Le retournement de la mantisse

Éléments de solution

1. On a : $a = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ et $0 \leq \frac{1}{4} < 1$. $E(a) = 1$ et $m(a) = \frac{1}{4}$
$b = \frac{125}{16} = \frac{7\times 16+13}{16} = 7 + \frac{13}{16}$ et $0 \leq \frac{13}{16} < 1$. $E(b) = 7$et $m(b) = \frac{13}{16}$.
$c = \frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113}$ et $0 \leq \frac{16}{113} < 1$. $E(c) = 3$ et $m(c) = \frac{16}{113}$.
$d = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $0 \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$. En effet, $\sqrt{5} > 1$ et d'autre part $\sqrt{5} < 3$. $E(d) = 1$ et $m(d) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
$e = \frac{1}{d} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. On a vu ci-dessus que ce nombre est compris entre 0 et 1. $E(e) = 0$ et $E(e) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Remarque : la mantisse de d est son inverse.
Note : un nombre étant donné, il peut être nécessaire de préciser sa partie entière avant sa mantisse. C'est ce que nous avons fait ci-dessus.

2. Un nombre égal à sa mantisse est nécessairement compris entre 0 et 1, puisque sa mantisse l'est. Et tout nombre compris entre 0 et 1 a pour partie entière 0. Il est égal à sa mantisse.

3. *a.* Considérons un nombre rationnel positif représenté par la fraction irréductible $\frac{a}{b}$. Appelons n sa partie entière ; on a alors $\frac{a}{b} = n + \frac{b}{a}$. Ce qui s'écrit aussi $a^2 - b^2 = abn$. Il s'ensuit que a est un diviseur de $a^2 - b^2$, donc un diviseur de b^2, ce qui contredit le fait que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible. Aucun rationnel positif n'est l'inverse de sa mantisse.
b. Soit n un entier positif qui n'est pas un carré parfait. $\sqrt{n} = a + x$, en désignant par a la partie entière de $\sqrt{n}$ et par x sa mantisse. La condition proposée s'écrit : $\sqrt{n} = a + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ou encore : $n = a\sqrt{n} + 1$. Mais de cette dernière écriture on déduit que $a\sqrt{n}$ est un entier et donc $\sqrt{n}$ un rationnel. Contradiction.

4. *a.* Avec les notations données par l'énoncé : $y + \frac{1}{n+y} = 1$. En effet, l'inverse de $n + y$ est un nombre compris entre 0 et 1, donc égal à sa mantisse.
On étudie donc l'équation $y^2 + (n-1)y - (n-1) = 0$.
Le cas $n = 1$ conduit à $y = 0$, mais cette valeur n'est pas admissible. Il n'y a pas de solution pour $n = 1$.
L'équation s'écrit : $\left(y + \frac{n-1}{2}\right)^2 - (n-1)\left(1 + \frac{n-1}{4}\right) = 0$
Ou encore : $\left(2y + (n-1) + \sqrt{n-1}\sqrt{n+3}\right)\left(2y + (n-1) - \sqrt{n-1}\sqrt{n+3}\right) = 0$.
Nous cherchons une solution positive, une condition nécessaire est donc :

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{n-1}\left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-1}\right)$$

Qu'on peut encore écrire :

$$y = \frac{2\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n-1}}$$

Sous cette forme, on voit bien que y est compris entre 0 et 1.
La solution « en x » est : $n + y$.
b. Dans l'intervalle $]2\,019, 2\,020[$, la solution s'écrit $x = 2\,019 + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{2\,022}{2\,018}}}$.

Si on souhaite un arrondi au millionième, c'est2 019,999505.

Remarque : si on avait cherché des solutions dans l'intervalle $]0,1[$, on aurait été amené à introduire comme paramètre la partie entière de l'inverse du nombre cherché (égal à sa mantisse) et l'équation aurait eu pour solutions les compléments à 1 des solutions de l'équation précédente.