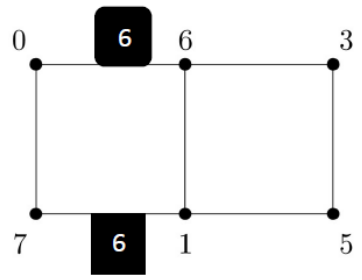
Exercice 1

Étiquetage gracieux d’une figure

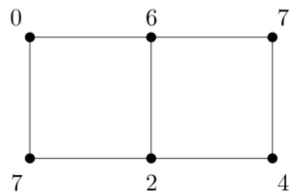
A. Des exemples

<table>
<tr>
<td>

1.

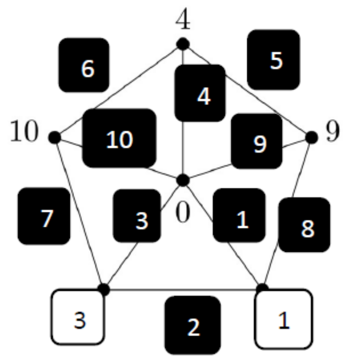


</td>
<td>



</td>
<td rowspan="2">

2.

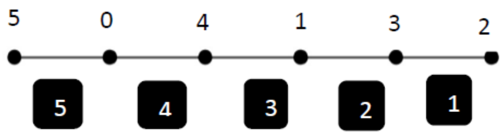


</td>
</tr>
<tr>
<td>Etiquetage non gracieux (deux pondérations identiques)</td>
<td>Etiquetage non gracieux (étiquetage avec deux « 7 »)</td>
</tr>
</table>

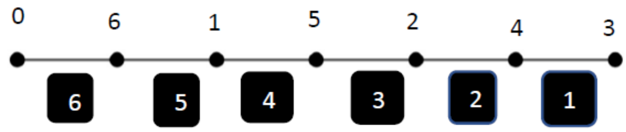
B. Cas des lignes

1.

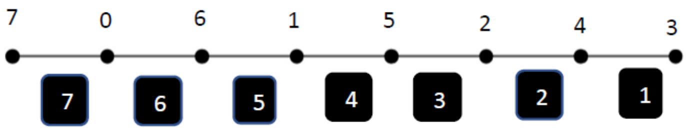
Étiquetage gracieux de L_5 :



Étiquetage gracieux de L_6 :



Étiquetage gracieux de L_7 :

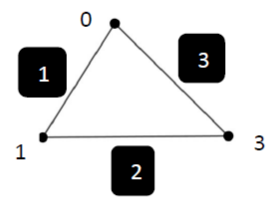


2. En s’appuyant sur la réflexion menée pour les figures L_4 et L_6, on peut étiqueter la figure $L_{2\,022}$ en associant aux points allant de la gauche vers la droite la suite de nombres :
0, 2 022, 1, 2 021, 2, 2 020, 3, 2 018, …, 1 021, 1 017, 1 014, 1012, 1011
Ce qui donne les pondérations successives, de la gauche vers la droite :
2 022, 2 021, 2 020, 2 019, 2 018, 2 017, 2 016, …, 4, 3, 2, 1.

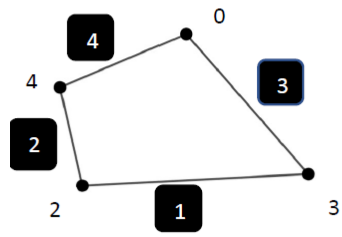
C. Cas des polygones

<table>
<tr>
<td>

1.

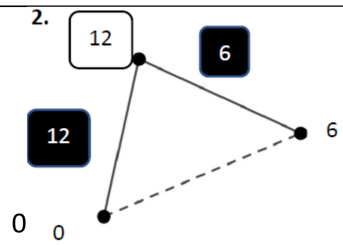


</td>
<td>



</td>
<td>

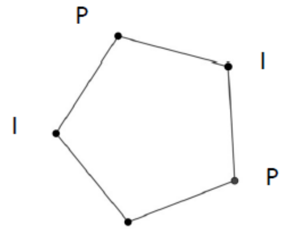
2.



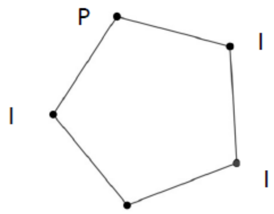
</td>
</tr>
<tr>
<td>Étiquetage gracieux d’un triangle</td>
<td>Étiquetage gracieux d’un quadrilatère</td>
<td>Ajout à faire pour obtenir un étiquetage gracieux d’un polygone à 12 côtés.</td>
</tr>
</table>

3. Si les étiquettes des extrémités d'un segment sont ;
a. de parités différentes, alors la pondération du segment est impaire ;
b. de même parité, alors la pondération du segment est paire.
4. Un pentagone a cinq sommets pouvant être étiquetés par les nombres 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 (autant de nombres impairs que de nombres pairs, d'où une symétrie du problème par rapport à l'étiquetage P ou I) et reliés par cinq segments devant être pondérés par les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 pour que l'étiquetage soit gracieux. On doit donc avoir trois pondérations impaires (1, 3 et 5), ce qui nécessite trois alternances de nombres pairs et impairs pour les sommets associés. On a alors deux cas :

- on pondère à la suite trois segments par des nombres impairs et il reste un sommet placé entre deux sommets numérotés par des nombres de parités différentes.
Qu'elle soit paire ou impaire, la numérotation de ce sommet crée une nouvelle pondération impaire, ce qui en fait une de trop.



- on pondère à la suite deux segments pondérés par des nombres impairs puis un segment pondéré par un nombre pair. Il reste alors un sommet placé entre deux sommets numérotés par des nombres de même parité.
Qu'elle soit paire ou impaire, la numérotation de ce sommet crée soit deux nouvelles pondérations impaires soit deux nouvelles pondérations paires, ce qui ne convient pas.



Autre rédaction possible
Supposons par l'absurde qu'il existe un étiquetage gracieux.
Quand on parcourt successivement les sommets du pentagone, on voit sur les arêtes les entiers de 1 à 5, donc trois nombres impairs, donc trois changements de parité du sommet, et deux nombres pairs, sans changement de parité. En tout, trois changements de parité, ce qui équivaut à un changement de parité quand on termine le parcours : contradiction.

D. Une très grande figure
1. Le nombre de segments est le nombre de paires de points distincts, c'est-à-dire la moitié du nombre de couples soit $\frac{1}{2} \times 2\,022 \times 2\,021 = 1\,011 \times 2\,021 = 2\,043\,231$.
2. a. On cherche le nombre d'entiers impairs de l'ensemble $\{1,2,\ldots,2\,043\,231\}$ ce qui revient à chercher les entiers k tels que $0 \leq 2k+1 \leq 2\,043\,231$ soit $0 \leq k \leq 1\,021\,615$. On a donc 1 021 616 segments dont la pondération est un nombre impair.
b. Si p est le nombre de points étiquetés avec un nombre pair, alors le nombre de points étiquetés avec un nombre impair est $2\,022 - p$. Le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair est donc égal au nombre de paires de points étiquetés l'un avec un nombre pair et l'autre un nombre impair soit $p(2\,022 - p)$.
3. Si K_{2022} est muni d'un étiquetage gracieux alors il existe un entier p tel que $p(2\,022 - p) = 1\,021\,616$
L'équation du second degré $p^2 - 2\,022p + 1\,021\,616 = 0$, dont le discriminant est 2020, n'a pas de solution entière.

Exercice 2

Nombres sectionnables

Partie A

On remarque qu'un nombre N est sectionnable s'il existe un entier n tel que $\frac{n(n+1)}{2} = N$
ce qui s'écrit $n^2 + n - 2N = 0$

1. a. L'équation $n^2 + n - 2 \times 21 = 0$ a pour discriminant 169 et pour solution entière positive $n = 6$
L'équation $n^2 + n - 2 \times 136 = 0$ a pour discriminant 1 089 et pour solution entière positive $n = 16$
21 et 136 sont donc bien sectionnables unitaires.
b. L'équation $n^2 + n - 2 \times 1\,850 = 0$ a pour discriminant 14 801 qui n'est pas un carré parfait et donc n'a donc pas de solution entière. 1 850 n'est donc pas sectionnable.
Remarque
On peut aussi raisonner avec des inégalités. La fonction f définie par $f(x) = x^2 + x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f(60) < 1850 < f(61)$.
2. Un entier a supérieur ou égal à 3 est un entier sectionnable unitaire si et seulement si l'équation $n^2 + n - 2a = 0$ admet au moins une solution entière positive.
Cela signifie que son discriminant $1 + 8a$ est un carré parfait et qu'au moins une des solutions de l'équation, à savoir $\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{1+8a}}{2}$, est un entier positif.
Ceci équivaut à $\sqrt{1+8a}$ existe et est un entier tel que $\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2}$ soit un entier (l'autre solution est négative) soit $\sqrt{1+8a}$ existe et est un entier impair.

Partie B

1. $9 = 4 + 5$ et $15 = 7 + 8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ donc 9 et 15 sont sectionnables.
En revanche, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 < 16 < 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, $2 + 3 + 4 + 5 < 16 < 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, $3 + 4 + 5 < 16 < 3 + 4 + 5 + 6$, $4 + 5 + 6 < 16 < 4 + 5 + 6 + 7$, $5 + 6 < 16 < 5 + 6 + 7$, $6 + 7 < 16 < 6 + 7 + 8$, $7 + 8 < 16 < 7 + 8 + 9$ et $8 + 9 > 16$ donc 16 n'est pas sectionnable.
2. Si n est un entier impair supérieur ou égal à 3, alors il existe un entier k non nul tel que $n = 2k + 1$ soit $n = k + (k + 1)$ ce qui prouve que n est sectionnable.
3. $S = (q + 1) + (q + 2) + \cdots + (q + k) = kq + (1 + 2 + 3 + \cdots + k) = kq + \frac{k(k+1)}{2}$
Soit $2S = 2kq + k(k + 1) = k(k + 1 + 2q)$
4. Pour tout entier p, $p \geq 1$, si $N = 2^p$ alors $2N = 2^{p+1}$est aussi une puissance de 2. Or, quelle que soit la parité de l'entier k, le nombre $k(k + 1 + 2q)$ est le produit d'un entier pair par un entier impair puisque $1 + 2q$ est un entier impair. Il ne peut donc être une puissance de 2.
5. **a.** $56 = 2^3 \times 7$ et $2 \times 56 = 2^4 \times 7 = 7(7 + 1 + 8) = 7(7 + 1 + 2 \times 4)$ et on peut écrire, en posant $k = 7$ et $q = 4$, $56 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$.
b. $2 \times 44 = 8 \times 11 = 8(8 + 1 + 2 \times 1)$ et $44 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$.
c. Soit n un nombre entier positif pair qui n'est pas une puissance de 2. Alors il existe un unique couple d'entiers (r, m) où m est un entier impair supérieur ou égal à 3 et r un entier supérieur ou égal à 1, tel que $n = 2^r \times m$ et $2n = 2^{r+1} \times m$
On considère deux cas :
Si $m > 2^{r+1}$ alors $m \geq 2^{r+1} + 1$ et il existe un entier $q \geq 0$ tel que $2n = 2^{r+1}(2^{r+1} + 1 + 2q)$. On peut alors écrire $n = (q + 1) + (q + 2) + \cdots + (q + 2^{r+1})$.
Si $m < 2^{r+1}$ alors $m + 1 \leq 2^{r+1}$ et il existe un entier $q \geq 0$ tel que $2n = m(m + 1 = 2q)$. On peut alors écrire $n = (q + 1) + (q + 2) + \cdots + (q + m)$.
6. En regroupant les résultats de la question 2 et de la question 5, l'ensemble des nombres sectionnables est constitué des nombres entiers impairs et des nombres positifs pairs qui ne sont pas une puissance de 2.

Partie C

1. $2 \times 13 = 26 = 2(2+1+2\times 5)$ ce qui donne $13 = 6+17$ et il n'y a pas d'autres décompositions possibles car, 13 étant un nombre premier, il n'y a qu'un produit de deux entiers p et q supérieurs ou égaux à 2 et tels que $pq = 13$ et $q \geq p+1$.
En revanche, $50 = 5(5+1+2\times 2) = 2(2+1+2\times 11)$ ce qui donne $25 = 3+4+5+6+7$ mais aussi $25 + 12 + 13$.
2. **a**. Si $n = (q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k) = kq + \frac{k(k+1)}{2}$ où $k \geqslant 3$
Si k est pair, alors il existe un entier k' tel que $k = 2k'$ et $n = k'(2q + k'(2k'+1))$ et comme $k \geq 3$, $k' \geq 2$ et n n'est pas premier puisqu'il est le produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
Si k est impair, alors il existe un entier k' tel que $k = 2k'+1$ et $n = kq + k(k'+1) = k(q+k'+1)$ et, comme $k \geq 3$, n n'est pas premier puisqu'il est le produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
b. Si n est un nombre premier supérieur ou égal à 3, alors il est impair et donc sectionnable d'après la partie B. De plus, en reprenant le résultat et les notations de la question précédente, la décomposition $n = (q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$ ne peut comporter que deux termes.
On a alors $n = (q+1)+(q+2)$ où $q = \frac{n-3}{2}$ qui est bien un entier positif ou nul puisque n est un entier impair supérieur ou égal à 3 et n est bien uniquement sectionnable.

Remarque : On peut aussi raisonner directement comme cela a été fait pour l'entier 13. En effet, si p est un nombre premier supérieur ou égal à 3, $2 \times p$ est la seule décomposition de l'entier $2p$ en produit de deux nombres supérieurs ou égaux à 2 où l'un est strictement supérieur à l'autre.
Alors $2p = 2(2+1+2q)$ où $q = \frac{p-3}{2}$ qui est bien un entier positif ou nul puisque p est un entier impair supérieur ou égal à 3.

Exercice 3

Trois

1. Le tableau suivant montre les étapes suivies pour parvenir à chacun des entiers compris entre 1 et 12 .

1	Diviser par 2, diviser par 2
2	Diviser par 2
3	Diviser par 2, multiplier par 3, diviser par 2
4	Ne rien faire
5	Diviser par 2, diviser par 2, multiplier par 3 et ajouter 2
6	Diviser par 2, multiplier par 3
7	Multiplier par 3 puis ajouter 2, diviser par 2
8	Diviser par 2, multiplier par 3 et ajouter 2
9	Diviser par 2, diviser par 2, multiplier par 3, multiplier par 3
10	Diviser par 2, multiplier par 3, multiplier par 3 puis ajouter 2, diviser par 2
11	Multiplier par 3, diviser par 2, diviser par 2, multiplier par 3 puis ajouter 2
12	Multiplier par 3.

2. On peut atteindre 8. On multiplie par 3, cela donne 24. On multiplie par 3 et on ajoute 2, voilà 74. On multiplie par 3 et on ajoute 2, voilà 224. On multiplie par 3 et on ajoute 2, voilà 674. On multiplie par 3, et on obtient $2\ 022$

3.

a. Montrons que tous les multiples non nuls de 3 sont atteignables. Le plus petit d'entre eux, m est tel qu'il existe un entier non nul a tel que $m = 3a$. Mais cela signifie qu'il existe une opération autorisée permettant de passer de a à m. Dire que m n'est pas atteignable, c'est dire que a ne l'est pas, mais a est plus petit que m. Contradiction.

b. Si $m - 2$ est un multiple de 3, alors il existe un entier b tel que $m - 2 = 3b$ et donc $m = 3b + 2$, d'où on voit que m peut être atteint à partir de b, qui est plus petit que m. Contradiction.

c. Si $m - 1$ est un multiple de 3, il existe un entier c tel que $m - 1 = 3c$ et donc $m = 3c + 1$. Mais alors $2m = 3 \times 2c + 2$ et donc $2m$ peut être atteint à partir de c, et m à partir de $2m$. Nouvelle contradiction.

d. De trois entiers consécutifs, un est un multiple de 3. Donc l'hypothèse de départ est fausse : il n'y a pas d'entier non nul non atteignable.