ACADÉMIE DE VERSAILLES

OLYMPIADES ACADÉMIQUES
DE MATHÉMATIQUES

Compétition ouverte aux élèves des classes de première

Mercredi 24 mars 2004

*

Durée : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE numéro 1

On définit pour chaque couple de réels (a, b) la fonction f par :

$$f(x) = a - \sqrt{x+b}\ .$$

Deux nombres réels u et v distincts sont dits *échangeables* s'il existe au moins un couple de réels (a, b) tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

1. Montrer que 2 et 3 sont échangeables.

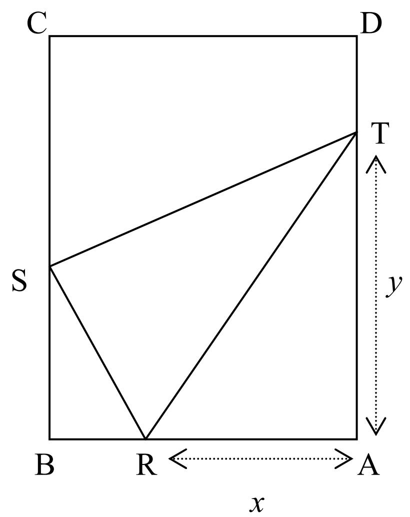
2. Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?

3. A quelle condition deux <u>entiers</u> u et v sont-ils échangeables ?

*

EXERCICE numéro 2

Soit ABCD une feuille de papier rectangulaire de largeur AB = 4 et de longueur BC = 6.
Soit R un point de [AB] (bord inférieur de la feuille) et T un point de [AD] (bord droit de la feuille).
On replie la feuille suivant le segment [RT] et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille). Voir figure ci-dessous.



Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment [BC] (bord gauche de la feuille).
On pose AR = x, AT = y.

1. Trouver les valeurs minimale et maximale de x.

2. Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur [BC].

3. Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle SRT) est minimale.
   Quelle est alors la nature du triangle AST ?

EXERCICE numéro 3

Un entier $n \geqslant 2$ est dit *académique* si on peut répartir les entiers 1, 2, …, n en deux groupes disjoints $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$, de sorte que la somme des nombres du groupe $\mathcal{S}$ est égale au produit des nombres du groupe $\mathcal{P}$.

Exemple : le nombre 7 est académique car $2 + 4 + 5 + 7 = 1 \times 3 \times 6$.

1. Prouver que $n = 4$ n'est pas académique.

2.a. Le nombre 5 est – il académique ?
   b. Le nombre 6 est – il académique ?

3. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 7$ le nombre n est académique.

*

EXERCICE numéro 4

Le tournoi des n nations

On considère un entier $n \geqslant 3$.

Dans un tournoi des n nations, chaque nation joue avec les $n - 1$ autres.

Le classement se fait selon le nombre de matchs gagnés (un match ne pouvant être que gagné ou perdu). En cas d'égalité, le classement se fait en regardant le nombre de points marqués.

Faire le grand chelem c'est gagner tous ses matchs. Obtenir la cuiller de bois, c'est perdre tous ses matchs.

1. Existe – t – il des tournois pouvant donner ces scores :

Tournoi des 6 nations

Equipes	Victoires	Défaites
A	5	0
B	4	1
C	4	1
D	1	4
E	1	4
F	0	5

Tournoi des 5 nations

Equipes	Victoires	Défaites
A	3	1
B	3	1
C	2	2
D	1	3
E	1	3

2. Démontrer que les entiers n pour lesquels il existe un tournoi où le vainqueur a autant de victoires que de défaites sont les entiers impairs.

3. Pour quelles valeurs de n existe – t – il un tournoi où le second compte plus de défaites que de victoires ?

4. Pour quelles valeurs de n, existe – t – il des tournois où l'on peut faire un classement des trois premiers sans avoir à regarder le nombre de points marqués ?

5. Pour quelle valeur minimale de n existe – t – il des tournois où l'on peut faire un classement des trois premiers sans avoir à regarder le nombre de points marqués, sachant qu'il n'y a pas eu de grand chelem ?