Académie de Versailles **Mathématiques « outillées »** **Année scolaire 2012-2013**

Sujet numéro 13-01 **Classe de seconde et lycée**

Fonctions et valeurs approchées

1. Dire pourquoi $\dfrac{13{,}8}{7+4\sqrt{3}}$ et $13{,}8\left(7-4\sqrt{3}\right)$ sont deux écritures d'un même nombre.

2. Lors d'une séance de calcul mental, un professeur demande à ses élèves de remplacer $\sqrt{3}$ par 1,7 dans le calcul de $A=\dfrac{13{,}8}{7+4\sqrt{3}}$ et $B=13{,}8\left(7-4\sqrt{3}\right)$. Qu'obtient-on ?

Appeler le professeur pour la vérification de ces résultats

L'objet de cet exercice est de déterminer celui des deux résultats obtenus précédemment qui est le plus proche de la valeur exacte. Pour cela, on introduit les fonctions *f* et *g* définies sur l'intervalle [1,7 ; 1,8] par $f(x)=\dfrac{13{,}8}{7+4x}$ et $g(x)=13{,}8(7-4x)$ et on étudie les valeurs prises par $f(x)$ et $g(x)$ pour des valeurs « proches » de $\sqrt{3}$.

3. *a.* Tracer les courbes représentatives C_f et C_g des fonctions *f* et *g* à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.

   b. Lire sur ce graphique les coordonnées du point d'intersection de C_f et C_g. Quel est le résultat obtenu par le calcul ?

   c. Comment interpréter les résultats obtenus par calcul mental ? Quelle est la meilleure des deux approximations ?

Appeler le professeur pour lui soumettre le graphique et les résultats obtenus

4. Soit *h* la fonction définie sur l'intervalle [1,7 ; 1,8] par $h(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}$. Tracer la courbe représentative C_h de la fonction *h*. Quelles sont les positions relatives des courbes C_f , C_g et C_h ?

Quelle erreur commet-on en prenant *h*(1,7) pour valeur approchée de *A* (ou *B*) ?

Démontrer que pour tout *x* de l'intervalle [1,7 ; 1,8], $h(x)=\dfrac{69(25-8x^2)}{5(4x+7)}$

Problème de distance minimale

Dans un repère orthonormé du plan d'origine O, on appelle *(C)* la courbe représentative de la fonction exponentielle. On se demande s'il existe un ou plusieurs points M sur cette courbe tels que la distance OM soit minimale.

1) A l'aide d'un logiciel, conjecturer le nombre de points M répondant à la condition donnée ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-1} près de l'abscisse de chacun d'eux.

Appeler le professeur pour lui faire part de vos conjectures.

2) On note f la fonction qui, à l'abscisse x d'un point M de la courbe associe le carré de la distance OM.

a) Exprimer $f(x)$ en fonction de x puis étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. *(On pourra étudier les variations de la fonction dérivée f' de f, chercher le nombre de solutions de l'équation $f'(x) = 0$ puis en déduire le signe de la fonction f')*

b) En déduire la réponse au problème posé. Est-elle cohérente avec la conjecture formulée ?

c) Ecrire un algorithme dont la valeur de sortie est une valeur approchée à 10^{-1} près de l'abscisse d'un point M solution du problème.

Appeler le professeur pour vérification de l'algorithme.

d) Mettre en œuvre cet algorithme sur un logiciel ou la calculatrice. Retrouve-t-on le ou les résultats de la question 1) ?

Étude conjointe de deux suites

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 1,\ v_0 = 2,\ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ pour tout entier naturel } n .$$

1) Réaliser une feuille de calcul qui affiche des valeurs approchées à 10^{-6} près des 10 premiers termes des deux suites ainsi que les 10 premiers termes de la suite (d_n) définie par $d_n = v_n - u_n$ pour tout entier naturel n.

> Appeler le professeur pour qu'il vérifie la feuille de calcul

2) Conjecturer la réponse aux questions suivantes :

- Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles monotones ?
- La suite (d_n) est-elle convergente ?
- Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles convergentes ? Si oui, vers quelle limite ?

> Appeler le professeur pour lui faire part de vos conjectures

3) Les questions qui suivent sont une aide à la démonstration des conjectures précédemment formulées.

a) Justifier que les suites (u_n) et (v_n) sont à termes strictement positifs.

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \le d_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) Etudier les variations des suites (u_n) et (v_n) .

d) Montrer que la suite (u_n) est majorée et que la suite (v_n) est minorée.

e) Montrer que la suite de terme général $u_n \times v_n$ est une suite constante.

4) Conclure sur la convergence des deux suites et leur limite.

Un rectangle sous une courbe

On considère la fonction *f* définie sur **R** par : $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{-x}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Pour tout réel *x* positif ou nul, on note :

• M le point de C de coordonnées $\left(x,\ f\left(x\right)\right)$;
• P le point de coordonnées $\left(x,\ 0\right)$;
• Q le point de coordonnées $\left(0,\ f\left(x\right)\right)$.

L'objectif est de déterminer la valeur de *x* pour laquelle l'aire du rectangle OPMQ est maximale.

1. Représenter la courbe et le rectangle à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

2. Pour quelle valeur de *x* l'aire du rectangle semble-t-elle maximale ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture

.
3. On note *a* l'abscisse de M pour laquelle l'aire de ce rectangle est maximale. Quelle est dans ces conditions la pente de la droite (PQ) ? et la pente de la tangente en M à la courbe ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture

.
4. Établir les résultats annoncés.

Sujet numéro 13-19 **Terminale S**

Un rectangle envahissant

On considère la fonction *f* définie sur **R** par : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Pour tout réel *x* positif ou nul, on note :

• M le point de C de coordonnées $(x,\ f(x))$;
• P le point de coordonnées $(x,\ 0)$;
• Q le point de coordonnées $(0,\ f(x))$.

L'objectif est de savoir si le rectangle OPMQ peut occuper la moitié exactement de l'aire de la partie du premier quadrant limitée par la courbe C, les axes de coordonnées et la droite (MP).

1. Représenter la courbe et le rectangle à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

2. Combien de solutions le problème posé semble-t-il posséder ? (on pourra approcher l'aire sous la courbe par l'aire d'un trapèze)

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture

.

3. Montrer que le point M est solution du problème si son abscisse α est solution de l'équation (E) : $\mathrm{e}^{x} - 2x - 1 = 0$.

> Appeler l'examinateur pour expliquer le raisonnement suivi

.

Établir les résultats annoncés et donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de la solution non nulle de l'équation (E).

Étude d'une population d'insectes

Le cycle de vie et de reproduction des femelles d'une population d'insectes a les caractéristiques suivantes :

Aucune ne vit plus de deux ans et seulement la moitié survit la deuxième année.

Elles ne pondent que dans la deuxième année et font en moyenne chacune *b* larves femelles viables (*b* est un nombre positif donné). À un instant initial, on décompte 50 femelles de un an et 25 de deux ans.

On désigne respectivement par j_n et a_n les effectifs à l'année *n* des femelles juvéniles (moins d'un an) et des femelles adultes (entre1 et 2 ans). Les données précédentes se traduisent par $\begin{cases} j_{n+1} = ba_n \\ a_{n+1} = 0{,}5\, j_n \end{cases}$. On suppose que les effectifs initiaux sont : $j_0 = 50$ et $a_0 = 25$.

1. Déterminer la matrice *A* telle que $\begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

Appeler le professeur pour vérification

2. On admet qu'au bout de *n* années, les effectifs j_n et a_n sont donnés par : $\begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$.

a. À l'aide de la calculatrice, calculer A^2, A^3, A^4, A^5, A^6 pour $b = 1$ puis $b = 2$, $b = 3$, $b = 10$ et $b = 20$.

Quelles conjectures peut-on faire sur les coefficients de A^n en fonction de *b* lorsque *n* est pair ? lorsque *n* est impair ?

b. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-contre à l'aide de la calculatrice pour $b = 1$ puis $b = 2, 3, 10, 20$.

n	0	1	2	3	4	5	6
j_n	50						
a_n	25						

Existe-t-il des valeurs de *b* pour lesquelles la population d'insectes femelles serait en voie d'extinction ? Resterait stable ? Aurait une croissance exponentielle ?

Appeler le professeur pour une vérification et une aide éventuelle

3. Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $\begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$.

Démontrer finalement les conjectures émises à la question 2. *a.*

Sujet numéro 13-22 **Terminale S**

Jeu contre une machine

L Un jeu de hasard consiste à jouer à pile ou face contre une machine. Le joueur lance une pièce équilibrée 5 fois de suite tandis que la machine simule 5 fois de suite ces lancers. . Les deux expériences aléatoires sont supposées indépendantes.
Si le joueur obtient le même nombre de *pile* que la machine, il reçoit 4 euros, sinon, il perd la mise. On se demande si ce jeu est équitable.

1. *a.* Une partie est donc représentée par deux séries de cinq lancers, la première représentant les tirages par la machine, la seconde les tirages par le joueur, et le résultat du test « les deux séries montrent-elles le même nombre de *pile* ? » Simuler une partie à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.
b. Simuler 1 000 parties de ce jeu et calculer la fréquence *f* d'obtention du même nombre de *pile* pour les deux séries. On pourra organiser les calculs tel qu'indiqué ci-dessous :

Machine							Joueur							Gain du joueur
Numéro de la partie	Numéro du lancer					Nombre de *pile*	Numéro de la partie	Numéro du lancer					Nombre de *pile*	
	1	2	3	4	5			1	2	3	4	5		
1	1	0	1	1	1	4	1	0	0	0	0	1	1	–1
2	0	1	0	1	1	3	2	1	0	0	1	1	3	1

On désigne par p la probabilité que le joueur gagne. Déterminer un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95.

c. Estimer alors le gain moyen du joueur. Le jeu vous semble-t-il équitable ?

Appeler le professeur pour une vérification des simulations et des conjectures

2. Soit X (respectivement Y) la variable aléatoire correspondant au nombre de *piles* obtenus par la machine (respectivement le joueur) au cours d'une partie (de 5 tirages successifs indépendants).

a. Justifier que X et Y suivent la même loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b. On désigne par p la probabilité que le joueur gagne.

Démontrer que $p = \frac{1}{2^{10}} \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k}^2 = \frac{63}{256}$. En déduire le gain algébrique moyen. Conclure.

Somme de factorielles

On appelle *factorielle* la fonction qui à tout entier naturel non nul associe son produit par le produit de ses prédécesseurs non nuls. On note $N! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (N-2) \times (N-1) \times N$. Une bonne définition, qui donne aussi une image à 0, s'écrit : $\begin{cases} 0! = 1 \\ \text{Pour tout } N \text{ non nul, } N! = N \times (N-1)! \end{cases}$. On lit « factorielle N ».

Camille a rédigé l'algorithme ci-contre :

1. Programmer cet algorithme à l'aide du langage de votre choix. Que représente S ?

Appeler le professeur pour une vérification de l'algorithme, son interprétation et une aide éventuelle

2. Quel semblent être :

a. le chiffre des unités de S à partir d'un certain rang ?

b. les deux derniers chiffres de S à partir d'un certain rang ?

```
Pour N allant de 1 à 13
S prend la valeur 0
    Pour K allant de 1 à N
    Donner à S la valeur S + K !
    Fin Pour
Afficher N
Afficher N !
Afficher S
Fin Pour
```

3. Quel est le plus petit entier N_0 pour lequel N_0 ! est divisible par 10 puis le plus petit entier N_1 pour lequel N_1 ! est divisible par 100.

Appeler le professeur pour une vérification de ces conjectures et de ce résultat

4. *a.* Démontrez que si $N \geq N_0$, S a pour chiffre des unités 3.

b. En raisonnant comme dans la question 4.*a.*, démontrez que si $N \geq N_0$, S se termine toujours par les mêmes deux derniers chiffres.

Académie de Versailles **Mathématiques « outillées »** **Année scolaire 2012-2013**

Sujet numéro 13-24 **Première et terminale S**

Tangentes et normales à la parabole

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$. On considère le point A de coordonnées (1, 3) et l'arc de parabole (P) défini par le système $\begin{cases} y = x^2 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$. On s'intéresse au problème suivant : existe-t-il des points M de (P) tels que la droite (AM) et la tangente $\mathrm{T_M}$ à (P) au point M soient perpendiculaires (on dit alors que $\mathrm{T_M}$ est *normale* à la courbe (P))?

1. *a.* À l'aide d'un logiciel de géométrie, construire une figure dynamique illustrant le problème posé.

b. Effectuer les constructions nécessaires mettant en évidence le(s) point(s) M de (P) tel(s) que (AM) soit perpendiculaire à $\mathrm{T_M}$. Combien semble-t-il y avoir de solutions ?

Appeler le professeur pour une vérification de la figure et des conjectures

2. Observer les variations de la distance AM lorsque M parcourt l'arc de parabole. Quels sont les points M de (P) qui semblent être les plus proches ou les plus éloignés de A ? Utiliser les fonctionnalités du logiciel pour mettre en évidence les conjectures effectuées.

Appeler le professeur pour vérification des conjectures et aide éventuelle

3. Soit t l'abscisse d'un point M de (P).

a. Démontrer que (AM) est perpendiculaire à $\mathrm{T_M}$ si, et seulement si, le réel t est solution du système :

$$\begin{cases} -2 \leq t \leq 2 \\ 2t^3 - 5t - 1 = 0 \end{cases}$$

a. Étudier les variations de la fonction *f* définie sur l'intervalle [– 2, 2] par : $f(t) = 2t^3 - 5t - 1$. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(t) = 0$.

c. Pour tout réel t de l'intervalle [– 2, 2] on pose $g(t) = \mathrm{AM}^2$. Calculer $g(t)$. Montrer que la fonction g est dérivable et que la fonction g' a le même signe que *f*. Que penser des conjectures de la question 2. ?

Académie de Versailles

Mathématiques « outillées »

Année scolaire 2012-2013

Sujet numéro 13-28

Première ou terminale S

Propriétés des tangentes à la parabole

Dans un repère orthonormal du plan d'origine O, on considère la parabole (P) d'équation $y = x^2$.

Soit *a* et *b* deux réels distincts. On désigne par :

- ✓ A et B les points de (P) d'abscisses respectives *a* et *b*
- ✓ T_A et T_B les tangentes à (P) en A et B (respectivement) et C leur point d'intersection.

La parallèle à l'axe des ordonnées, et passant par C, coupe (P) en M et [AB] en N. On appelle T_M la tangente à (P) au point M.

1. Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. En variant la position des points A et B, observer :

   a. la position de N sur [AB] et celle de M sur [CN]

   b. la position relative des droites (AB) et T_M.
3. Utiliser les fonctionnalités du logiciel pour consolider ces observations.

Appeler le professeur pour une vérification de la figure et des conjectures

4. *a.* Calculer l'abscisse de C.

   b. Quelles sont respectivement les positions de N sur [AB] et de M sur [CN] ?

   c. Quel est le coefficient directeur de T_M ? et celui de (AB) ? Conclure.