20 \end{cases} \iff \begin{cases} -0{,}5x - 2 = 4x - 20 \\ y = 4x - 20 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -4{,}5x - 2 = -20 \\ y = 4x - 20 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -4{,}5x = -18 \\ y = 4x - 20 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \times 4 - 20 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 4 \\ y = -4 \end{cases}.$$

Donc $M\,(4\,;-4)$.

c) On a : $-\dfrac{3}{2}x_M + 2 = -\dfrac{3}{2} \times 4 + 2 = -6 + 2 = -4 = y_M$ donc $M \in (d_3)$.
Donc (d_1), (d_2) et (d_3) sont concourantes.

Exercice 4 :
On a : Δ parallèle à d_3 donc ces deux droites ont le même coefficient directeur ainsi : $\Delta : y = 4x + p$ où p est un réel.

Cherchons le point d'intersection M des droites d_1 et d_2.
Pour tous réels x et y, on a :

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = -5x - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x + 5 \\ -2x + 5 = -5x - 4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = -2x + 5 \\ 3x + 5 = -4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = -2x + 5 \\ 3x = -9 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = -2 \times (-3) + 5 \\ x = -3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = 11 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Donc $M\,(-3\,;11)$.
Comme Δ, d_1 et d_2 sont concourantes, cela signifie que $M \in \Delta$ d'où :

$$p = y_M - 4x_M = 11 - 4 \times (-3) = 11 + 12 = 23.$$

Donc $\Delta : y = 4x + 23$.

Exercice 5 :

1) Affirmation fausse :
On a : $5x_C + 3 = 5 \times (-2) + 3 = -10 + 3 = -7 \neq y_C$ donc $C \notin \Delta$.
2) Affirmation fausse :
Le coefficient directeur de Δ est $m = 5$ et le coefficient directeur de Δ' est $m' = 3$ ainsi $m \neq m'$ donc Δ et Δ' sont sécantes.
3) Affirmation vraie :
   - On a : $5x_D + 3 = 5 \times (-2{,}5) + 3 = -12{,}5 + 3 = -9{,}5 = y_D$ donc $D \in \Delta$.
   - On a : $3x_D - 2 = 3 \times (-2{,}5) - 2 = -7{,}5 - 2 = -9{,}5 = y_D$ donc $D \in \Delta'$.

4) Affirmation fausse :

On a : $m_d = \dfrac{+2}{+1} = 2$.

5) Affirmation vraie :

On a : $m_{d'} = 0$ et $p_{d'} = 2$ donc $d' : y = 2$.

6) Affirmation vraie :

On a : $m_d = 2$ et $p_d = -3$ donc $d : y = 2x - 3$.

7) Affirmation fausse : Se reporter à la question 5.

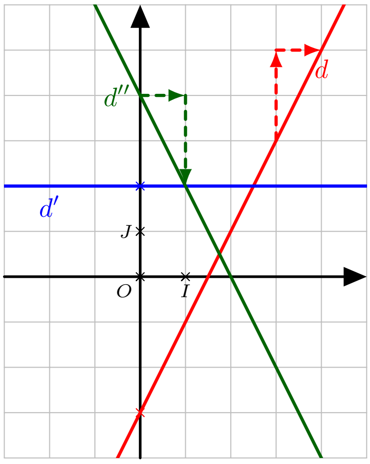
8) Affirmation fausse :

La droite d' ne passe pas par l'origine du repère, ce n'est donc pas la représentation graphique d'une fonction linéaire.

9) Affirmation vraie.

10) Affirmation fausse :

On a : $m_{d''} = \dfrac{-2}{+1} = -2$.



Exercice 6 :

1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (AB) &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \\ &\Longleftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x+4 & 6 \\ y-3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow -4(x+4) - 6(y-3) = 0 \\ &\Longleftrightarrow -4x - 6y + 2 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (AB) est $2x + 3y - 1 = 0$.

2) Pour tout point M de coordonnées $(x;y)$ du plan,

$$\begin{aligned} M(x;y) \in d_1 &\Longleftrightarrow \overrightarrow{CM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\Longleftrightarrow \det\left(\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{u}\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 3 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow x - 3 - 3(y-2) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x - 3y + 3 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de d_1 est $x - 3y + 3 = 0$.

3) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_2, donc une équation cartésienne de d_2 est de la forme $4x+6y+c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} C(3;2) \in d_2 &\Longleftrightarrow 4x_C + 6y_C + c = 0 \\ &\Longleftrightarrow 4 \times 3 + 6 \times 2 + c = 0 \\ &\Longleftrightarrow c = -24 \end{aligned}$$

D'où $d_2 : 4x + 6y - 24 = 0$.
Une équation cartésienne de d_2 est : $2x + 3y - 12 = 0$.

IX Fiche 9 – Géométrie analytique et vecteurs

Exercice 1 :

Dans un repère orthonormé $(O\,;I,J)$, on donne les points $A\,(-2\,;3)$; $B\left(\frac{1}{2}\,;-1\right)$ et $C\,(5\,;1)$.

1) On a :

$$\begin{aligned}AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2\\ &= \left(\frac{1}{2}+2\right)^2 + (-1-3)^2\\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (-4)^2\\ &= \frac{25}{4} + 16\\ &= \frac{25}{4} + \frac{64}{4}\\ &= \frac{89}{4}.\end{aligned}$$

Donc $AB = \sqrt{\frac{89}{4}} = \frac{\sqrt{89}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{89}}{2}$.

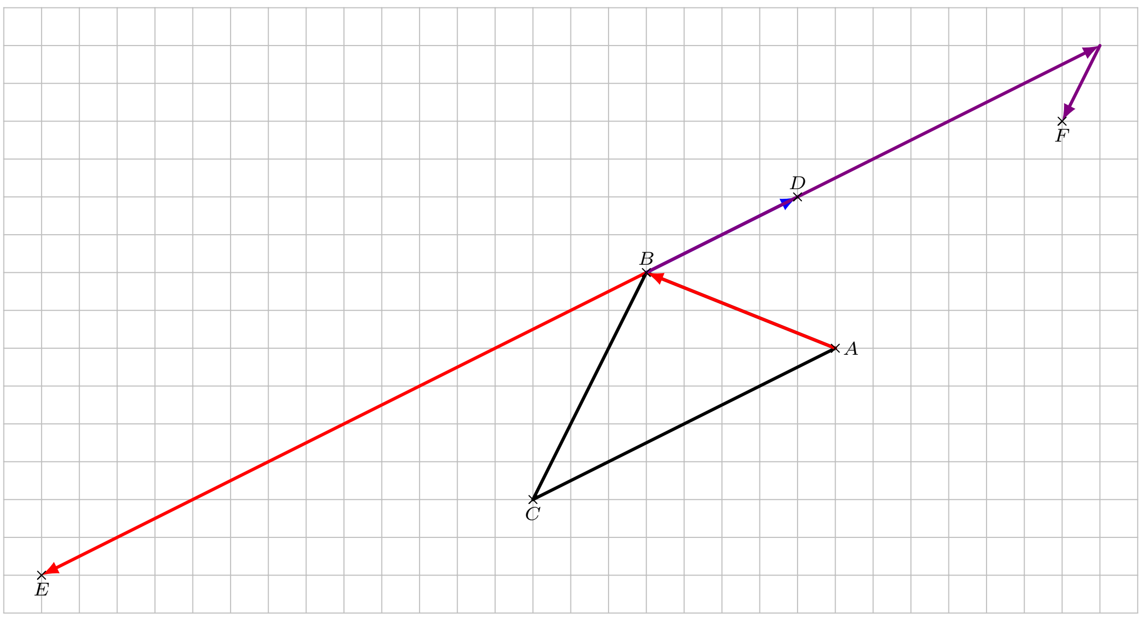
2) On a : $\begin{cases} x_E = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{\frac{1}{2}+5}{2} = \dfrac{\frac{11}{2}}{2} = \dfrac{11}{4} \\ y_E = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{-1+1}{2} = 0 \end{cases}$. Donc $E\left(\frac{11}{4}\,;0\right)$.

3) On a : D symétrique de B par rapport à A c'est-à-dire A milieu de $[DB]$.
On a :

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{x_D + x_B}{2} \\ y_A = \dfrac{y_D + y_B}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} -2 = \dfrac{x_D + \frac{1}{2}}{2} \\ 3 = \dfrac{y_D - 1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} -4 = x_D + \dfrac{1}{2} \\ 6 = y_D - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_D = -\dfrac{9}{2} \\ y_D = 7 \end{cases}.$$

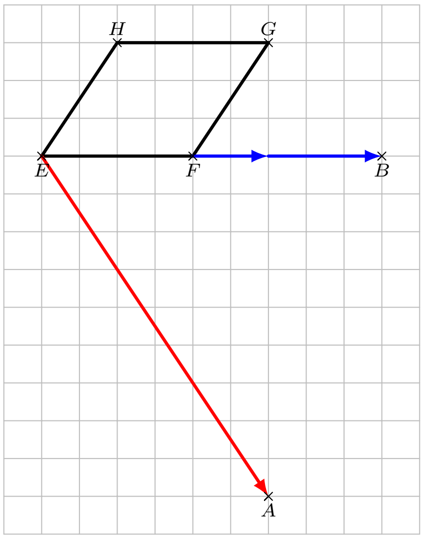
Donc $D\left(-\frac{9}{2}\,;7\right)$.

Exercice 2 :



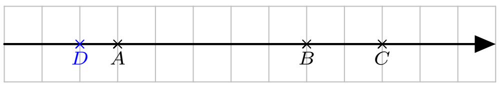
On a : $\overrightarrow{FB} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ d'où $\overrightarrow{BF} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Exercice 3 :



Exercice 4 :

1)



2) On a :

a) $\overrightarrow{AB} = \dfrac{5}{7}\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{BC} = -\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BA}$; c) $\overrightarrow{CA} = -\dfrac{7}{2}\overrightarrow{BC}$.

Exercice 5 :

a) On a : $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 2-2 \\ 3+5 \end{pmatrix}$ donc $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

b) On a : $-3\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \times 2 \\ -3 \times 3 \end{pmatrix}$ donc $-3\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \end{pmatrix}$.

c) On a : $-3\vec{u} + 2\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \times 2 + 2 \times (-2) \\ -3 \times 3 + 2 \times 5 \end{pmatrix}$ donc $-3\vec{u} + 2\vec{v} \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 :

1) On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 9+1 \\ -3+2 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 7-1 \\ 1-2 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a : $10 \times (-1) - (-1) \times 6 = -10 + 6 = -4 \neq 0$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
Donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

2) On a : $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1+1 \\ 2+2 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 4-7 \\ -5-1 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

On a : $2 \times (-6) - 4 \times (-3) = -12 + 12 = 0$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.
Donc les droites (AC) et (DE) sont parallèles.

Exercice 7 :

1) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5+1\\1+2\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2+1\\-1+2\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

   On a : $6\times 1-3\times 3=6-9=-3\neq 0$.
   Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
   Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5+1\\-3+4\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}11+1\\-2+4\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}12\\2\end{pmatrix}$.

   On a : $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.
   Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
   Donc les points A, B et C sont alignés.

Exercice 8 :
Comme $MNRS$ est un parallélogramme, on a : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{SR}$.
On a : $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1+3\\3+2\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SR}\begin{pmatrix}4-x_S\\2-y_S\end{pmatrix}$.
Ainsi, on a :

$$\begin{cases}2=4-x_S\\5=2-y_S\end{cases}\iff\begin{cases}-2=-x_S\\3=-y_S\end{cases}\iff\begin{cases}x_S=2\\y_S=-3\end{cases}.$$

Donc $S\,(2\,;-3)$.

Exercice 9 :
On a : $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}-4-x_G\\-3-y_G\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}-2-x_G\\5-y_G\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}3-x_G\\-1-y_G\end{pmatrix}$.
On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}&\iff\begin{cases}-4-x_G-2-x_G+3-x_G=0\\-3-y_G+5-y_G-1-y_G=0\end{cases}\\&\iff\begin{cases}-3-3x_G=0\\1-3y_G=0\end{cases}\\&\iff\begin{cases}-3x_G=3\\-3y_G=-1\end{cases}\\&\iff\begin{cases}x_G=-1\\y_G=\dfrac{1}{3}\end{cases}.\end{aligned}$$

Donc $G\left(-1\,;\dfrac{1}{3}\right)$.

Remarque :
Le point G défini par la relation $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ est le centre de gravité du triangle ABC, c'est-à-dire le point de concours des médianes de ce triangle.

Exercice 10 :

1) Si $REVI$ est un parallélogramme alors :

   a) b) $\overrightarrow{ER}=\overrightarrow{VI}$ c) d) $\overrightarrow{IR}=\overrightarrow{VE}$

2) Si $SION$ est un parallélogramme alors :

a) $\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IO}$ b) c) d) $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{IO}$

3) Dans la figure 1, le vecteur $\overrightarrow{u}$ est égal à :

a) b) $\overrightarrow{DA}$ c) d)

4) Dans la figure 1, le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est égal à :

a) b) c) d) $\overrightarrow{DB}$

5) Dans la figure 1, le vecteur $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ est égal à :

a) $\overrightarrow{EA}$ b) c) d)

6) Dans la figure 1, le vecteur $\overrightarrow{u} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{v}$ est égal à :

a) b) c) $\overrightarrow{FE}$ d)

7) Dans la figure 2, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont :

a) colinéaires b) c) d)

8) Dans la figure 2, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KB}$ sont :

a) colinéaires b) égaux c) d)

9) Dans la figure 2, les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JA}$ sont :

a) colinéaires b) c) opposés d)

10) Dans la figure 2, on peut écrire :

a) $\overrightarrow{JI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ b) c) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{BK}$ d)

Exercice 11 :

1) On a :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) &= \begin{vmatrix} \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{8} \\ 4 & \dfrac{5}{4} \end{vmatrix} \\ &= \frac{2}{5}\times\frac{5}{4} - 4\times\frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

$\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

2) On a :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) &= \begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 4 & \sqrt{6} \end{vmatrix} \\ &= 2\sqrt{2}\times\sqrt{6} - 4\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \\ &= 0\end{aligned}$$

$\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 0$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Exercice 12 :

Pour tout x réel,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2}x+2 & x-4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 &\iff \left(\frac{1}{2}x+2\right)\times 2 - (-1)(x-4) = 0 \\ &\iff x+4+x-4 = 0 \\ &\iff 2x = 0 \\ &\iff x = 0\end{aligned}$$

Le déterminant est nul si et seulement si $x = 0$.

Exercice 13 :
Pour tout m réel,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ colinéaires } &\iff \det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} m-2 & m+2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff (m-2) \times (-4) - 3(m+2) = 0 \\
&\iff -4m + 8 - 3m - 6 = 0 \\
&\iff -7m + 2 = 0 \\
&\iff m = \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $m = \dfrac{2}{7}$.

X Fiche 10 – Statistiques

Exercice 1 :
La série est donnée par ordre décroissant de points. Pour pouvoir déterminer les quartiles et une médiane, il faut que celle-ci soit classée par ordre croissant.

	Équipe	Points
1	USA Perpignan	12
2	FC Grenoble	29
3	SU Agen	38
4	Section Paloise	43
5	Union Bordeaux-Bègles	57
6	Rugby Club Toulonnais	57
7	Stade Français	64
8	Castres Olympique	69
9	Montpellier Hérault Rugby	70
10	Stade Rochelais	71
11	Racing 92	74
12	Lyon LOU	78
13	ASM Clermont	83
14	Stade Toulousain	98

1) L'effectif total de la série est 14 et on a : $\dfrac{14}{2} = 7$.
La 7^{e} équipe est le Stade Français et la 8^{e} est le Castres Olympique qui sont donc les deux équipes médianes du classement.
2) On a : $\dfrac{1}{4} \times 14 = 3{,}5$ donc Q_1 est la 4^{e} valeur de la série et $Q_1 = 43$.
On a : $\dfrac{3}{4} \times 14 = 10{,}5$ donc Q_3 est la 11^{e} valeur de la série et $Q_3 = 74$.
3) Soit p le nombre de points du Stade Toulousain lors de la saison 2017/2018. On a :

$$p \times \left(1 + \frac{32{,}4}{100}\right) = 98 \text{ donc } p \times 1{,}324 = 98$$
$$\text{donc } p = \frac{98}{1{,}324}$$
$$\text{donc } p \approx 74.$$

Donc le Stade Toulousain avait obtenu 74 points lors de la saison 2017/2018.
4) Soit p le nombre de points du Racing 92 lors de la saison 2017/2018. On a :

$$p \times \left(1 - \frac{7{,}5}{100}\right) = 74 \text{ donc } p \times 0{,}925 = 74$$
$$\text{donc } p = \frac{74}{0{,}925}$$
$$\text{donc } p = 80.$$

Donc le Racing 92 avait obtenu 80 points lors de la saison 2017/2018.

Exercice 2 :
1) On a :

$$\overline{x} = \frac{0 \times 4 + 1 \times 7 + 2 \times 9 + 3 \times 3 + 4 \times 1 + 5 \times 2}{4 + 7 + 9 + 3 + 1 + 2} = \frac{48}{26} \approx 1{,}8.$$

Donc, en moyenne, le Castres Olympique a marqué 1,8 essai par match lors de la saison 2018/2019.

2) On rappelle que : fréquence $= \dfrac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$.

Par exemple, la fréquence de 0 est : $\dfrac{4}{26} \approx 0{,}1538$ soit $15{,}38\,\%$.

Ainsi, on obtient le tableau suivant :

Nombre d'essais	0	1	2	3	4	5
Nombre de matchs	4	7	9	3	1	2
Fréquence (en %)	15,38	26,92	34,62	11,54	3,85	7,69

3) Pour calculer une médiane et les quartiles, on va rajouter dans le tableau des donnés, les effectifs cumulés croissants.

Nombre d'essais	0	1	2	3	4	5
Nombre de matchs	4	7	9	3	1	2
E.C.C.	4	11	20	23	24	26

L'effectif total de la série est 26 et $\dfrac{26}{2} = 13$.

Ainsi une médiane Me de la série est la moyenne des 13ᵉ et 14ᵉ valeur de la série et on a : $Me = \dfrac{2+2}{2} = 2$.
Cela signifie que dans au moins $50\,\%$ des matchs, il y a eu 2 essais ou plus et dans au moins $50\,\%$ des matchs, il y a eu 2 essais ou moins.

4) On a : $\dfrac{1}{4} \times 26 = 6{,}5$ donc Q_1 est la 7ᵉ valeur de la série et $Q_1 = 1$.

On a : $\dfrac{3}{4} \times 26 = 19{,}5$ donc Q_3 est la 20ᵉ valeur de la série et $Q_3 = 2$.

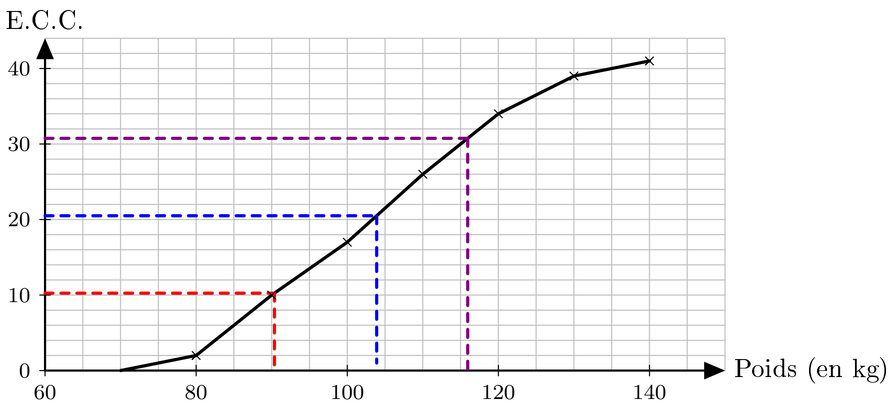
5) a) La formule saisie en B3 est : « = B2/SOMME($B2:$G2) ».

b) La formule saisie en C4 est : « = B4 + C2 ».

Exercice 3 :

1) L'effectif total de la série est 41.

2) Graphiquement, on trouve : $Q_1 \approx 90$ kg ; $Me \approx 104$ kg et $Q_3 \approx 116$ kg



3) On obtient le tableau suivant :

Masse (en kg)	[70 ; 80[	[80 ; 90[	[90 ; 100[	[100 ; 110[	[110 ; 120[	[120 ; 130[	[130 ; 140[
Effectif	2	8	7	9	8	5	2

4) Pour déterminer le poids moyen, on va utiliser le centre de chaque classe.
Ainsi, on a :

$$\overline{x} = \frac{75 \times 2 + 85 \times 8 + 95 \times 7 + 105 \times 9 + 115 \times 8 + 125 \times 5 + 135 \times 2}{41} = \frac{4255}{41} \approx 103{,}8$$

Donc le poids moyen de l'effectif du Castres Olympique est de 103,8 kg.

Exercice 4 :

1) On a : $n = 26$ et $p = 0{,}534$ ainsi $n \geqslant 25$ et $0{,}2 \leqslant p \leqslant 0{,}8$ donc les conditions sont vérifiées et un intervalle de fluctuation, au niveau de confiance 95 %, de la proportion de matchs gagnés dans les échantillons de taille 26 est :

$$\begin{aligned} I_{26} &= \left[0{,}534 - \frac{1}{\sqrt{26}}\,;0{,}534 + \frac{1}{\sqrt{26}}\right] \\ &\approx [0{,}337\,;0{,}731]\,. \end{aligned}$$

2) La fréquence observée pour cet échantillon est $f = \dfrac{15}{26} \approx 0{,}577$ or $f \in I_{26}$.
Donc, au seuil de confiance 95 %, on peut dire que les résultats de la saison 2018/2019 sont conformes à ceux des années précédentes.

XI Fiche 11 – Probabilités

Exercice 1 :

1) À Noël, Robin s'est fait offrir la trilogie des films « Batman » (trois films, sortis en 2005, 2008 et 2012). Il insère au hasard l'un des DVD dans son lecteur. Quel est la probabilité que ce soit le film le plus récent ?

   a) b) $\frac{1}{3}$ c) d)

2) Robin place les trois DVD côte à côte, mais au hasard, sur une étagère. Quelle est la probabilité que les films soit rangés dans l'ordre chronologique ?

   a) $\frac{1}{6}$ b) c) d)

   En effet, la probabilité que le 1^er^ film rangé soit celui de 2005 est $\frac{1}{3}$; la probabilité que le 2^e^ film rangé soit celui de 2008 est $\frac{1}{2}$ et la probabilité que le 3^e^ film rangé soit celui de 2012 est 1 donc : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$.

3) On tire au hasard deux cartes dans un jeu de 32. On note A l'événement : « Obtenir au moins un roi ». L'événement $\overline{A}$ est :

   a) b) « N'obtenir aucun roi »

   c) d)

4) Soient A et B deux événements issus d'une même expérience aléatoire. Sachant que $\mathbb{P}(B) = 0{,}3$; $\mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}1$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0{,}5$, on peut dire que la probabilité de l'événement A est :

   a) b) c) 0,3 d)

   En effet, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \text{ donc } \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\ \text{donc } \mathbb{P}(A) &= 0{,}5 - 0{,}3 + 0{,}1 \\ \text{donc } \mathbb{P}(A) &= 0{,}3. \end{aligned}$$

5) On lance une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir « Pile » est :

   a) b) 0,5 c) d)

6) On lance 2 fois de suite une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir deux fois « Pile » est :

   a) 0,25 b) c) d)

   En effet, la probabilité d'obtenir deux fois « Pile » est : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

7) On lance 8 fois de suite une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir huit fois « Pile » est :

   a) b)

   c) d) environ 0,004 à 10^{-3} près

   En effet, la probabilité d'obtenir huit fois « Pile » est : $\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256} \approx 0{,}004$ à 10^{-3} près.

Exercice 2 :

1) On a : $\mathbb{P}(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

2) L'événement $\overline{A}$ est défini par : « Ne pas obtenir un trèfle ».

   On a : $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

3) a) L'événement $A \cap B$ est défini par : « Tirer le roi de trèfle ».
   L'événement $A \cup B$ est défini par : « Tirer un trèfle ou un roi ».

   b) On a : $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{32}$.

   c) On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} \\ &= \frac{11}{32}. \end{aligned}$$

Exercice 3 :

1) On a :

$$\begin{aligned}0{,}2+0{,}25+0{,}1+p_4+p_5=1 \text{ donc } & 0{,}55+p_4+2p_4=1\\ \text{donc } & 0{,}55+3p_4=1\\ \text{donc } & 3p_4=0{,}45\\ \text{donc } & p_4=0{,}15.\end{aligned}$$

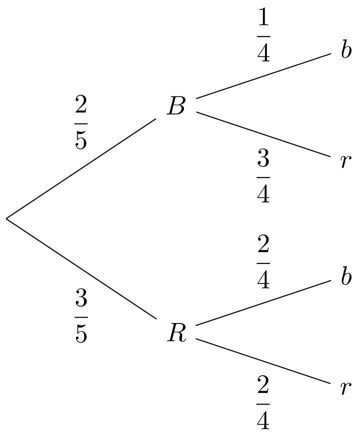
Donc $p_4=0{,}15$ et $p_5=2p_4=2\times 0{,}15=0{,}3$.

2) a) La probabilité que la flèche indique un multiple de 2 est $p_2+p_4=0{,}25+0{,}15=0{,}4$.

b) La probabilité que la flèche indique un secteur avec un numéro inférieur ou égal à 3 est $p_1+p_2+p_3=0{,}2+0{,}25+0{,}1=0{,}55$.

Exercice 4 :

1) L'arbre de probabilité associé à cette expérience est le suivant :



2) On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)&=\mathbb{P}(B\cap b)+\mathbb{P}(R\cap r)\\ &=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\\ &=\frac{\cancel{2}\times 1}{5\times\cancel{2}\times 2}+\frac{3\times\cancel{2}}{5\times\cancel{2}\times 2}\\ &=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\\ &=\frac{4}{10}\\ &=\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Exercice 5 :

1) On obtient le tableau suivant :

	Nombre d'élèves ayant eu la grippe	Nombre d'élèves n'ayant pas eu la grippe	Total
Nombre d'élèves vaccinés	9	291	300
Nombre d'élèves non vaccinés	119	861	980
Total	128	1 152	1 280

2) a) On a : $\mathbb{P}(A)=\dfrac{300}{1\,280}\approx 0{,}234$.

b) On a : $\mathbb{P}(B)=\dfrac{128}{1\,280}=0{,}1$.

c) On a : $\mathbb{P}(C)=\dfrac{9}{1\,280}\approx 0{,}007$.

3) On a : $\mathbb{P}(D)=\dfrac{119}{980}\approx 0{,}121$.

XII Fiche 12 – Algorithmique

Exercice 1 :

1) On obtient la table de valeurs suivantes :

a	b	
2		
2	1	
-1	1	Comme $a \geqslant b$, on obtient : $a = 0{,}5 \times 2 - 2 \times 1 = -1$
-5	1	Comme $a < b$, on obtient : $a = 5 \times (-1) = -5$.

Donc la valeur de la variable a à la fin de l'algorithme est : -5.
Le programme obtenu avec Python est le suivant :

```
def algo1():
    a=2
    b=1
    if a<b:
        a=0.5*a+2*b
    else:
        a=0.5*a-2*b
    if a<b:
        a=5*a
    else:
        a=10*a
    return(a)
```

```
>>> algo1()
-5.0
```

2) On obtient la table de valeurs suivantes :

a	
10	
5	$a = 10 \div 2 = 5$
16	$a = 3 \times 5 + 1 = 16$
8	$a = 16 \div 2 = 8$
4	$a = 8 \div 2 = 4$
2	$a = 4 \div 2$
1	$a = 2 \div 1$

Donc les valeurs successives de la variable a sont : $10\,;5\,;16\,;8\,;4\,;2\,;1$.
Le programme obtenu avec Python est le suivant :

```
def algo2():
    a=10
    listealgo2=list() # crée une liste de nombre
    while a!=1: # a!=1 signifie que a est différent de 1
        if a%2==0:  # Le reste dans la division euclidienne de a par 2 doit être 0 pour qu'il soit pair.
            a=a/2
        else:
            a=3*a+1
        listealgo2.append(a) #ajoute la nouvelle valeur à la liste
    return(listealgo2)
```

```
>>> algo2()
[5.0, 16.0, 8.0, 4.0, 2.0, 1.0]
```

Remarque :

La suite des nombres obtenus donne lieu à une conjecture appelée « conjecture de Syracuse » qui s'énonce ainsi : quel que soit le nombre entier strictement positif que l'on choisisse au départ, on finira par tomber sur 1.

Malgré un énoncé relativement simple, on ne sait pas si ce résultat est vrai. À ce jour, on sait seulement que cette conjecture est vraie pour tous les nombres entiers positifs inférieurs à $1{,}25 \times 2^{62}$. La grandeur de ce nombre est de l'ordre de six milliards de milliards.

Vous pouvez trouver plus d'informations sur cette suite sur les pages suivantes : https://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Syracuse

3) On obtient la table de valeurs suivantes :

a	b	c	i	
1				
1	2			
1	2	1	0	
2	2	1	0	
2	4	1	0	$b = 5 \times 2 - 6 \times 1 = 4.$
2	4	2	1	
4	2	2	1	
4	8	2	1	$b = 5 \times 4 - 6 \times 2 = 8.$
4	8	4	2	
8	8	4	2	
8	16	4	2	$b = 5 \times 8 - 6 \times 4 = 16.$
8	16	8	3	
16	16	8	3	
16	32	8	3	$b = 5 \times 16 - 6 \times 8 = 32.$
16	32	16	4	
32	32	16	4	
32	64	16	4	$b = 5 \times 32 - 6 \times 16 = 64.$

Donc, à la fin de l'algorithme, on a : $a = 32$; $b = 64$ et $c = 16$.

Le programme obtenu avec Python est le suivant :

```
def algo3():
    a=1
    b=2
    for i in range(5): #range(5) signifique pour i variant de 0 à 4
        c=a
        a=b
        b=5*a-6*c
    return(a,b,c)
```

```
>>> algo3()
(32, 64, 16)
```

Exercice 2 :

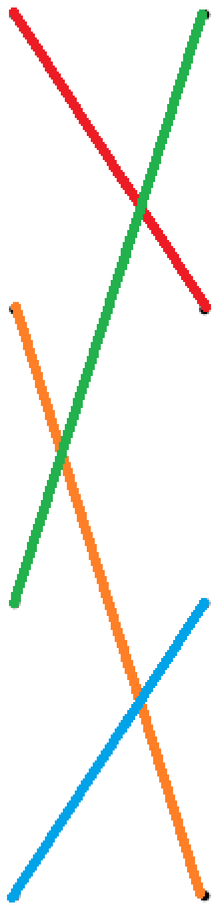
1)

Algorithmes	**Résultats obtenus à l'écran**
Algorithme de Chloé	
$P \longleftarrow 1$ Pour i variant de 1 à 5 $P \longleftarrow P \times i$ Fin Pour Afficher P	0
Algorithme de Laura	

Pour i variant de 1 à 5
    $P \longleftarrow 1$
    $P \longleftarrow P \times i$
Fin Pour
Afficher P
	120

Algorithme de Thibault	
$P \longleftarrow 0$ Pour i variant de 1 à 5 $P \longleftarrow P \times i$ Fin Pour Afficher P	1 1 2 6 24
Algorithme de Thomas	

$P \longleftarrow 1$
Pour i variant de 1 à 5
    Afficher P
    $P \longleftarrow P \times i$
Fin Pour
	5



2) On a : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ donc le seul algorithme correct est celui de Chloé.

3) Un algorithme qui permette de calculer la somme des entiers de 1 à 10 000 est le suivant :

$S \longleftarrow 0$
Pour i variant de 1 à 10 000
    $S \longleftarrow S + i$
Fin Pour
Afficher S

Le programme obtenu avec Python est le suivant :

```
def somme():
    S=0
    for i in range (1,10001):
        S=S+i
    return(S)
```

```
>>> somme()
50005000
```

Exercice 3 :

1) On obtient l'algorithme suivant :

$n \longleftarrow 0$

$m \longleftarrow 1\,000$

Tant que $m \geqslant 900$

  $n \longleftarrow n+1$

  $m \longleftarrow m \times \left(1 - \dfrac{2}{100}\right)$

Fin Tant que

Afficher n

2) Le programme obtenu avec Python est le suivant :

```
def iceberg():
    n=0
    m=1000
    while m>=900:
        n=n+1
        m=m*0.98
    return(n)

>>> iceberg()
6
```

Ainsi, au bout de 6 jours, la masse de l'iceberg deviendra inférieure à 900 t.