Modèle proies-prédateurs

I.N.R.I.A. Rocquencourt

Le 9 janvier 2013

Position du problème

Le mathématicien Volterra a proposé en 1926 un modèle décrivant l’évolution conjointe des sardines et des requins constatée par des pêcheurs de l’Adriatique : les effectifs des deux espèces variaient de façon périodique en fonction du temps, avec la même période mais en étant décalées dans le temps.

Position du problème

On considère alors deux populations dont les effectifs à l'instant *t* sont notés *A*(*t*) et *B*(*t*), qui désignent respectivement le nombre de proies et le nombre de prédateurs.

On suppose, pour traduire les évolutions conjointes des deux populations, qu'il existe quatre nombres positifs *a*, *b*, *c* et *d* tels que (A , B) soit solution du *système dynamique* :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = A(t)\big(a - bB(t)\big) \\ \dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = B(t)\big(-d + cA(t)\big) \end{cases}$$

qu'on peut aussi écrire

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = f\big(A(t), B(t)\big) \\ \dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = g\big(A(t), B(t)\big) \end{cases}$$

Recherche d'un équilibre

Les effectifs des deux populations sont constantes si et seulement si :

$$\begin{cases} A(t)\big(a - bB(t)\big) = 0 \\ B(t)\big(-d + cA(t)\big) = 0 \end{cases}$$

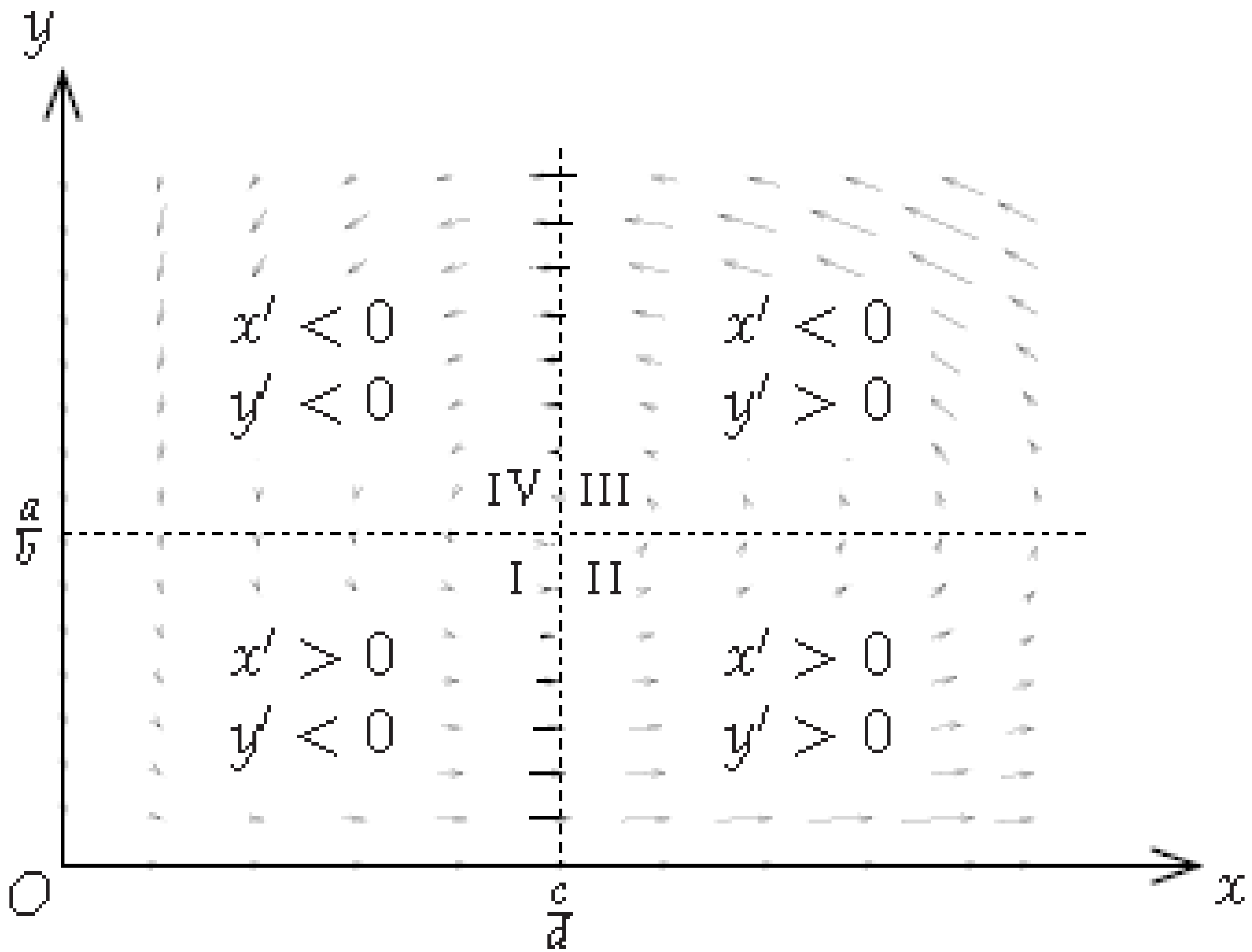
Ceci donne deux points d'équilibre :

$$\left(A^*, B^*\right) = (0,0) \text{ et } \left(A^*, B^*\right) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right).$$

Il est de plus possible de caractériser un point d'équilibre, qui peut être :

- stable si une petite perturbation de A ou de B est suivie d'un retour au point (A^*, B^*) ,
- instable dans le cas contraire.

Il est enfin possible de tracer le « portrait » du système dynamique en délimitant, dans le plan (A, B), les régions où les signes de A' et B' sont constants, et en traçant les lieux des points où la dérivée B' ou A' est nulle.



y
$x' < 0$
$y' < 0$
$x' < 0$
$y' > 0$
IV
III
$\frac{a}{b}$
I
II
$x' > 0$
$y' < 0$
$x' > 0$
$y' > 0$
O
$\frac{c}{d}$
x

Linéarisation autour du point d'équilibre $(x,y)=\left(\frac{d}{c},\frac{a}{b}\right)$

On se place alors dans un voisinage de ce point d'équilibre et on cherche à approximer les fonctions *f* et *g*

et à linéariser le système :

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=f\left(A(t),B(t)\right)\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=g\left(A(t),B(t)\right)\end{cases}$$

où $f(x,y)=x\left(a-by\right)$ et $g(x,y)=y\left(-d+cx\right)$

On doit alors dériver les deux fonctions par rapport à chacune des variables *x* et *y* puis approximer les deux fonctions au voisinage du point d'équilibre (développement de Taylor).

En considérant alors les fonctions $N=A-\frac{d}{c}$ et $P=B-\frac{a}{b}$, on aboutit à la traduction matricielle :

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{bd}{c}\\[2mm]\dfrac{ac}{b} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N\\P\end{pmatrix}$$

Un peu d'algèbre linéaire

Les valeurs propres de la matrice sont les solutions de l'équation .

$\det(M - \lambda I) = 0$ où I est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient deux valeurs propres conjuguées et imaginaires pures qui sont $i\sqrt{ad}$ et $-i\sqrt{ad}$.

On montre alors qu'il existe une matrice inversible Q telle

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{ad} \\ i\sqrt{ad} & 0 \end{pmatrix}$$

Le système dynamique associé est (S) : $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -i\sqrt{ad}\, y \\ \dfrac{dy}{dt} = i\sqrt{ad}\, x \end{cases}$.

Et pour finir

On utilise les coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ qui donnent les relations $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$.

En dérivant par rapport au temps, on aboutit à :

$$r(t) = r_0 \text{ et } \theta(t) = \mathrm{i}\sqrt{ad}\,t + \theta_0$$

La solution approchée est représentée par un cercle de centre $\left(\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{b}\right)$.

L'existence du centre entraîne que les trajectoires ne tendent pas vers le point d'équilibre mais restent dans son voisinage.

Discrétisation : évolution couplée de deux suites récurrentes

On décrit les populations à des instants successifs t et $t + \Delta t$ à l'aide de deux suites (A_n) et (B_n) de premiers termes A_0 et B_0 (effectifs à l'instant 0) et telles que pour tout entier n :

$$\begin{cases} A_{n+1} - A_n = \Delta(t) A_n \left(a - bB_n\right) \\ B_{n+1} - B_n = \Delta(t) B_n \left(-d + cA_n\right) \end{cases}$$ c'est-à-dire $$\begin{cases} A_{n+1} = A_n \left(1 + a' - b' B_n\right) \\ B_{n+1} = B_n \left(1 - d' + c' A_n\right) \end{cases}$$

Où $a' = \Delta(t) a$, $b' = \Delta(t) b$, $c' = \Delta(t) c$ et $d' = \Delta(t) d$.

Cela ne change pas la valeur des rapports a/b et d/c mais cela revient à considérer des petites valeurs pour les coefficients a, b, c et d dans le système :

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n \left(1 + a - bB_n\right) \\ B_{n+1} = B_n \left(1 - d + cA_n\right) \end{cases}$$

Proies-prédateurs

On se place au voisinage du point d'équilibre et on pose

$U_n = A_n - \frac{d}{c}$ et $V_n = B_n - \frac{a}{b}$

On est alors ramené au système : $\begin{cases} U_{n+1} = U_n - \frac{bd}{c}V_n - bU_nV_n \\ V_{n+1} = \frac{ac}{b}U_n + V_n + cU_nV_n \end{cases}$

qu'on approxime par le système : $\begin{cases} U_{n+1} = U_n - \frac{bd}{c}V_n \\ V_{n+1} = \frac{ac}{b}U_n + V_n \end{cases}$

c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$

en négligeant le terme U_nV_n .

tableur

Juste entre nous

$$f(x,y) \approx f\left(\frac{d}{c},\frac{a}{b}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{d}{c},\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{d}{c}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{d}{c},\frac{a}{b}\right)\left(y-\frac{a}{b}\right) = -\frac{bd}{c}\left(y-\frac{a}{b}\right)$$

$$g(x,y) \approx g\left(\frac{d}{c},\frac{a}{b}\right) + \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{d}{c},\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{d}{c}\right) + \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{d}{c},\frac{a}{b}\right)\left(y-\frac{a}{b}\right) = \frac{ac}{b}\left(x-\frac{d}{c}\right)$$

Retour

Encore entre nous

$$r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\sqrt{ad}\,xy + \mathrm{i}\sqrt{ad}\,xy = 0$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \left(-\frac{x}{y^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\sqrt{ad}\cos^2\theta\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = \mathrm{i}\sqrt{ad}\cos^2\theta\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) = \mathrm{i}\sqrt{ad}\cos^2\theta\left(\frac{r^2}{x^2}\right) = \mathrm{i}\sqrt{ad}$$

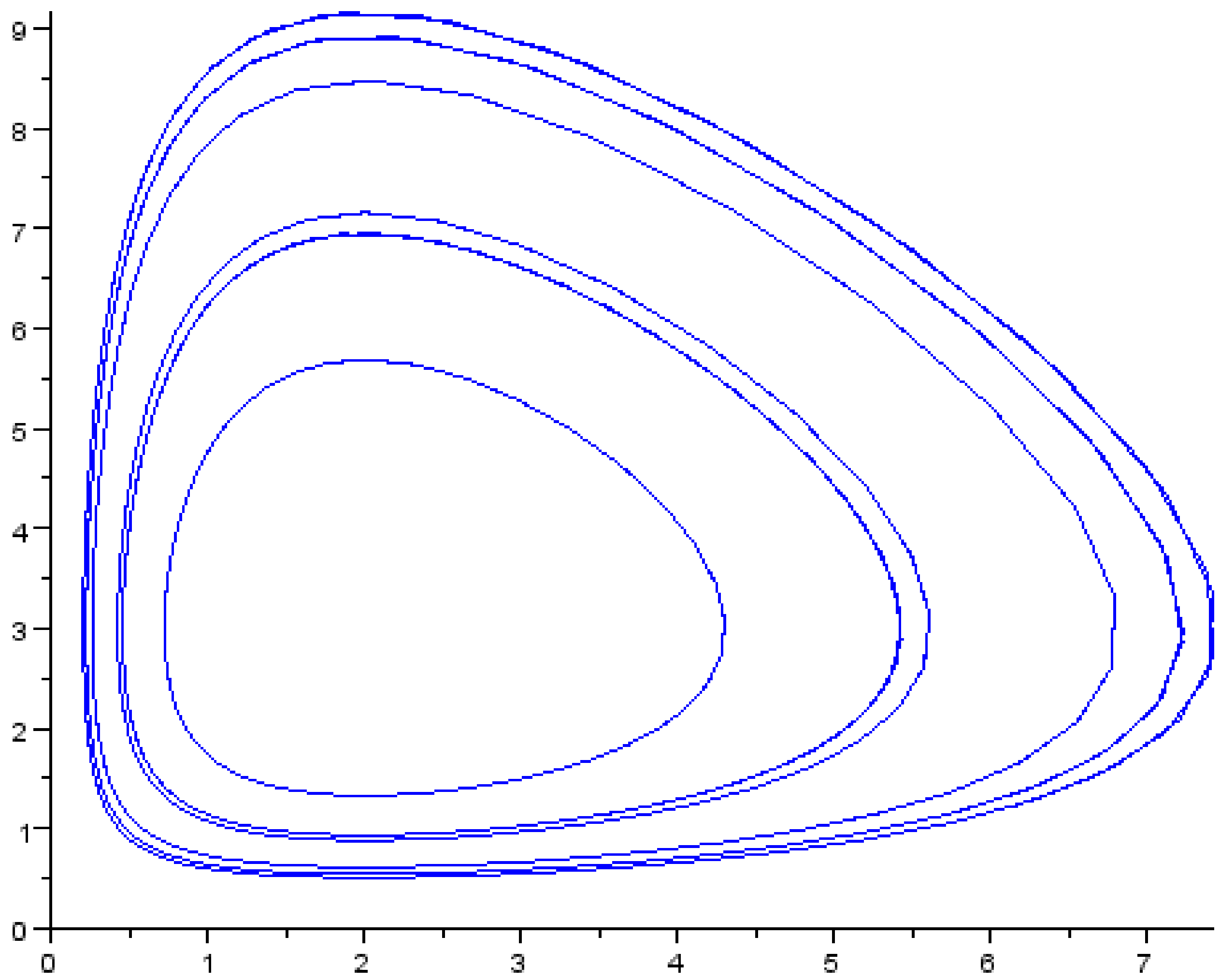
Retour

TP Scilab

```
function yprim=f(t, y)
   yprim(1)=a*y(1)-b*y(1)*y(2);
   yprim(2)=c*y(1)*y(2)-d*y(2);
endfunction

//une trajectoire
a=3; b=1; c=1; d=2;
t0=0; tmax=5; t=t0:0.05:tmax;
x0=3; y0=1.5;
y=ode([x0;y0],t0,t,f);
clf; plot(y(1,:),y(2,:))

//Tracés de différentes trajectoires en cliquant pour imposer la condition//initiale
while(%t)
   [c_i,x0,y0]=xclick();
   if c_i==5 then break end;
   y=ode([x0;y0],t0,t,f);
   plot(y(1,:),y(2,:))
   end
```


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0
1
2
3
4
5
6
7