Lundi 9 juillet 2018

Problème 1. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC dont tous les angles sont aigus. Les points D et E sont situés sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ respectivement, de sorte que $AD = AE$. Les médiatrices de $[BD]$ et $[CE]$ coupent les petits arcs AB et AC aux points F et G respectivement. Montrer que les droites (DE) et (FG) sont parallèles (ou confondues).

Problème 2. Déterminer tous les entiers $n \geqslant 3$ tels qu'il existe des nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ vérifiant $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ et

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$.

Problème 3. Un *anti-triangle de Pascal* est un tableau en forme de triangle équilatéral dans lequel sont disposés des nombres tels que, excepté pour les nombres placés sur la ligne du bas, chaque nombre soit égal à la valeur absolue de la différence entre les deux nombres situés juste en-dessous. Par exemple, le tableau ci-dessous est un anti-triangle de Pascal de quatre lignes qui contient chaque entier entre 1 et 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Existe-t-il un anti-triangle de Pascal de 2018 lignes qui contient tous les entiers de 1 à $1+2+\cdots+2018$?

Language: French

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Mardi 10 juillet 2018

Problème 4. Un *site* est un point (x, y) du plan tel que x et y soient des entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 20.

Initialement, chacun des 400 sites est inoccupé. Alice et Bernard placent chacun leur tour des pierres, en commençant par Alice. À son tour, Alice place une nouvelle pierre rouge sur un site inoccupé de sorte que la distance entre deux sites occupés par des pierres rouges soit différente de $\sqrt{5}$. À son tour, Bernard place une nouvelle pierre bleue sur un site inoccupé. (Un site occupé par une pierre bleue peut se trouver à une distance quelconque d'un site occupé.) Ils s'arrêtent dès qu'un joueur ne peut plus placer de pierre.

Déterminer le plus grand nombre K tel qu'Alice puisse s'assurer de placer au moins K pierres rouges, quelle que soit la manière de laquelle Bernard place ses pierres bleues.

Problème 5. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite infinie d'entiers strictement positifs. On suppose qu'il existe un entier $N > 1$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, le nombre

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

soit un entier. Montrer qu'il existe un entier strictement positif M tel que $a_m = a_{m+1}$ pour tout $m \geqslant M$.

Problème 6. Un quadrilatère convexe $ABCD$ satisfait $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Un point X est situé à l'intérieur de $ABCD$ de sorte que

$$\widehat{XAB} = \widehat{XCD} \quad \text{et} \quad \widehat{XBC} = \widehat{XDA}.$$

Montrer que $\widehat{BXA} + \widehat{DXC} = 180°$.

Language: French

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points