Premières fois (Série S)

Éléments de solution

1. En écrivant $p^2 = p \times p$ et en appliquant la définition : $\Delta(p^2) = p \times \Delta(p) + \Delta(p) \times p = 2p$.
On poursuit : $\Delta(p^3) = \Delta(p \times p^2) = 1 \times p^2 + p \times 2p = 3p^2$.
Supposons que pour un entier naturel n, sur lequel on ne fait aucune autre hypothèse, on ait : $\Delta(p^n) = n \times p^{n-1}$.
En appliquant la définition, on obtient : $\Delta(p^{n+1}) = p \times \Delta(p^n) + 1 \times p^n$, ce qui donne, en utilisant notre hypothèse $\Delta(p^{n+1}) = n \times p^n + p^n = (n+1)p^n$.
Finalement pour tout entier premier p et tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $\Delta(p^n) = np^{n-1}$.
2. *a.* $\Delta(p^m \times q^n) = \Delta(p^m) \times q^n + p^m \times \Delta(q^n) = mp^{m-1} \times q^n + p^m \times nq^{n-1} = (mq+np)p^{m-1}q^{n-1}$
b. On applique le résultat précédent à $10^n = 2^n \times 5^n$. On obtient $\Delta(2^n \times 5^n) = (5n+2n)10^{n-1}$.
Le second membre de l'égalité est bien multiple de 7.
3. *a.* Le nombre n peut être écrit $n = {p_1}^{\alpha_1} \times n_1$, les nombres premiers apparaissant dans la décomposition de n_1 étant les mêmes et avec les mêmes exposants que dans la décomposition de n, sauf évidemment p_1. Avec cette écriture, $\Delta(n) = \alpha_1 {p_1}^{\alpha_1 - 1} \times n_1 + {p_1}^{\alpha_1} \times \Delta(n_1) = \alpha_1 \times q_1 + {p_1}^{\alpha_1} \times \Delta(n_1)$.
La prochaine étape fera apparaître le produit ${p_1}^{\alpha_1} \times \alpha_2 \times {p_2}^{\alpha_2 - 1} \times n_2$, où n_2 fait apparaître les nombres premiers apparaissant dans la décomposition de n, avec les mêmes exposants, sauf p_1 et p_2, etc. D'où le résultat :
$\Delta(n) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \cdots + \alpha_k \times q_k$.
b. Pour un nombre premier p, le calcul est rapide, $\alpha_1 = 1$ et $q_1 = 1$ donc $\Delta(p) = 1$.
Pour le produit de deux nombres entiers a et b, on peut, dans la décomposition en produit de facteurs premiers de ab, « étiqueter » les nombres premiers qui figureraient à la fois dans les décompositions de a et de b en les traitant comme des premiers distincts. On adapte la formule ci-dessus donnant $\Delta(n)$, en convenant par exemple pour calculer $\Delta(a)$ de remplacer α_i par 0 si l'entier premier p_i apparaît dans la décomposition de b mais pas dans celle de a. On aurait, en adaptant les notations : $\Delta(a) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \cdots + \alpha_k \times q_k$,
$\Delta(b) = \beta_1 \times r_1 + \beta_2 \times r_2 + \beta_3 \times r_3 + \cdots + \beta_k \times r_k$. La somme $a \times \Delta(b) + \Delta(a) \times b$ fait alors apparaître des termes comme $\alpha_1 \times q_1 \times b + \beta_1 \times r_1 \times a$, mais $b \times q_1 = a \times r_1$(c'est aussi le quotient de ab par p_1), et donc ce terme est exactement $(\alpha_1 + \beta_1)s_1$, où $s_1$est le quotient de ab par p_1 et $\alpha_1 + \beta_1$l'exposant de p_1 dans la décomposition de ab.
Conclusion : les *propriétés* imposées permettent de *définir* une application $\Delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui les possède. Tout repose évidemment sur l'existence de la décomposition en produit de facteurs premiers, que nous avons admise pour ce problème.

Étude de quelques images d'entiers par la fonction Δ.
4. *a.* $\Delta(12) = 2 \times 2 \times 3 + 2^2 \times 1 = 16$, $\Delta(56) = 3 \times 2^2 \times 7 + 8 \times 1 = 92$,
$\Delta(1\ 001) = 11 \times 13 + 7 \times 13 + 7 \times 11 = 311$.
b. Aucun x entier composé non nul ne peut satisfaire $\Delta(x) = 0$, car , $\Delta(x)$ est dans ce cas une somme d'entiers positifs. Les seules solutions sont 0 et 1.
c. Les nombres premiers sont par définition solutions de $\Delta(x) = 1$. Dans la formule donnant en général $\Delta(n)$, pour que cette somme de termes positifs soit égale à 1, il faudrait que tous les termes fussent nuls sauf un, égal à 1. Ce n'est pas possible, le produit de deux entiers ne peut être égal à 1 que s'ils le sont l'un et l'autre.
d. Le nombre 2 n'a pas d'antécédent par Δ. La raison est la même que ci-dessus : il faudrait deux termes égaux à 1 dans la somme permettant le calcul de $\Delta(n)$, ou un terme égal à 2. Mais s'il y a un terme égal à 2, il y en a nécessairement un autre, car $\Delta(2^2) = 2 \times 2$ (l'un vient de l'exposant).
e. On a donné des exemples de la situation contraire à la question **5. *a.***
5. *a.* Si p et q sont des nombres premiers, on trouve $\Delta(p \times q) = p \times \Delta(q) + q \times \Delta(p) = p + q$
b. On a trouvé $\Delta(12) = 16$, tandis que $\Delta(4) + \Delta(3) = 4 + 1 = 5$. La réponse est non.
6. *a.* On a trouvé $\Delta(56) = 92$, tandis que $\Delta(49) = 14$ et $\Delta(7) = 1$.
b. Dans l'hypothèse envisagée, on obtient : $\Delta(ka + kb) = \Delta\big(k \times (a+b)\big) = (a+b) \times \Delta(k) + k \times \Delta(a+b)$.
Ou encore : $\Delta(ka + kb) = a \times \Delta(k) + b\Delta(k) + k\Delta(a) + k\Delta(b)$, d'où le résultat, en réorganisant.

Les points fixes de la fonction Δ
7. *a.* Il existe un entier k tel que $m = k \times p^p$. On a : $\Delta(m) = \Delta(k) \times p^p + p \times p^{p-1} \times k = p^p \times (\Delta(k) + k)$
b. $\Delta(n)$ s'écrit comme combinaison linéaire des quotients de n par les chacun des nombres premiers apparaissant dans sa décomposition. Ces quotients sont des produits des nombres premiers apparaissant dans la décomposition de n, pour chaque terme de la combinaison linéaire, un des exposants a été diminué de 1.

Mais un des facteurs premiers peut être « rétabli » par le coefficient qui l'affecte dans la combinaison linéaire, c'est-à-dire par son exposant originel, c'est le cas des nombres qui interviennent avec un exposant qui leur est égal…

8. D'après ce qui précède, l'exposant originel ne peut être rétabli que dans le cas où $n = p^p$.