La tête aux carrés (à traiter par tous les candidats)

Éléments de solution

Partie préliminaire

1. $5 = 2^2 + 1^2$ et $22 = 3^2 + 3^2 + 2^2$

2. On peut aussi écrire $5 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ et $22 = 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$

3. Comme 1 est un carré, écrire $n = n \times 1$ correspond à une décomposition en somme de carrés.

Avec deux carrés seulement

4. $58 = 7^2 + 3^2$, la réponse est oui.

5. 21 n'est pas un carré et les carrés inférieurs à 21 sont 16, 9, 4 et 1. Aucune somme réalisée avec deux de ces quatre nombres n'est égale à 21. La réponse est donc non.

6. Il y a une infinité de carrés comme il y a une infinité de nombres entiers naturels. En ajoutant le nombre 1 à un carré, on obtient un nombre *bicarré* qui n'est égal à aucun de ceux qu'on a pu faire apparaître de cette manière. Il y a donc « plus » de *bicarrés* que de carrés, donc une infinité.

7. ***a.*** On développe chacun des deux membres pour vérifier l'égalité.

b. $18 \times 58 = (3^2 + 3^2) \times (7^2 + 3^2) = (3 \times 7 + 3 \times 3)^2 + (3 \times 3 - 3 \times 7)^2 = 30^2 + 12^2$

c. Si $n = a^2 + b^2$, alors $2n = (1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$. C'est bien une somme de deux carrés.

d. Considérons un nombre pair *bicarré.* Il existe donc un entier n et des entiers a et b tels que $2n = a^2 + b^2$. La somme de a^2 et b^2 ne peut être un nombre pair que si a^2 et b^2 sont de même parité, c'est-à-dire si a et b sont de même parité. On peut écrire $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} = n$. Donc la moitié d'un *bicarré* pair est un *bicarré.*

Ce qui précède inclut la situation des carrés parfaits, qui sont bicarrés au sens de l'énoncé.

e. Pour savoir si 1 344 est un nombre *bicarré*, on peut essayer de lui soustraire les carrés des entiers de 1 à 37 (car $38^2 = 1\,444$) pour voir si la différence est un carré (on n'aura pas à les essayer tous) ou utiliser l'argument lié à la question précédente : si 1 344 est *bicarré*, sa moitié 672 l'est aussi, la moitié de sa moitié, 336, aussi, etc. jusqu'à 21. Mais 21 n'est pas *bicarré*. 1 344 non plus.

f. et ***g.*** Pour tout nombre pair n, il existe un entier k non nul et un entier impair m tel que $n = 2^k \times m$. Il existe des nombres impairs *bicarrés*, comme 5, et des nombres impairs qui ne le sont pas, comme 21. À tout entier non nul k, on peut donc faire correspondre au moins un nombre pair *bicarré* et un nombre pair qui ne l'est pas. La réponse aux deux questions est donc oui.

Avec au plus quatre carrés

8. On peut utiliser l'algorithme ci-contre.

9. ***a.*** On commence par la racine carrée du nombre à décomposer. Le plus grand carré à essayer est donc $83^2 = 6\,889$. S'ils existent les trois autres carrés ont pour somme 155. Or, $155 = 121 + 25 + 9$
(Plus faciles à trouver, de tête ou avec l'algorithme).

Finalement $7\,044 = 83^2 + 11^2 + 5^2 + 3^2$.

b. Si on appelle r la raison de cette suite, la condition s'écrit : $1 + (1 + r)^2 + (1 + 2r)^2 + (1 + 3r)^2 = 7\,044$. L'équation $7a^2 + 6a - 3520 = 0$ a pour solution entière positive 22.

Finalement $7\,044 = 1^2 + 23^2 + 45^2 + 67^2$

```
i ← 0 ; j ← 0 ; k ← 0 ; l ← 0 ; R ← Partie entière de √N
Pour i allant de R à 0 avec un pas de –1
  Pour j allant de 0 à i
    Pour k allant de 0 à j
      Pour l allant de 0 à k
        Si n=i^2+j^2+k^2+l^2 alors
          Aller à Label
        Fin Si
      Fin Pour
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Pour
Label :
Sortie
Afficher i, j, k, l
```