Académie de Versailles

Olympiades académiques de mathématiques

Concours 2006

***

Mercredi 15 mars 2006

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

***

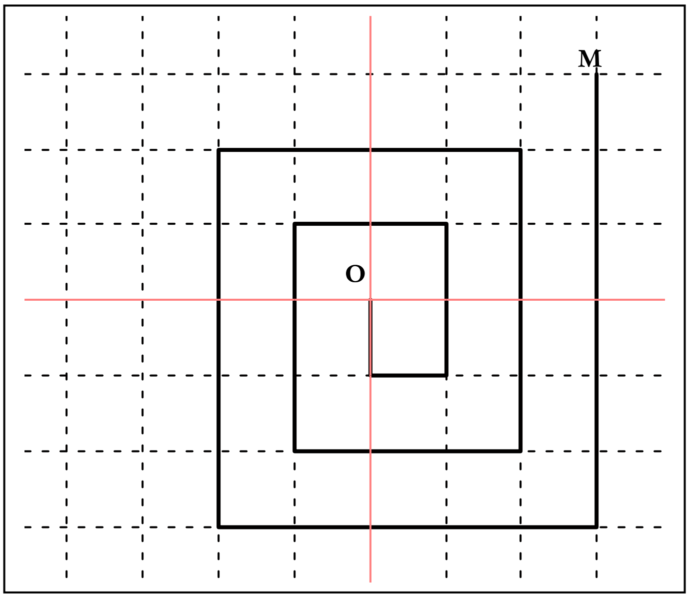
Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
INRIA ROCQUENCOURT
partenaire de l'académie de Versailles

Exercice numéro 1

La « spirale »

Le plan, muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm), est quadrillé par les droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du plan. Sur ce quadrillage on construit, en partant du point O vers le bas, une ligne brisée en forme de « spirale » qui « tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre », conformément au dessin ci-dessous.
Pour tout point M à coordonnées entières, on note $\ell(\mathrm{M})$ la longueur de la portion de « spirale » qui va du point O jusqu'au point M.



1) Soit A un point de l'axe des abscisses tel que OA=5.
   Déterminer les valeurs possibles de $\ell(\mathrm{A})$.

2) Soit B le point de coordonnées (2005 ; 2006).
   Déterminer $\ell(\mathrm{B})$.

3) Déterminer les coordonnées du point C tel que $\ell(\mathrm{C})=2006$.

4) La « spirale » passe-t-elle effectivement par tous les points à coordonnées entières du plan ?

On rappelle le résultat suivant :

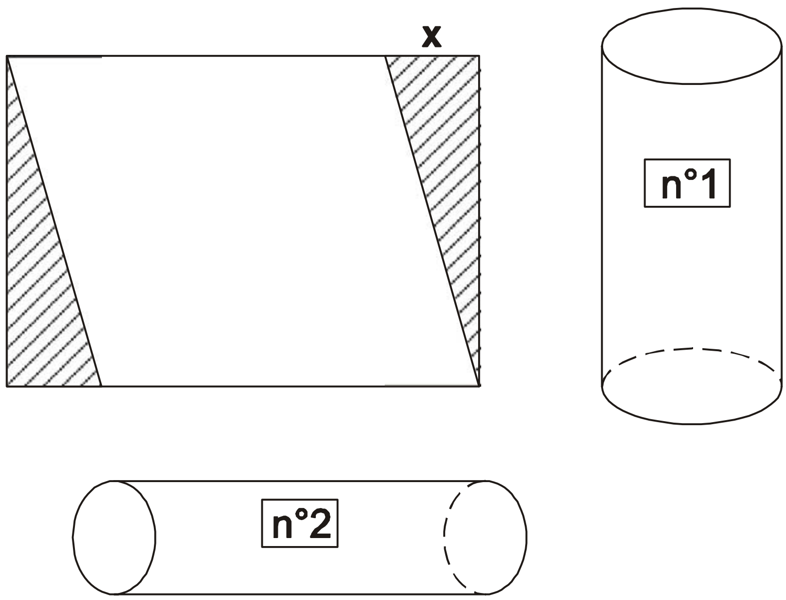
Pour tout entier naturel n non nul, $1+2+3+\ldots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

Exercice numéro 2

Les cylindres en papier

1. On prend une feuille de papier de 21 cm de large et 29,7 cm de long (le format A4). On forme un cylindre en roulant la feuille de papier et en faisant coïncider deux bords opposés. En faisant de même avec les deux autres bords opposés, on obtient un autre cylindre.
Les deux cylindres ont-ils même volume ?

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure ci-dessous :



Si on roule la feuille restante bord à bord, on obtient un premier cylindre (n°1). Si on la roule en faisant coïncider les autres bords opposés, on obtient un second cylindre (n°2).

Trouver la ou les valeurs de **x** (en cm) pour que les deux cylindres ainsi obtenus aient le même volume.

Exercice numéro 3 (concours L, ES, STG)

1. On considère une grille carrée à 36 cases : 6 lignes et 6 colonnes dans laquelle figurent les nombres entiers de 1 jusqu'à 36 écrits ligne par ligne.
On choisit au hasard 6 nombres de cette grille en n'en prenant qu'un seul sur une ligne ou une colonne donnée.
Calculer la somme de ces nombres.
Faire un autre choix de ces six nombres et calculer à nouveau leur somme.
Vérifier que dans les deux cas la somme obtenue est égale à la somme des entiers figurant sur une diagonale.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
19	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**

2. On envisage à présent une grille carrée à n lignes et n colonnes, n étant un entier naturel strictement supérieur à 1, dans laquelle on place ligne par ligne les nombres entiers de 1 jusqu'à n^2.
On choisit n nombres pris au hasard dans cette grille en n'en prenant qu'un seul sur une ligne ou une colonne donnée.
Démontrer que la somme de ces n nombres pris au hasard est égale à la somme des n nombres écrits sur une diagonale

Exercice numéro 4 (concours L, ES, STG)

Sur les cases, numérotées de 1 à 100, d'un damier, on pose un nombre donné de pions. Plusieurs pions peuvent être posés sur la même case. À chaque pion, on attribue le numéro de la case sur laquelle il est posé. Cela fait, on calcule la somme et le produit des numéros des pions. Si ces deux nombres sont égaux, on a gagné.

1. Cas de deux pions
Montrer que si les deux pions sont posés sur la case numéro 2, on a gagné. Y a-t-il d'autres positions gagnantes ?

2. Si on doit poser plus de 2 pions, et moins de 10, peut-on gagner en les posant tous sur la même case ?

3. Quelles sont les positions gagnantes lorsqu'on joue avec 3 pions ?

4. Quelles sont les positions gagnantes lorsqu'on joue avec 4 pions ?