Mardi 10 juillet 2012

Problème 1. Soit ABC un triangle et J le centre de son cercle exinscrit opposé au sommet A. Ce cercle est tangent au côté $[BC]$ en M et aux droites (AB) et (AC), respectivement, en K et L. Les droites (LM) et (BJ) se coupent en F et les droites (KM) et (CJ) se coupent en G. Soit S le point d'intersection des droites (AF) et (BC) et soit T le point d'intersection des droites (AG) et (BC).

Montrer que M est le milieu du segment $[ST]$.

(Le cercle *exinscrit* du triangle ABC opposé au sommet A est le cercle tangent au segment $[BC]$, à la demi-droite $[AB)$ au-delà de B et à la demi-droite $[AC)$ au-delà de C)

Problème 2. Soit $n \geq 3$ un entier et soit $a_2, a_3, \ldots, a_n$ des nombres réels strictement positifs tels que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Montrer que :

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \; > \; n^n.$$

Problème 3. La *devinette du menteur* est un jeu joué par deux joueurs A et B. Les règles du jeu dépendent de deux entiers strictement positifs k et n, connus par chacun des deux joueurs.

Au début du jeu, le joueur A choisit deux entiers x et N vérifiant $1 \leq x \leq N$. Le joueur A garde x secret et, honnêtement, communique N au joueur B. Le joueur B essaye d'obtenir des informations concernant x en posant au joueur A des questions comme suit : pour chaque question, B choisit un ensemble arbitraire d'entiers strictement positifs S (éventuellement déjà choisi pour une question antérieure) et demande à A si x appartient à S ; le joueur B peut poser autant de telles questions qu'il le souhaite. Après chaque question, le joueur A doit immédiatement répondre par *oui* ou *non*, mais il a le droit de mentir autant de fois qu'il le souhaite ; la seule restriction étant que parmi toutes $k + 1$ réponses consécutives, au moins l'une de ces réponses doit être la vérité.

Après que B ait posé autant de questions qu'il le souhaite, il doit proposer un ensemble X contenant au plus n entiers strictement positifs. Si x appartient à X, alors B gagne, sinon, il perd. Montrer que :

1. Si $n \geq 2^k$, alors B dispose d'une stratégie gagnante.
2. Pour tout entier suffisamment grand k, il existe un entier $n \geq 1.99^k$ tel que B ne dispose pas de stratégie gagnante.

Temps accordé : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Mercredi 11 juillet 2012

Problème 4. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tous entiers a, b, c vérifiant $a+b+c=0$, on ait l'égalité suivante :

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \ = \ 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

($\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs)

Problème 5. Soit ABC un triangle dans lequel $\widehat{BCA} = 90°$, et soit D le pied de la hauteur issue de C. Soit X un point intérieur au segment $[CD]$. Soit K le point du segment $[AX]$ tel que $BK = BC$. De même, soit L le point du segment $[BX]$ tel que $AL = AC$. Finalement, soit M le point d'intersection des droites (AL) et (BK).

Montrer que $MK = ML$.

Problème 6. Trouver tous les entiers strictement positifs n pour lesquels il existe des entiers positifs ou nuls $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que :

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \ = \ \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \ = \ 1.$$

Temps accordé : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points