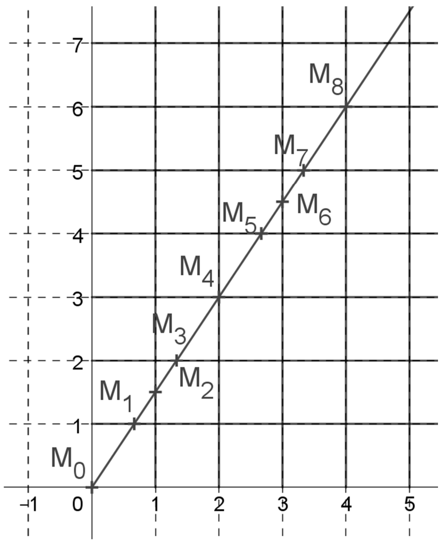
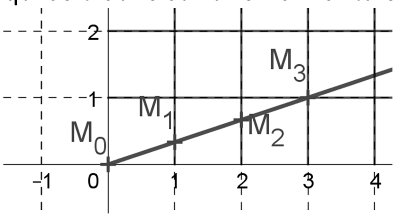
Des droites et des mots (Série S)

Éléments de solution



1. La demi-droite d'équation $y = 1{,}5x$ détermine avec les droites du quadrillage les points M_i du graphique de droite, auxquels sont successivement associées les lettres C, H, V, H, C, H, V, H, etc.

2. La première intersection avec les droites du quadrillage est le point O, qui se trouve sur une horizontale et sur une verticale.



3. Le motif CVV est associé à une demi-droite qui rencontre la verticale d'équation $x = 3$ en même temps que l'horizontale d'équation $y = 1$. Cette demi-droite a donc pour équation $y = \frac{x}{3}$. On vérifie que les deux premiers points d'intersection avec les droites du quadrillage ont pour abscisses 1 et 2 et pour ordonnées $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

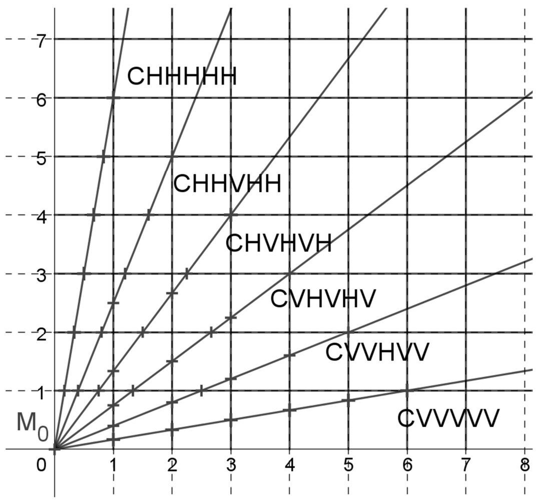
4. *a.* Si on rencontre la succession VV dans le mot associé à la demi-droite d'équation $y = ax$, c'est qu'il existe un entier n et un entier p tels que les solutions des équations $ax = p$ et $ax = p + 1$ soient l'une à gauche de l'intervalle $]n-1, n[$, l'autre à droite. Leur différence $\frac{1}{a}$ est donc supérieure à 1, et donc $a < 1$.

b. Pour des raisons semblables, on trouve la séquence HH dans le mot associé à la demi-droite d'équation $y = ax$ lorsque la pente de cette demi-droite est supérieure à 1.

c. On a vu à la question **3.** que la succession CVV détermine une unique droite, dont le mot associé est CVVCVVCVV … Il n'y a donc pas de droite associée à un mot commençant par CVVHHC, par exemple.

5. La septième lettre d'un mot de période 6 est C. Si les coordonnées du point M_6 sont les entiers a et b, la demi-droite associée a pour équation $y = \frac{b}{a}x$. La période ne peut être que 6. De M_0 à M_6, la demi-droite rencontre :

- ou bien 7 verticales et pas d'horizontale autre que celles d'équation $x = 0$ et $x = 1$; le point M_6 a pour coordonnées $(6, 1)$;
- ou bien 7 verticales et l'horizontale d'équation $x = 1$ (plus celles d'équations $x = 0$ et $x = 2$). Ce cas est à exclure, car il conduit au motif CVV et à la période 3 ;
- ou bien 6 verticales (et une horizontale en un point non déjà compté) ; le point M_6 a pour coordonnées $(5, 2)$;
- ou bien 5 verticales (et 2 horizontales en des points non déjà comptés) ; point M_6 a pour coordonnées $(4, 3)$;
- ou bien 4 verticales ; point M_6 a pour coordonnées $(3, 4)$;
- ou bien 3 verticales ; point M_6 a pour coordonnées $(2{,}5)$;
- ou bien 2 verticales ; point M_6 a pour coordonnées $(1, 6)$;



6. Pour que le mot associé à une demi-droite soit périodique, il faut qu'après un premier motif CXXXX … un autre débute, lui aussi par C, donc que la droite passe par un point à coordonnées entières. La pente de cette demi-droite est donc rationnelle. Réciproquement, une demi-droite de pente rationnelle a pour équation $y = \frac{a}{b}x$, a et b étant des entiers, donc elle passe par le point de coordonnées (b, a).

7. La droite d'équation $y = \frac{1}{p}x$ réalise cet objectif.

8. La demi-droite de pente $\sqrt{2}$ rencontre la verticale d'équation $x = n$ en un point nécessairement codé V, puisque c'est le point d'intersection avec une verticale. Les points associés à la lettre H sont les points de coordonnées (x, y) pour lesquels existe un entier m tel que $y = m, x = \frac{m}{\sqrt{2}}$ et $\frac{m}{\sqrt{2}} < n$. Leur nombre est donc égal au plus grand entier inférieur à $n\sqrt{2}$. Cela donne $n\sqrt{2} - 1 \leq F_W(n) \leq n\sqrt{2}$. La limite de $\frac{F_W(n)}{n}$ existe et vaut $\sqrt{2}$.