Problèmes pour trouver un nombre

- ## Fiche élève

Voici 4 problèmes écrits vers 1476. On donne la version originale puis leur « traduction » :

Problème : *« Exemple de adjouster*
Trouve un nombre que quant tu luy auras adjousté sa ½, son 1/3 et son ¼, tout ne face que 9 »
Traduction : *« Exemple avec addition*
Trouve un nombre tel que, quand tu lui auras ajouté sa ½, son 1/3 et son ¼, le tout fasse 9 »

Problème : *« Exemple de sustraire.*
Trouve un nombre que quant l'on en aura levé le 1/3 et le ¼ la reste soit 3. »
Traduction : « *Exemple avec soustraction*
Trouve un nombre tel que, quand on en aura enlevé le 1/3 et le ¼ le reste soit 3. »

Problème : *« Exemple de multiplier*
Trouve un nombre que quant tu l'auras multiplier par 2 et encores par 3 et puis encorepar 4, toutes icelles multiplications adjoustees avec luy ne montent que 7. »
Traduction : *« Exemple avec multiplication*
Trouve un nombre tel que, quand tu l'auras multiplié par 2, et encore par 3 puis encore par 4, tous les produits ajoutés fassent 7 ».

Problème : *« Exemple de partir*
Trouve ung nombre que qui le partiroit par 7 il en vieigne 3 et ½. »
Traduction : « Exemple avec division
Trouve un nombre tel que, si on le divise par 7 il vient 3 et ½. »

(*Traicté de la praticque d'algorisme*, Cesena, biblio.Malatestiana, ms S-26-6, écrit vers 1476, auteur anonyme)

Résoudre chaque problème en faisant apparaître votre raisonnement.

- ## Lien avec les programmes

<u>Niveaux</u> : 4e (pour introduire la notion d'équation, ou au contraire pour réinvestir la notion vue en amont) ; 3e (en reprise du programme de 4e, pour réactiver la résolution d'équation et la mise en équation d'un problème. On évite les rappels de 4e, dans la partie cours).

<u>Dans les textes officiels on lit :</u>

« *Les élèves, dans le cadre du socle commun, peuvent être amenées à résoudre des problèmes se ramenant à une équation du premier degré sans que la méthode experte soit exigible*. » En 3e, on ajoute que « les élèves peuvent être amenés à résoudre des problèmes du premier degré (méthode arithmétique, méthode par essais successifs, …). »

Dans le cadre de l'introduction d'équation et de leur résolution, « *à chaque fois sont dégagées les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation.* » (BO spécial n°6 du 28 août 2008, p 29)

- ## Commentaires

Les quatre problèmes, extraits du *Traicté de la praticque d'algorisme*, Cesena, biblio.Malatestiana, ms S-26-6, écrit vers 1476 (par un auteur anonyme) ont l'intérêt de travailler le sens des quatre opérations ; les démarches de résolution (présentées plus loin) suivent le même schéma. Sans habillage concret, ils affichent un but de travail purement technique. Ils sont courts. Les énoncés d'origine, dont la compréhension ne comporte pas de difficulté, peuvent être proposés tel quel.

Un déroulement en classe prévoit un matériel de vidéo-projection ou des ordinateurs faciles d'accès, comme en fond de salle. Ce peut être :

→ recherche individuelle ;
→ une mise en commun ;
→ un débat autour des méthodes.

Pour les deux premiers problèmes manipulent les fractions et permettre de travailler la recherche des dénominateurs communs. Toutefois que, les dénominateurs n'étant pas multiples les uns des autres, on ne peut proposer l'exercice qu'à partir du niveau 4e [Dans les programmes officiels de 4e, on lit « *l'addition de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire demande un travail sur la recherche de multiples communs à deux ou plusieurs nombres entiers dans des cas où un calcul mental est possibles*. » BO spécial n°6 du 28 août 2008, p 28].

Ce type de séance d'exercices est formateur pour les élèves dans la mesure où il permet de constater et vivre les points communs, les différences, les avantages et les inconvénients ou limites de chaque démarche.

Ces quatre petits problèmes et leurs stratégies de résolutions convoquent presque tous les statuts du signe « = ». Dans la résolution arithmétique, quand on calcule les sommes de fractions par exemple, il annonce un résultat. Quand on utilise le tableur, on affecte d'abord une valeur à une cellule en commençant par entrer le symbole = ; puis quand on écrit une formule, il a le statut d'annoncer un résultat ; enfin, quand on étire la formule, on développe la pensée algébrique dans une situation de généralisation. Quand on écrit une équation, il donne à voir une équivalence entre deux expressions, laquelle pouvant être rendue vraie. La démarche algébrique, quant à elle, nécessite une remise en cause des stratégies antérieures et de la signification du signe « = ». Cet exercice permet justement de stabiliser la compréhension de ces différents statuts, préalable à la mise en place du calcul algébrique.

- ## Solutions des problèmes

➢ Avec l'addition

Problème : *« Exemple de adjouster*
Trouve un nombre que quant tu luy auras adjousté sa 1/2, son 1/3 et son 1/4, tout ne face que 9 »

Traduction : *« Exemple avec addition*
Trouve un nombre tel que, quand tu lui auras ajouté sa 1/2, son 1/3 et son 1/4, le tout fasse 9 »

<u>Résolution arithmétique avec calcul du dénominateur</u> : on calcule $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$. Donc $\frac{25}{12}$ donne 9. Par proportion puis passage par l'unité, 25 donne 12 fois plus que 9, soit 12×9. Donc 1 donne 25 fois moins que 12×9, soit $\frac{12\times 9}{25}$ ou 4,32.

<u>Traduction algébrique</u> : $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=9$. On factorise $x(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})=9$. On est ramené au calcul de $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$. Donc on résout $\frac{25}{12}x=9$, une équation du type $ax=b$.

<u>Alternative avec le tableur</u> : La solution étant décimale, on utilise le tableur par essais et ajustement de nombres de départ décimaux appartenant à [4 ;5]. Il faut chercher au centième près.

Presse-papi... Police

E2 f_x =A2+B2+C2+D2

	A	B	C	D	E
1	Nombre de départ	moitié	tiers	quart	somme
2	1	0,5	0,3333	0,25	2,0833333
3	2	1	0,6667	0,5	4,1666667
4	3	1,5	1	0,75	6,25
5	4	2	1,3333	1	8,3333333
6	4,3	2,15	1,4333	1,075	8,9583333
7	4,32	2,16	1,44	1,08	9
8	4,4	2,2	1,4667	1,1	9,1666667
9	5	2,5	1,6667	1,25	10,416667
10	6	3	2	1,5	12,5
11	12	6	4	3	25
12					

➢ Avec la soustraction

Problème : « *Exemple de sustraire.*
Trouve un g nombre que quant l'on en aura levé le 1/3 et le 1/4 la reste soit 3. »
Traduction : « *Exemple avec soustraction*
Trouve un nombre tel que, quand on en aura enlevé le 1/3 et le 1/4 le reste soit 3. »

Résolution arithmétique avec calcul du dénominateur : on calcule $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$.
$\frac{5}{12}$ donne 3. On utilise la proportion puis le passage par l'unité Donc 5 donne 12 fois plus que 3, soit 12×3. Donc 1 donne 5 fois moins que 12×3, soit $\frac{12\times 3}{5}$ ou 7,2.

Traduction algébrique : $x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x=3$. On factorise $x(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4})=3$. On est ramené au calcul de $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$. Donc on résout $\frac{5}{12}x=3$, une équation du type $ax=b$.

Alternative avec le tableur : la solution étant décimale, on utilise le tableur par essais et ajustements de nombres de départ décimaux appartenant à [7 ; 8]. Il faut chercher au dixième près.

D2 =A2-B2-C2

Nombre de départ	Tiers	Quart	Différence
0	0	0	0
1	0,333333	0,25	0,41666667
2	0,666667	0,5	0,83333333
3	1	0,75	1,25
4	1,333333	1	1,66666667
5	1,666667	1,25	2,08333333
6	2	1,5	2,5
7	2,333333	1,75	2,91666667
7,1	2,366667	1,775	2,95833333
7,2	2,4	1,8	3
7,3	2,433333	1,825	3,04166667
8	2,666667	2	3,33333333
9	3	2,25	3,75

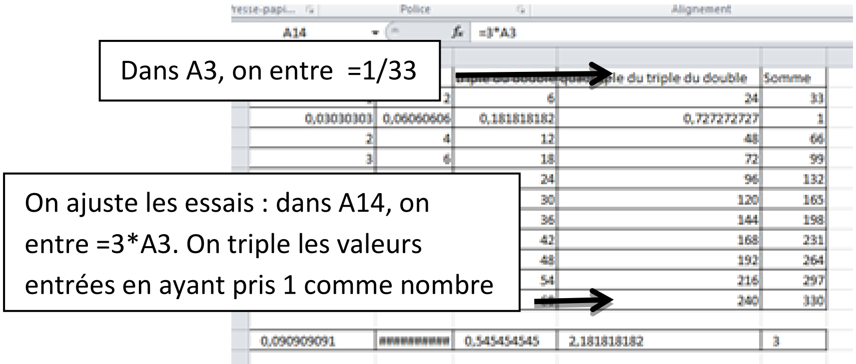
- Avec la multiplication

Problème : « *Exemple de multiplier*
Trouve un nombre que quant tu l'auras multiplier par 2 et encores par 3 et puis encorepar 4, toutes icelles multiplications adjoustees avec luy ne montent que 7. »
Traduction : « *Exemple avec multiplication*
Trouve un nombre tel que, quand tu l'auras multiplié par 2, et encore par 3 puis encore par 4, tous les produits ajoutés fassent 7 ».

Résolution arithmétique : on calcule $1+2+3\times 2+4\times 3\times 2=33$. Par passage par l'unité, on dit : si 33 donne 7, 1 donne 33 fois moins que 7 soit $\frac{7}{33}$.

Traduction algébrique : $x+2x+3(2x)+4\big(3(2x)\big)=7$.
On réduit et on factorise : $x(1+2+6+24)=7$. On résout $33x=7$, une équation du type $ax=b$; ou bien, on peut revenir à la définition du quotient de b par a.

Alternative avec le tableur : la solution étant rationnelle mais non décimale, le tableur n'est pas une alternative pertinente.



[illegible]	[illegible]	[illegible]	ple du triple du double	Somme
[illegible]	2	6	24	33
0,03030303	0,06060606	0,181818182	0,727272727	1
2	4	12	48	66
3	6	18	72	99
[illegible]	[illegible]	24	96	132
[illegible]	[illegible]	30	120	165
[illegible]	[illegible]	36	144	198
[illegible]	[illegible]	42	168	231
[illegible]	[illegible]	48	192	264
[illegible]	[illegible]	54	216	297
[illegible]	[illegible]	[illegible]	240	330
0,090909091	##########	0,545454545	2,181818182	3

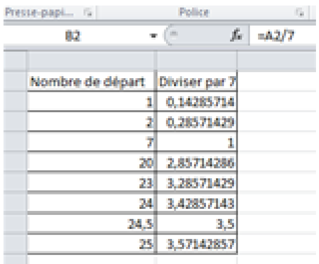
- Avec la division

Problème : *« Exemple de partir*
Trouve ung nombre que qui le partiroit par 7 il en vieigne 3 et 1/2. »
Traduction : « Exemple avec division
Trouve un nombre tel que, si on le divise par 7 il vient 3 et 1/2. »

Résolution arithmétique : on revient à la définition d'une division. On peut changer de registre d'écriture et remplacer $3 + \frac{1}{2}$ par 3,5.

Traduction algébrique : $\frac{x}{7} = 3 + \frac{1}{2}$ ou $\frac{x}{7} = 3{,}5$

Alternative avec le tableur : la solution arithmétique est évidente, donc le tableur n'est pas pertinent mais permet de vérifier.



Nombre de départ	Diviser par 7
1	0,14285714
2	0,28571429
7	1
20	2,85714286
23	3,28571429
24	3,42857143
24,5	3,5
25	3,57142857

Bibliographie

Groupe d'Histoire des Maths, 2008, *De l'arithmétique à l'algèbre fausses positions et premier degré*, IREM de Toulouse