Olympiades académiques de mathématiques 2005

Éléments de solution

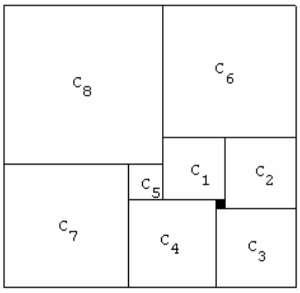
## Exercice 1 (fourni par la cellule nationale)

Le lièvre se déplace 363 fois plus vite que la tortue. Lorsque la tortue a parcouru une moitié du circuit, le lièvre a parcouru, lui, 363 moitiés de circuit, c'est-à-dire 181 « tours complets » et un demi circuit, à l'issue duquel les deux animaux se croisent. Le lièvre a donc dépassé 181 fois la tortue (à chaque passage sur une boucle de rang pair de son parcours), et l'a croisée une fois au carrefour : ce premier demi circuit de la tortue génère donc 182 « dépassements ou croisements ». Au second demi circuit effectué par la tortue, le même raisonnement s'applique (la position initiale étant comptabilisée dans le décompte précédent), et ainsi de suite. Ainsi, chaque demi circuit effectué par la tortue génère 182 rencontres, dont 181 dépassements et un seul croisement à la fin.

$2005 = 11 \times 182 + 3$

Donc pour 2005 « croisements ou dépassements », la tortue aura parcouru 11 moitiés de circuit, qui auront généré 11 croisements.

## Exercice 2 (fourni par la cellule nationale)




Pour résoudre cet exercice, il faut partir d'un des carrés jouxtant le carré unité (en noir sur la figure) et de préférence commencer par le plus petit (carré $C_1$).

Si ce carré $C_1$ a pour côté **c**, le carré $C_2$ a pour côté **c + 1**, et le carré $C_3$ a pour côté **c + 2**.

Le carré $C_4$ a pour côté **c + 3**.

(A chaque fois, on utilise le fait que le carré noir a pour côté **1**)

Ceci permet de déduire que le carré $C_5$ pour côté **4**. Quant au carré $C_6$ il a pour côté **2c + 1**.

On obtient qu'une des dimensions du rectangle initial est :

$$(2c + 1) + (c + 1) + (c + 2) = 4c + 4.$$

Le carré $C_7$ a pour côté **c + 3 + 4** = **c + 7**. Donc l'autre dimension du rectangle initial est :

$$(c + 7) + (c + 3) + (c + 2) = 3c + 12.$$

Le dernier carré $C_8$ a pour côté **c + 7 + 4 =c + 11**.

Finalement deux côtés opposés du rectangle ont pour dimensions :

$$4c + 4 \text{ et } (c + 7) + (c + 11) = 2c + 18$$

Les deux côtés étant de même longueur, on a **4c + 4** = **2c + 18** ce qui donne **c** = **7**.

En conclusion, le rectangle initial a pour dimensions **32u et 33u**

## Exercice 3 « concours non S » (fourni par la cellule académique)

Ces aires égales sont des fractions de $9\pi$, $16\pi$ et $25\pi$, et il se trouve que 9 + 16 = 25.
3 coupes diamétrales suffisent.

## Exercice 4 « concours non S » (fourni par la cellule académique)

Une décomposition de 2005 comporte nécessairement un et un seul 1.
Elle s'écrit donc comme une décomposition « sans 1 » de 2004 plus 1.
Une décomposition de 2004 « sans 1 » s'écrit comme le produit par 2 d'une décomposition de 1002. On a donc :

$$d(2005) = d(1002)$$

Les décompositions de 1002 sont de deux sortes : celles qui comportent deux 1 et celles qui n'en comportent pas. Celles qui comportent deux 1 sont sommes de 1 et de décompositions de 1001 (il y en a donc autant que de décompositions de 1001) ; celles qui ne comportent pas de 1 sont des produits par 2 de décompositions de 501 (il y en a donc autant que de décompositions de 501) …

## Exercice 3 « concours S » (fourni par la cellule académique)

Appelons $\gamma(a)$ le côté du carré construit posé sur [BC]. Une homothétie bien choisie conduit à $\gamma(a) = \dfrac{ah}{a+h}$. On peut comparer $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ en calculant leur différence. Pour cela, on fera apparaître l'aire S du triangle plutôt que les longueurs des hauteurs, et on trouve : $\gamma(b) - \gamma(a) = (b-a)(2S - ab)$. Le deuxième facteur est négatif, car $2S = ab\sin\hat{C}$. Les côtés des carrés sont donc rangés dans l'ordre inverse de leurs supports.

Une étude de fonction conduit à la conclusion que, pour une aire donnée, le côté du carré posé sur un côté est maximal quand la longueur du côté et la hauteur sont égales (et égales à $\sqrt{2S}$). Ceci peut être réalisé pour deux côtés (triangle rectangle), pas pour trois.

## Exercice 4 « concours S » (fourni par la cellule académique)

1. Alice fait la somme de 21 nombres impairs…

2. Elle fait ensuite la même somme de 21 nombres impairs. Elle trouve cette fois un nombre impair, mais il y a encore 21 nombres impairs « cachés », qui sont les plus petits nombres inscrits sur chaque carte.

3. Alice et Bob auraient à eux deux un total inférieur à la somme des nombres inscrits sur les 41 « plus petites » cartes.

Comme il est écrit sur une copie : « Il n'y en n'a pas un pour rattraper l'autre… »