Produit de fractions

Éléments de solution

1. ***a.*** Les nombres dont dispose Aïcha sont tous supérieurs à 1. Avec des produits de nombres strictement supérieurs à 1, elle ne peut obtenir 1. Si on s'autorise l'exposant 0, on peut obtenir 1 mais ça ne fait pas avancer le problème.
b. Le nombre entier k est égal au produit $\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{k-1}{k-2} \times \frac{k}{k-1}$. Il appartient donc au *patrimoine* d'Aïcha, comme tout nombre entier positif distinct de 1.

2. ***a.*** $\frac{7}{108} = \frac{1}{9} \times \frac{7}{12} = \frac{6\times1-5}{3\times1+6} \times \frac{6\times2-5}{3\times2+6}$. Le nombre $\frac{7}{108}$ est bien le produit de deux rationnels appartenant au *patrimoine* de Ben. Il en fait donc aussi partie.
b. Il y a un nombre strictement inférieur à 1 (et non nul) dans le *patrimoine* de Ben. Toutes les puissances de ce nombre en font aussi partie. Elles sont une infinité.
c. Les dénominateurs de toutes les fractions représentant des éléments du *patrimoine* de Ben sont des multiples de 3, tandis que les numérateurs n'en sont pas (le reste de la division euclidienne de $6p - 5$ par 3 est 1). Il n'y a donc pas de simplification par 3 possible. Pas d'entiers dans le *patrimoine* de Ben.

3. ***a.*** Les numérateurs et les dénominateurs de toutes les fractions représentant des éléments du *patrimoine* de Ben sont des nombres impairs. Aucune simplification de peut aboutir à un entier pair.
b. Le nombre $\frac{4\times1-1}{2\times1+1} = \frac{3}{3} = 1$ appartient bien au *patrimoine* de Caro.
Les nombres $\frac{4\times4-1}{2\times4+1} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ et $\frac{4\times7-1}{2\times7+1} = \frac{27}{15} = \frac{9}{5}$ appartiennent au *patrimoine* de Caro. Leur produit aussi. C'est 3.
On vient de voir que 3 et $\frac{15}{9}$ appartiennent au *patrimoine* de Caro. Leur produit aussi, donc. C'est 5.
c. On suppose que tous les entiers impairs inférieurs ou égaux à $4k - 3$ font partie du *patrimoine* de Caro. Le nombre $4k - 1$ est le nombre impair suivant, et le dénominateur $2k + 1$ de la fraction $\frac{4k-1}{2k+1}$ est un nombre impair qui, dès que $k \geq 2$, est inférieur ou égal à $4k - 3$. Mais les cas $k = 2$ et $k = 1$ correspondent à $4k - 3 = 5$ ou $4k - 3 = 1$ étudiés précédemment. Le produit $(2k + 1) \times \frac{4k-1}{2k+1}$ est le produit de deux éléments du *patrimoine* de Caro. Leur produit aussi. C'est $4k - 1$.
Le nombre $\frac{4(3k+1)-1}{2(3k+1)+1}$ est, par définition, dans le *patrimoine* de Caro. Ce nombre s'écrit aussi $\frac{12k+3}{6k+3} = \frac{4k+1}{2k+1}$. Si on fait le produit de ce nombre par un élément du *patrimoine* de Caro, on reste dans le patrimoine. C'est donc le cas en le multipliant par $2k + 1$, qui est dans ce *patrimoine*, car impair et inférieur à $4k - 3$ dès que k est supérieur à 2 (voir ci-dessus), et le produit obtenu est $4k + 1$.
Conclusion : Si on suppose que tous les entiers impairs jusqu'à un certain rang sont dans le *patrimoine* de Caro, on montre que les suivants impairs en font aussi partie. Comme $1, 2, 3$ en font partie, tous les impairs y sont.