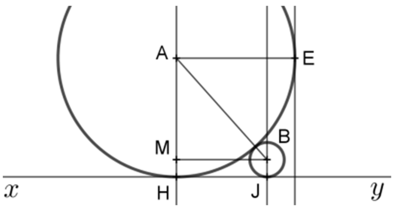
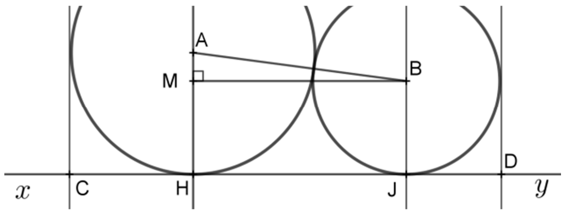
« Ne dérange pas mes cercles ! » (Série S)
Éléments de solution



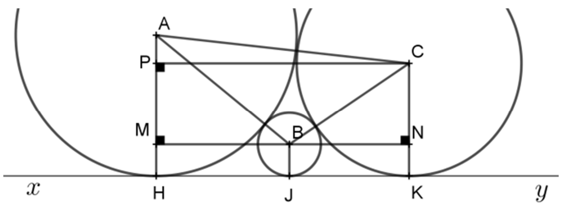
1. Cas de deux disques

a. On applique le théorème de Pythagore au triangle ABM rectangle en M : $(R+r)^2 = (R-r)^2 + \mathrm{MB}^2$. D'où on tire $\mathrm{MB}^2 = 4Rr$. Le cercle de centre B est « caché » par le cercle de centre A lorsque $\mathrm{MB} + \mathrm{r} \leq R$. Cette condition s'écrit $r + 2\sqrt{R}\sqrt{r} - R \leq 0$ ou encore $\left(\sqrt{r}+\sqrt{R}\right)^2 - 2R \leq 0$, et finalement : $\sqrt{r} \leq \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{R}$ ou $r \leq \left(3-2\sqrt{2}\right)R$.

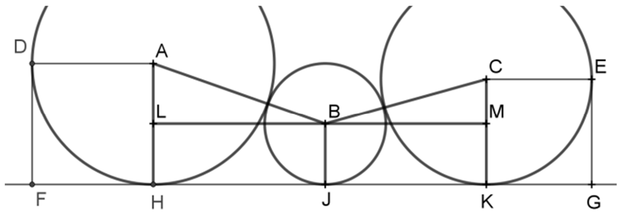


b. On applique le théorème de Pythagore au triangle ABM rectangle en M : $(R+r)^2 = (R-r)^2 + \mathrm{BM}^2$.
La relation est la même, mais pour déterminer l'encombrement, il faut ajouter les rayons des deux cercles : $L = R + 2\sqrt{Rr} + r$.

2. Cas de trois disques



a. C'est toujours le théorème de Pythagore qu'on applique, dans les triangles ABM rectangle en M, BCN rectangle en N et ACP rectangle en P :
$(p+q)^2 = (p-q)^2 + \mathrm{BM}^2$, $(q+r)^2 = (r-q)^2 + \mathrm{BN}^2$, et $(p+r)^2 = (p-r)^2 + \mathrm{PC}^2$se traduisent par : $\mathrm{BM}^2 = 4pq$, $\mathrm{BN}^2 = 4qr$ et $\mathrm{PC}^2 = 4pr$. Mais comme $\mathrm{PC} = \mathrm{MB} + \mathrm{BN}$, $\mathrm{PC}^2 = \mathrm{BM}^2 + \mathrm{BN}^2 + 2\mathrm{BM} \times \mathrm{BN}$, et donc finalement $q = \frac{pr}{\left(\sqrt{p}+\sqrt{r}\right)^2}$. On peut exclure le cas où q est inférieur à cette valeur (le contact n'est pas assuré), mais on doit conclure que l'encombrement d'une suite de trois disques peut être égal à l'encombrement des deux « extérieurs ».



b. Le calcul est analogue aux précédents et utilise les mêmes arguments. Si les rayons, de la gauche vers la droite, sont p, q et r, l'encombrement est : $L_1 = p + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{qr} + r$. S'ils sont dans l'ordre q, p et r, l'encombrement est $L_2 = q + 2\sqrt{qp} + 2\sqrt{pr} + r$ et s'ils sont dans l'ordre q, r et p, cela donne $L_3 = q + 2\sqrt{qr} + 2\sqrt{rp} + p$.
On trouve : $L_1 - L_2 = p - q + 2\sqrt{r} \times \left(\sqrt{q}-\sqrt{p}\right) = \left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right) \times \left(\sqrt{p}+\sqrt{q}-2\sqrt{r}\right)$, donc $L_1 \geq L_2$.
Et : $L_1 - L_3 = r - q + 2\sqrt{p} \times \left(\sqrt{q}-\sqrt{r}\right) = \left(\sqrt{q}-\sqrt{r}\right) \times \left(2\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}\right)$, donc $L_1 \geq L_3$.
Mais $L_2 - L_3 = r - p + 2\sqrt{q} \times \left(\sqrt{p}-\sqrt{r}\right) = \left(\sqrt{p}-\sqrt{r}\right) \times \left(2\sqrt{q}-\sqrt{p}-\sqrt{r}\right)$n'est négatif que si $\sqrt{q}-\sqrt{r} \leq \sqrt{p}-\sqrt{q}$, c'était la condition demandée. Le plus grand disque au milieu ou le plus petit peuvent donc créer l'encombrement minimum.

3. Sept d'un coup

On dispose de sept rondelles de rayons 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 (l'unité est le cm).

a. L'arrondi au mm de la longueur totale est donc 97,8 cm. La somme des diamètres est 98 cm. La différence est minime.

Rayon	10	9	8	7	6	5	4
$\sqrt{r(r+1)}$		9, 487	8, 485	7, 483	6, 481	5, 477	4, 472
Encombrement	20	37,974	53, 944	67,911	79,872	89,827	97,771

$L \leftarrow 20$
$R \leftarrow 10$
Pour $i = 0$ à 5
$L \leftarrow L + \sqrt{(R-i)(R-i-1)} + 1$
Afficher L
Fin

b. À gauche, l'algorithme demandé (qui fait les mêmes calculs que le tableau).

c. Toutes les suites isolées de trois disques sont placées dans la situation leur conférant l'encombrement maximal. La somme des diamètres des disques est 98 cm. La différence est minime.

d. Placer le disque de rayon 4 à gauche du disque de rayon 10 augmente l'encombrement total de :
$\Delta = 4 + 2 \times \sqrt{10 \times 4} - 10$. Ou encore $\Delta = 4 \times \sqrt{10} - 6$
Cette augmentation est compensée : ôter le disque de rayon 4 de la place qu'il occupait diminue l'encombrement de $\nabla = 4 + 2 \times \sqrt{4 \times 5} - 5$, ou encore $\nabla = 4 \times \sqrt{5} - 1$. Le gain de place est donc : $\nabla - \Delta = 5 - 4 \times \sqrt{5} \times \left(\sqrt{2}-1\right)$. Arrondi au cm, le gain est de 1,3 cm.

4. *a.* On a le choix entre 7 places pour le premier disque (il faut imaginer des cases), 6 pour le second, etc. Au total, $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5\,040$ (cela s'écrit aussi « factorielle 7 » et se note 7 !) On peut diviser ce nombre de *permutations* par 2, si on considère que deux dispositions symétriques (on échange la gauche et la droite) sont identiques.

b. Les dispositions convenables doivent suivre l'ordre « petit-grand-petit-etc. » indiqué dans le tableau ci-contre, sauf que « petit » et « grand » sont relatifs, sauf pour 9 qui est nécessairement grand et 4 qui est nécessairement petit. On décompte les premières dispositions possibles telles que 4 soit à l'extrême gauche. Il y en a 20 (on aurait pu faire une économie, en compter 10 et doubler le nombre de triplets à droite, par symétrie).

On passe à 40 dispositions en plaçant le 4 à gauche du 10, et à 80 par symétrie.

Petit	**Grand**	**Petit**	**10**	**Petit**	**Grand**	**Petit**
4	9	8		6	7	5
4	9	8		5	7	6
4	9	7		6	8	5
4	9	7		5	8	6
4	9	6		5	8	7
4	9	6		7	8	5
4	9	5		6	8	7
4	9	5		7	8	6
4	8	7		5	9	6
4	8	7	**10**	6	5	9
4	8	6		5	9	7
4	8	6		7	9	5
4	8	5		6	9	7
4	8	5		7	9	6
4	7	6		8	9	5
4	7	6		5	9	8
4	7	5		8	9	6
4	7	5		6	9	8
4	6	5		8	9	7
4	6	5		7	9	8

c. Une fois placé le disque de plus grand rayon, et choisi ceux qui se trouveront à sa gauche et ceux qui se trouveront à sa droite, il n'y a qu'une disposition possible :

- si on met le grand disque à gauche, 1 disposition ;
- si on laisse une place à gauche, 6 dispositions ;
- si on laisse deux places à gauche, 15 dispositions ;
- si on laisse trois places à gauche, 20 dispositions ;

Puis, par symétrie, 15, 6 et 1. En tout 64 dispositions possibles.

Remarque : comme dans la question précédente, ces dénombrements peuvent se faire à la main si on n'a pas connaissance des combinaisons. On peut aussi dire, sans mentionner les combinaisons, qu'on a passé en revue les parties d'un ensemble à 6 éléments (parties à 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 éléments) et que, justement il y en a 2^6 *(le nombre de suites de 6 symboles pris parmi 0 et 1).*