samedi 8 juillet 2023

Problème 1. Trouver tous les nombres composés n ayant la propriété suivante : lorsque tous les diviseurs positifs de n ont été ordonnés pour former une liste $d_1, d_2, \ldots, d_k$ telle que

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n,$$

l'entier d_i divise la somme $d_{i+1} + d_{i+2}$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Remarque : Un nombre composé est un entier $n \geqslant 2$ qui n'est pas un nombre premier.

Problème 2. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et tel que $AB < AC$. Soit Ω son cercle circonscrit, et S le milieu de l'arc de cercle $\widehat{BC}$ contenant A. La perpendiculaire à (BC) passant par A coupe le segment $[BS]$ en un point D, et recoupe le cercle Ω en un point E distinct de A. La parallèle à (BC) passant par D coupe la droite (BE) en un point L. Enfin, on note ω le cercle circonscrit au triangle BDL, et P le point, autre que B, en lequel ω recoupe le cercle Ω.
Démontrer que la tangente à ω en P et la droite (BS) se coupent en un point situé sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

Problème 3. Trouver, pour tout entier $k \geqslant 2$, l'ensemble des suites $a_1, a_2, \ldots$ d'entiers naturels non nuls pour lesquelles il existe un polynôme P de la forme

$$P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

tel que $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ soient des entiers naturels et

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.

Durée : 4 heures et 30 minutes.
Chaque problème est noté sur 7 points.

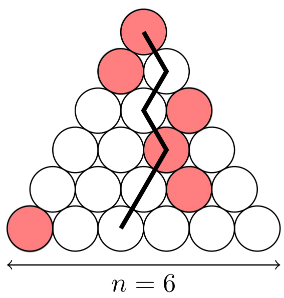
dimanche 9 juillet 2023

Problème 4. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ des réels strictement positifs et deux à deux distincts tels que le nombre

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

soit un entier pour tout n tel que $1 \leqslant n \leqslant 2023$. Démontrer que $a_{2023} \geqslant 3034$.

Problème 5. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Un *triangle nippon* consiste en $1+2+\cdots+n$ cercles disposés de manière à constituer un triangle formé de n lignes, dont la $\ell^{\text{ème}}$ ligne contient exactement ℓ cercles et a été coloriée de sorte qu'un de ces ℓ cercles soit rouge et que les autres cercles de la ligne soient incolores. On appelle *chemin ninja* toute suite de n cercles qui débute sur le cercle de la première ligne, dont chaque cercle est situé juste en-dessous du cercle qui le précède, et qui se termine sur un cercle de la dernière ligne.
Voici un exemple de triangle nippon possible lorsque $n = 6$, ainsi qu'un chemin ninja contenant deux cercles rouges.



Trouver, en fonction de n, le plus grand entier k pour lequel, dans chaque triangle nippon, il existe nécessairement un chemin ninja contenant au moins k cercles rouges.

Problème 6. Soit ABC un triangle équilatéral. Soit A_1, B_1 et C_1 trois points situés à l'intérieur du triangle ABC de sorte que $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ et que

$$\widehat{BA_1C} + \widehat{CB_1A} + \widehat{AC_1B} = 480°.$$

Soit A_2 le point d'intersection des droites (BC_1) et (CB_1) ; B_2 le point d'intersection des droites (CA_1) et (AC_1) ; C_2 le point d'intersection des droites (AB_1) et (BA_1).
Démontrer que, si le triangle $A_1B_1C_1$ est scalène, il existe deux points par lesquels passe chacun des cercles circonscrits aux trois triangles AA_1A_2, BB_1B_2 et CC_1C_2.

Remarque : Un triangle est scalène lorsque ses trois côtés sont de longueurs deux à deux distinctes.